Модел. и анализ информ. систем. Т. **21**, № **3** (2014) 121–128

УДК 517.9

Вычисление ляпуновской величины для логистического уравнения с быстро осциллирующим запаздыванием

Быкова Н. Д.[1]

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Россия, г. Москва, Каширское шоссе, 31
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: n.bykova90@gmail.com

получена 2 апреля 2014

Ключевые слова: усреднение, устойчивость, нелинейная динамика, метод нормальных форм

Рассматривается логистическое уравнение с быстро осциллирующим периодическим по времени кусочно-постоянным или кусочно-линейным запаздыванием. Показано, что в первом случае усредненным уравнением является логистическое уравнение с двумя запаздываниями, а во втором — логистическое уравнение с распределенным запаздыванием. Получен критерий устойчивости состояния равновесия в каждом из случаев. Рассмотрен вопрос о динамических свойствах исходного уравнения при условии, когда в усредненном уравнении реализуется критический случай в задаче об устойчивости стационара. Установлено, что локальная динамика определяется ляпуновской величиной, знак которой зависит от параметров задачи.

Будем рассматривать хорошо известное логистическое уравнение с запаздыванием

$$\dot{u} = r(1 - u(t - T))u, \tag{1}$$

где функция $u(t)$ и параметры r и T положительны. Отметим, что исследованию этого уравнения посвящена значительная литература (см., например, библиографию в [1]). Здесь будут рассмотрены вопросы, связанные с применением известного [2] принципа усреднения. Для уравнений с запаздыванием принцип усреднения по переменной t применялся в [3–6]. Ряд результатов настоящей работы тесно примыкает к результатам из [7].

Основное предположение состоит в том, что параметр запаздывания T является периодически зависимым и быстро осциллирующим по времени, то есть имеет вид

$$T = T_0 + af(\omega t), \qquad T_0 > 0, \qquad 0 < a < T_0, \qquad \omega \gg 1. \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при поддержке проекта № 984 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

Нас будет интересовать вопрос о поведении действительной части ляпуновской величины в зависимости от значений параметров. Рассмотрим несколько частных случаев функции $f(s)$.

1. В [8] был рассмотрен случай, когда функция $f(s)$ задается равенством

$$f(s) = \operatorname{sign} \sin s.$$

Ставился вопрос о локальной — в окрестности состояния равновесия $u_0 \equiv 1$ — динамике уравнения (1) при условии (2).

В результате применения метода усреднения удалось получить логистическое уравнение с двумя запаздываниями

$$\dot{v} = r\left[1 - \frac{1}{2}\Big(v(t-h_1) + v(t-h_2)\Big)\right]v.$$

Здесь $h_1 = T_0 - a$, $h_2 = T_0 + a$.

Критерий асимптотической устойчивости состояния равновесия u_0 состоит в выполнении неравенства

$$r < \frac{\pi}{2T_0 \cos\frac{a\pi}{2T_0}} = r_0.$$

При выполнении противоположного строгого неравенства это состояние равновесия неустойчиво.

В критическом случае при $r = r_0$ показано, что для исходной задачи в окрестности состояния равновесия u_0 имеется двумерное устойчивое локальное инвариантное интегральное многообразие, на котором задача принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения для комплексной переменной $\xi = \xi(\tau)$:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda\xi + d|\xi|^2\xi. \tag{3}$$

Здесь $\lambda = \lambda_1(\omega)/\omega + O(\omega^{-2})$, $\lambda_1(\omega)$ — ограниченная функция, явная формула которой слишком громоздка, поэтому приведем здесь только действительную часть $\lambda_1(\omega)$. Она является двухпериодической знакопеременной функцией ω и представлена формулой

$$\operatorname{Re}\lambda_1(\omega) = -A\left\{F\big(\omega h_2\big)\left[B\operatorname{tg}\frac{a\pi}{2T_0} + \frac{\pi}{2}\right] + F\big(\omega h_1\big)\left[B\operatorname{tg}\frac{a\pi}{2T_0} - \frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Здесь

$$A = \frac{\pi}{8T_0^2}\left(B^2 + \frac{\pi^2}{4}\right)^{-1}\operatorname{tg}\frac{a\pi}{2T_0}, \qquad B = 1 + \frac{a\pi}{2T_0}\operatorname{tg}\frac{a\pi}{2T_0},$$

$F(x)$ — 2π–периодическая функция и

$$F(x) = \begin{cases} -x(x-\pi), & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ (x-\pi)(x-2\pi), & \pi \leqslant x \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

А ляпуновская величина d, не зависящая от ω, задана формулой

$$d = \delta\left(\frac{\cos(2a\delta)}{\cos(a\delta)} - i\right)\left(1 + a\delta\operatorname{tg}(a\delta) + i\frac{\pi}{2}\right)^{-1}\left(2 + i\frac{\cos(2a\delta)}{\cos(a\delta)}\right)^{-1},$$

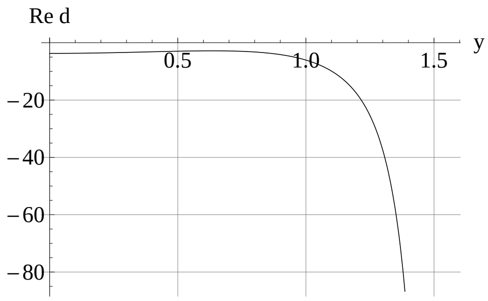

Рис. 1. $\operatorname{Re} d$ при $f(s) = \operatorname{sign}\sin s$

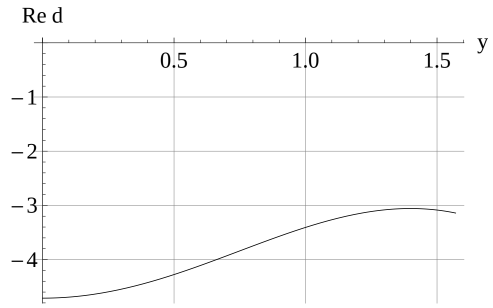

Рис. 2. $\operatorname{Re} d$ при $f(s) = s$

где $\delta = \pi/(2T_0)$.

Решения уравнения (3) и решения из указанного двумерного интегрального многообразия исходного уравнения (1) связаны формулой

$$u(t,\omega) = 1 + \omega^{-1/2}\left(\xi(\omega^{-1}t)\exp\left(i\frac{\pi}{2T_0}t\right) + \bar{\xi}(\omega^{-1}t)\exp\left(-i\frac{\pi}{2T_0}t\right)\right) + O(\omega^{-1}). \quad (4)$$

Поведение решений уравнения (3) определяется знаком действительной части d.

$$\operatorname{Re} d = \frac{-\pi + \dfrac{\cos 2y}{\cos y} - \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{\cos 2y}{\cos y}\right)^2 + y\dfrac{\cos 2y}{\cos y}\operatorname{tg} y}{\left(\left(1 + y\operatorname{tg} y\right)^2 + \dfrac{\pi^2}{4}\right)\left(4 + \left(\dfrac{\cos 2y}{\cos y}\right)^2\right)},$$

где $y = a\delta$. Числитель этого выражения как функция от y изображен на рис. 1. Таким образом, величина $\operatorname{Re} d$ всегда отрицательна.

В силу того, что функция $\operatorname{Re}\lambda_1(\omega)$ является знакопеременной и $\operatorname{Re} d < 0$, при $\omega \to \infty$ происходит неограниченный процесс «рождения» из состояния равновесия и «гибели» устойчивого цикла.

2. Теперь рассмотрим случай, в котором функция $f(s)$ — 2-периодическая и имеет вид

$$f(s) = s, \text{ при } -1 \leqslant s < 1. \quad (5)$$

Снова рассмотрим вопрос о локальной — в окрестности состояния равновесия $u_0 \equiv 1$ — динамике уравнения (1) при условии (2).

В результате применения метода усреднения получаем логистическое уравнение с распределенным запаздыванием

$$\dot{v} = r\left[1 - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} v(t - T_0 - as)ds\right]v. \quad (6)$$

Определим область устойчивости состояния равновесия u_0. Линеаризованное на u_0 уравнение

$$\dot{v} = -\frac{r}{2}\int\limits_{-1}^{1} v(t - T_0 - as)ds$$

имеет характеристический квазиполином

$$\lambda = -\frac{r}{2a\lambda} e^{-T_0\lambda}(e^{a\lambda} - e^{-a\lambda}). \tag{7}$$

Подставляя в (7) $\lambda = i\omega$, получаем, что при

$$r = r_0 = \frac{a\delta^2}{\sin(a\delta)}, \qquad \delta = \pi/(2T_0)$$

характеристическое уравнение (7) имеет два корня на мнимой оси

$$\lambda = \pm i\delta,$$

а все остальные корни находятся в левой комплексной полуплоскости, то есть реализуется критический случай в задаче об устойчивости состояния равновесия u_0. Тогда аналогично уже рассмотренному ранее исходная задача в окрестности u_0 имеет двумерное устойчивое локальное инвариантное интегральное многообразие, на котором задача принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения (3). В котором величина $\lambda_1(\omega)$ имеет вид

$$\lambda_1(\omega) = -\frac{1}{\omega} \cdot \frac{r_0(3 - a^2\delta^2 - 3a\delta \operatorname{ctg}(a\delta))(e^{ia\delta} - 1)}{6a^3\delta(2 + i\pi/2 - a\delta \operatorname{ctg}(a\delta))} + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right),$$

а d задается равенством

$$d = \delta\Big(\cos(a\delta) - i\Big)\Big(2 - a\delta \operatorname{ctg}(a\delta) + i\frac{\pi}{2}\Big)^{-1}\Big(2 + i\cos(a\delta)\Big)^{-1}.$$

Как и ранее, нас будет интересовать знак величины

$$\operatorname{Re} d = \frac{-\pi + \cos y - \frac{\pi}{2}\cos^2 y - y\cos y \operatorname{ctg} y}{\big((2 - y\operatorname{ctg} y)^2 + \frac{\pi^2}{4}\big)\,(4 + \cos^2 y)}, \quad y = a\delta.$$

Числитель изображен на рис. 2. Таким образом, в этом случае $\operatorname{Re} d$ также является отрицательной величиной.

Определим знак $\operatorname{Re}\lambda_1(\omega)$.

$$\operatorname{Re}\lambda_1(\omega) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{r_0 A}{6a^3\delta\big((2 - a\delta \operatorname{ctg}(a\delta))^2 + \pi^2/4\big)} + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right),$$

где

$$A = -\big(3 - a^2\delta^2 - 3a\delta \operatorname{ctg}(a\delta)\big)\big((\cos(a\delta) - 1)(2 - a\delta \operatorname{ctg}(a\delta)) + \pi/2 \sin(a\delta)\big).$$

Очевидно, знак $\operatorname{Re}\lambda_1(\omega)$ совпадает со знаком A. График величины A в зависимости от $y = a\delta$ изображен на рис. 3. Таким образом, в зависимости от значений параметров задачи уравнение (3) может иметь устойчивый цикл (при $\operatorname{Re}\lambda_1(\omega) > 0$).

Здесь решения уравнения (3) и решения из указанного двумерного интегрального многообразия исходного уравнения (1) при условии (2) и (5) связаны формулой (4).

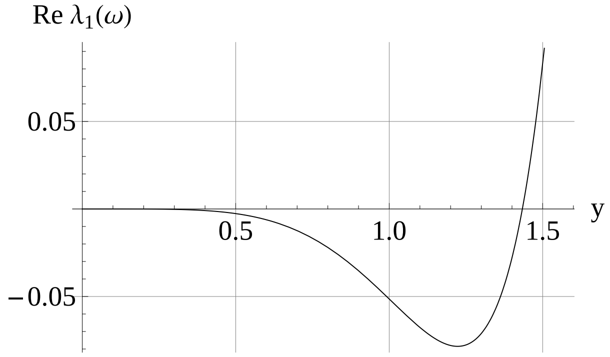

Рис. 3. $\operatorname{Re}\lambda_1(\omega)$ при $f(s) = s$

3. Пусть $f(s)$ — 2-периодичная функция и

$$f(s) = \begin{cases} -1, \text{ при } -\alpha \leqslant s \leqslant 0, \\ \gamma, \text{ при } 0 < s < 2 - \alpha. \end{cases}$$

Потребуем выполнения следующих условий:

$$\gamma = \frac{\alpha}{2-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 2,$$

гарантирующих, что функция $f(s)$ имеет нулевое среднее.

Будем снова рассматривать уравнение (1) при условии (2), в результате усреднения которого получаем логистическое уравнение с двумя запаздываниями

$$\dot{v} = r\left[1 - \frac{1}{2}\Big(\alpha v(t-h_1) + (2-\alpha)v(t-h_2)\Big)\right]v, \tag{8}$$

где $h_1 = T_0 - a$, $h_2 = T_0 + a\gamma$.

Подставляя $\lambda = i\omega$ в характеристическое уравнение

$$\lambda = -\frac{r}{2}\left(\alpha e^{-\lambda h_1} + (2-\alpha)e^{-\lambda h_2}\right)$$

для задачи (8), линеаризованной на $u_0 \equiv 1$, получаем систему для отыскания ω и r

$$\begin{cases} \alpha\cos\omega h_1 + (2-\alpha)\cos\omega h_2 = 0, \\ r(\alpha\sin\omega h_1 + (2-\alpha)\sin\omega h_2) = 2\omega. \end{cases} \tag{9}$$

Пусть δ – наименьший положительный корень первого уравнения в (9). Тогда при условии

$$r < \frac{2\delta}{\alpha\sin\delta h_1 + (2-\alpha)\sin\delta h_2} = r_0$$

в исходном уравнении состояние равновесия $u_0 \equiv 1$ асимптотически устойчиво, а при $r > r_0$ неустойчиво.

Изучая вопрос о локальной динамике уравнения (1) при условии (2) в критическом случае $r = r_0$ в окрестности состояния равновесия u_0, как и ранее, рассмотрим

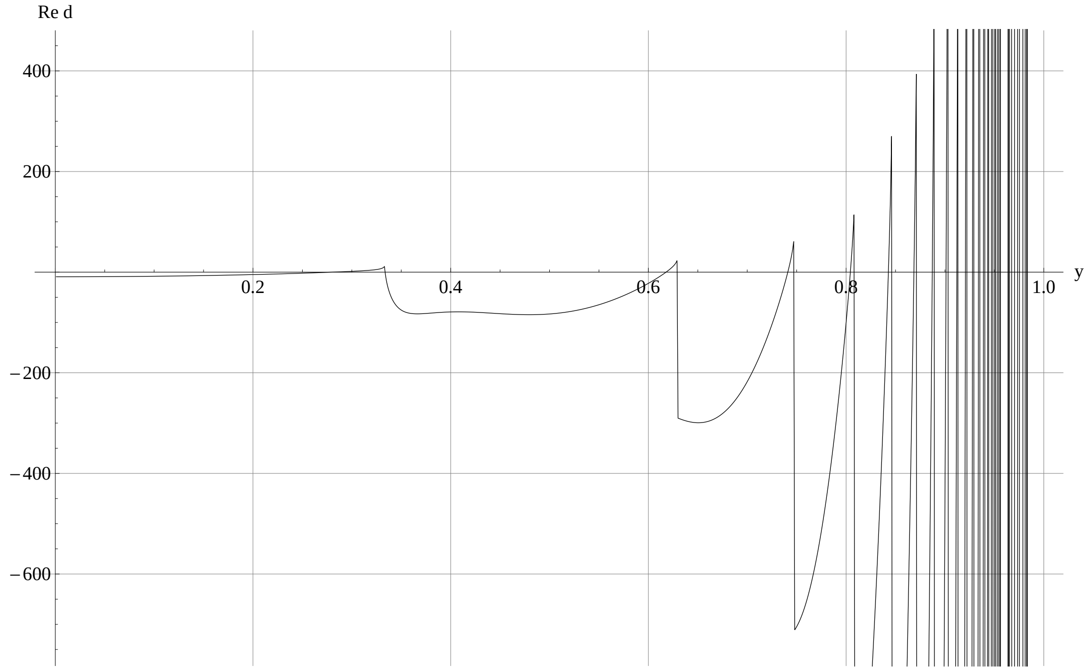

Рис. 4. $\operatorname{Re} d$ при $\alpha = 1.5$

уравнение (3). Величина $\operatorname{Re} d$ с точностью до положительного множителя теперь имеет вид

$$-C\delta\left(1-\frac{r}{2}\big(\alpha h_1\cos\delta h_1+(2-\alpha)h_2\cos\delta h_2\big)\right)- \\ -\frac{r}{2}\left(C^2+D^2+2\delta^2-3D\delta\right)\left(\alpha h_1\sin\delta h_1+(2-\alpha)h_2\sin\delta h_2\right).$$

Здесь

$$C=\frac{r}{2}(\alpha\cos 2\delta h_1+(2-\alpha)\cos 2\delta h_2),$$
$$D=\frac{r}{2}(\alpha\sin 2\delta h_1+(2-\alpha)\sin 2\delta h_2).$$

График полученного значения $\operatorname{Re} d$ при $\alpha = 1$ совпадает с рис. 1, а при $\alpha = 1.5$ изображен на рис. 4, как зависимость от $y = a/T_0$. Таким образом, действительная часть ляпуновской величины d может быть как отрицательной, так и знакопеременной.

Решения уравнения (3) и решения из указанного двумерного интегрального многообразия исходного уравнения (1) в рассматриваемом случае связаны формулой

$$u(t,\omega)=1+\omega^{-1/2}\left(\xi(\omega^{-1}t)\exp{(i\delta t)}+\bar{\xi}(\omega^{-1}t)\exp{(-i\delta t)}\right)+O(\omega^{-1}).$$

Мы получили, что можно таким образом подобрать параметр α функции $f(s)$, что действительная часть коэффициента d в уравнении (3) может быть как положительной, так и отрицательной.

Список литературы

1. *Wu J.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. Springer-Verlag, 1996.

2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматлит, 1958. 408 с. (English transl.: *Bogoliubov N.N., Mitropolsky Y.A.* Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations. New York, Gordon and Breach, 1961. 573 p.)

3. *Колесов Ю.С., Колесов В.С., Федик И.И.* Автоколебания в системах с распределенными параметрами. Киев: Наукова думка, 1979. 162 с. [*Kolesov Yu.S., Kolesov V.S., Fedik I.I.* Avtokolebaniya v sistemakh s raspredelennymi parametrami. Kiev: Naukova dumka, 1979. 162 s. (in Russian)].

4. *Колесов Ю.С., Майоров В.В.* Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1974. 10. № 10. С. 1778–1788. [*Kolesov Yu.S., Mayorov V.V.* Novyy metod issledovaniya ustoychivosti resheniy lineynykh differentsial'nykh uravneniy s blizkimi k postoyannym pochti periodicheskimi koeffitsientami // Differentsialnye uravneniya. 1974. 10. № 10. S. 1778–1788 (in Russian)].

5. *Кащенко С.А., Майоров В.В.* Алгоритм исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с последействием и быстро осциллирующими коэффициентами // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1977. С. 70–81. [*Kashchenko S.A., Mayorov V.V.* Algoritm issledovaniya ustoychivosti resheniy lineynykh differentsialnykh uravneniy s posledeystviem i bystro ostsilliruyushchimi koeffitsientami // Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy. Yaroslavl, 1977. S. 70–81. (in Russian)].

6. *Кащенко С. А.* Исследование устойчивости решений линейных параболических уравнений с близкими к постоянным коэффициентами и малой диффузией // Труды семинара Петровского. 1991. Вып. 15. С. 128–155. [*Kaschenko S.A.* Issledovaniye ustoychivosti resheniy lineynykh parabolicheskikh uravneniy s blizkimi k postoyannym koeffitsiyentami i maloy diffuziyey // Trudy seminara Petrovskogo. 1991. Vyp. 15. S. 128–155 (in Russian)].

7. *Быкова Н.Д., Глызин С.Д., Кащенко С.А.* Параметрический резонанс при двухчастотном возмущении в логистическом уравнении с запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т. 20, № 3. С. 86–98. [*Bykova N.D., Glyzin S.D., Kaschenko S.A.* Applying the Averaging Principle to a Logistic Equation with Rapidly Oscillating Delay // Modeling and Analysis of Information Systems. 2013. V. 20, № 3. P. 86–98 (in Russian)].

8. *Быкова Н.Д., Григорьева Е.В.* Применение принципа усреднения к логистическому уравнению с быстро осциллирующим запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. 2014. Т. 21, № 1. С. 89–93. [Bykova N.D., Grigorieva E.V. Applying the Averaging Principle to a Logistic Equation with Rapidly Oscillating Delay // Modeling and Analysis of Information Systems. 2014. V. 21, № 1. P. 89–93 (in Russian)].

Calculating Lyapunov Value for the Logistic Equation with Rapidly Oscillating Delay

Bykova N. D.

National Research Nuclear University MEPhI
Kashirskoye shosse 31, Moscow, 115409, Russia
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: averaging, stability, nonlinear dynamics, normal form

We consider the local dynamic of the logistic equation with rapidly oscillating time-periodic piecewise constant or piecewise linear coefficient of delay. It was shown that the averaged equation is a logistic equation with two delays in first case and logistic equation with distributed delay in second case. The criterion of equilibrium point stability was obtained in both cases. Dynamical properties of the original equation were considered in the critical case of equilibrium point of averaged equation stability problem. It was shown, that local dynamic in the critical case is defined by Lyapunov value whose sign depends on the parameters of the problem.

Сведения об авторе:
Быкова Надежда Дмитриевна,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
аспирант,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ассистент