Модел. и анализ информ. систем. Т.**14**, №**4** (2007) 13–19

УДК 681.3

Сети активных ресурсов

Башкин В.А.[1]

Ярославский государственный университет
e-mail: bas@uniyar.ac.ru

получена 1 октября 2007

Аннотация

Вводится формализм моделей распределенных систем, названный сетями активных ресурсов. Формализм построен как обобщение сетей Петри, в котором убрано разделение компонентов системы на активные и пассивные (переходы и позиции). Каждый ресурс (маркер узла сети) может выступать и в качестве пассивного ресурса, потребляемого или производимого другими агентами, и в качестве активного агента, потребляющего и производящего другие ресурсы.

Анализируется выразительная мощность данного формализма. Доказано, что АР-сети и АР-сети с простым срабатыванием равномощны обыкновенным сетям Петри; АР-сети с одновременным срабатыванием всех ресурсов в одном узле сети строго выразительнее обыкновенных сетей Петри.

1. Введение

Сети Петри [1] — класс формальных моделей, занимающий по выразительной мощности промежуточное положение между системами с конечным числом состояний (конечными автоматами) и универсальными моделями (машинами Тьюринга). Наиболее широко обыкновенные сети Петри используются при моделировании и анализе параллельных и распределенных систем. Можно выделить следующие ключевые особенности этого формализма:

- состояние системы задается *конечным* мультимножеством;
- множество разрешенных способов изменения состояния системы *конечно* (множество переходов);
- каждому переходу сопоставлено *минимальное* необходимое для его срабатывания конечное мультимножество ресурсов, но он может сработать и при любой большей разметке;
- система *недетерминирована* — если ресурсов достаточно для срабатывания любого из двух переходов, то ни один из них не обладает приоритетом;
- способы изменения состояния системы *фиксированы* — каждому переходу сопоставлены фиксированные конечные непересекающиеся мультимножества ресурсов, производимых и потребляемых при его срабатывании.

Изменение любого из перечисленных свойств влияет на выразительную мощность формализма. Важность первых двух очевидна (конечная представимость состояния системы и конечное ветвление дерева срабатываний системы). Оставшиеся три свойства были выявлены в ходе развития теории сетей Петри:

- если разрешить переходы, срабатывающие при наличии *точного* или *максимального* количества ресурсов (а не минимального), то получаются машины Тьюринга (сети Петри с ингибиторными дугами [1]);
- если разрешить действия с приоритетами, то получаются машины Тьюринга (сети Петри с приоритетами [1]);
- если разрешить переходы с нефиксированными преобразованиями памяти (копированием, обнулением), то получаются классы систем, строго более мощные, чем сети Петри, хотя и менее мощные, чем машины Тьюринга (сети Петри с переносящими и обнуляющими дугами [3]).

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Во всех моделях, основанных на сетях Петри, используется ещё один важный принцип. Модель системы явно разделена на пассивную и активную составляющие. Пассивная часть — это состояние системы, то есть мультимножество имеющихся в наличии ресурсов. Для хранения этих ресурсов (фишек) предназначен конечный набор вершин-позиций. Активная часть — конечный набор возможных преобразований состояния (множество вершин-переходов). Позиции могут быть связаны только с переходами и наоборот. Таким образом, любая модель, основанная на сетях Петри, — это двудольный граф. Одна из долей (множество позиций) меняет свое "содержимое" в ходе функционирования сети, другая (множество переходов) — жестко фиксирована и выступает только в качестве системы связей между позициями.

В обыкновенных сетях Петри переходы выступают исключительно в роли преобразователей ресурсов. Однако существует достаточно большое число формализмов, в которых переходы нагружены дополнительными функциями: синхронизации частей системы (вложенные сети [2]), определения типа фишек (сети Петри высокого уровня [4]) и т.д.

В работе Колера и Рольке [5] были представлены супер-двойственные сети Петри — сети, в которых позиции и переходы симметричны: переходы могут быть размечены специальными фишками ("покенами"), а позиции срабатывают по правилам, двойственным правилам срабатывания переходов. Для переноса покенов было предложено использовать второе, дополнительное множество дуг (G-дуги, в отличие от F-дуг, переносящих обычные фишки).

Если не усложнять правила срабатывания, то системы переходов и позиций супер-двойственной сети по сути дела не зависят друг от друга: срабатывания переходов используют и изменяют только разметку позиций, и наоборот, срабатывания позиций — только разметку переходов. Сеть представляет собой две "параллельных" сети Петри с двойственными множествами позиций и переходов. При определении срабатывания супер-двойственной сети Петри было добавлено следующее ограничение, связывающее переходы и позиции: для срабатывания перехода (позиции) необходимо, чтобы и в нем самом находился хотя бы один покен (фишка). Колером и Рольке было доказано, что даже определенные таким образом супер-двойственные сети Петри совпадают по выразительной мощности с обыкновенными сетями Петри.

В супер-двойственных сетях сохранена двудольность графа сети — переход может быть связан дугой только с позицией, позиция — только с переходом. Однако здесь это разделение выглядит несколько искусственно — ведь в силу симметричности определений позиции и переходы в таких сетях обладают одинаковыми свойствами. Возникает вопрос — что произойдет с формализмом сетей Петри при полном "слиянии" понятий позиции и перехода, то есть при отказе от требования двудольности графа.

В данной работе вводится и исследуется формализм, представляющий собой такое обобщение. В моделях, названных сетями активных ресурсов (АР-сетями), используется тот же способ сохранения и преобразования информации, что и в сетях Петри — конечное мультимножество как хранилище данных и проверка наличия в нем данного конечного подмножества как условие запуска действия. Однако отсутствует разделение вершин графа сети на позиции и переходы — все они являются равноправными узлами. Ресурсы, хранящиеся в вершине A, могут быть использованы при срабатываниях ресурсов из других вершин в качестве потребляемых или производимых объектов. Точно так же ресурсы вершины A могут сработать, производя или потребляя какие-то другие (или даже такие же) ресурсы. Для определения вида связи между вершинами (производство или потребление) вводится тип дуги — производящая или потребляющая. Таким образом, на два класса разбивается не множество вершин, а множество дуг.

Сеть активных ресурсов имеет достаточно простое математическое определение — это ориентированный псевдограф с двумя типами дуг (тогда как обыкновенная сеть Петри — это двудольный ориентированный псевдограф, а супер-двойственная сеть — это двудольный ориентированный псевдограф с двумя типами дуг). Состояние и смена состояния во всех трех формализмах определяются сходным образом.

В данной работе также исследуется выразительная мощность сетей активных ресурсов. Доказывается, что АР-сети и АР-сети с простым срабатыванием равномощны обыкновенным сетям Петри; АР-сети с одновременным срабатыванием всех ресурсов в одном узле сети строго выразительнее обыкновенных сетей Петри, так как позволяют моделировать переносящую дугу.

2. Основные определения

Через Nat обозначим множество неотрицательных целых чисел.

Пусть X — непустое множество.

Мультимножеством M над множеством X называется функция $M : X \to Nat$. *Мощность* мультимножества $|M| = \sum_{x \in X} M(x)$. Числа $\{M(x) \mid x \in X\}$ называются *коэффициентами мультимножества*, коэффициент $M(x)$ определяет число экземпляров элемента x в M. Мультимножество M *конечно*, если конечно множество $\{x \in X \mid M(x) > 0\}$. Множество всех конечных мультимножеств над данным множеством X обозначается как $\mathcal{M}(X)$.

Операции и отношения теории множеств естественно расширяются на конечные мультимножества.

Пусть $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{M}(X)$. Полагаем: $M_1 = M_2 + M_3 \Leftrightarrow \forall x \in X\ M_1(x) = M_2(x) + M_3(x)$ — операция сложения двух мультимножеств; $M_1 = M_2 - M_3 \Leftrightarrow \forall x \in X\ M_1(x) = M_2(x) \ominus M_3(x)$ — разность мультимножеств (где $\ominus$ — вычитание до нуля).

Определение 1. Сетью Петри *называется набор* $N = (P, T, F)$, *где*

- P — *конечное множество позиций;*
- T — *конечное множество переходов,* $P \cap T = \varnothing$*;*
- $F : (P \times T) \cup (T \times P) \to Nat$ — *функция инцидентности (множество дуг).*

Разметкой (состоянием) сети N называется функция вида $M : P \to Nat$, сопоставляющая каждой позиции сети некоторое натуральное число (или ноль). Разметка может рассматриваться как мультимножество над множеством позиций сети.

Определение 2. Размеченной сетью Петри *называется пара* (N, M_0), *где* $N = (P, T, F)$ — *сеть Петри,* $M_0 : P \to Nat$ — *начальная разметка (количество ресурса в наличии при запуске сети).*

Графически сеть Петри изображается как двудольный ориентированный граф. Вершины-позиции изображаются кружками и характеризуют локальные состояния сети, вершины-переходы изображаются прямоугольниками и соответствуют действиям. Дуги соответствуют элементам F. Позиции могут содержать маркеры (фишки), изображаемые черными точками. При разметке M в каждую позицию p помещается $M(p)$ фишек.

Определение 3. *Переход* $t \in T$ активен *при разметке* M*, если* $\forall p \in P\ \ M(p) \geq F(p, t)$ *(все входные позиции содержат достаточное количество фишек).*

Активный при разметке M *переход* t *может* сработать*, порождая при этом новую разметку* M'*, где* $\forall p \in P\ \ M'(p) =_{def} M(p) - F(p, t) + F(t, p)$*.*

Пример срабатывания переходов в обыкновенной сети Петри приведен на рис. 1.

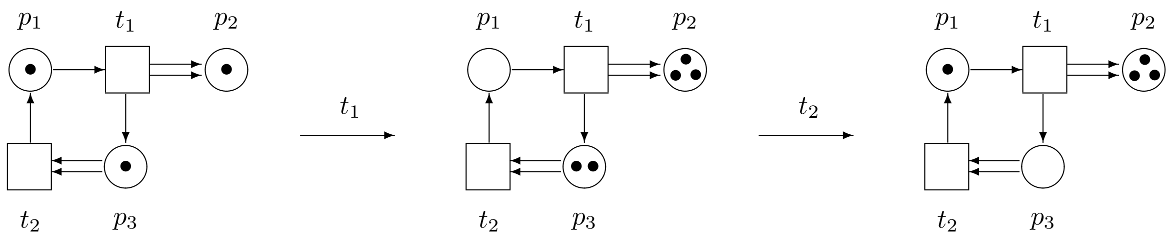

Рис. 1. Сеть Петри

Определение 4. *[5]* Супер-двойственной сетью Петри *называется набор* $SD = (P, T, F, G)$*, где*

- P — *конечное множество позиций;*
- T — *конечное множество переходов,* $P \cap T = \varnothing$*;*
- $F : (P \times T) \cup (T \times P) \to Nat$ — *множество обычных дуг (F-дуг)* [2]*;*
- $G : (P \times T) \cup (T \times P) \to Nat$ — *множество G-дуг.*

Определение 5. Размеченной супер-двойственной сетью *называется пара* (SD, M_0), *где* $SD = (P, T, F, G)$ — *супер-двойственная сеть,* $M_0 : (P \cup T) \to Nat$ — *начальная разметка.*

В супер-двойственных сетях размечены как позиции, так и переходы. На рисунках G-дуги изображаются как пунктирные стрелки, фишки в переходах — так называемые "покены" (по аналогии с обычными "токенами") — как маленькие черные квадраты.

Вводятся два правила срабатывания — как для перехода, так и для позиции:

[2]Оригинальное определение супер-двойственной сети в работе [5] не допускает кратных дуг, то есть функция инцидентности имеет вид $F : (P \times T) \cup (T \times P) \to Bool$. Однако известно, что сети Петри с ординарными дугами эквивалентны сетям с кратными дугами (см., например, [1]), поэтому здесь мы используем более удобное определение с кратными дугами.

Определение 6. *Переход $t \in T$* активен *при разметке M, если $\forall q \in P \quad M(q) \geq F(q,t)$ и $M(t) > 0$.*

Активный при разметке M переход t может сработать*, порождая при этом новую разметку M', где $\quad \forall q \in P \quad M'(q) =_{def} M(q) - F(q,t) + F(t,q), \quad \forall u \in T \quad M'(u) = M(u)$.*

Позиция $p \in P$ активна *при разметке M, если $\forall u \in T \quad M(u) \geq G(u,p)$ и $M(p) > 0$.*

Активная при разметке M позиция p может сработать*, порождая при этом новую разметку M'', где $\quad \forall q \in P \quad M''(q) = M(q), \quad \forall u \in T \quad M''(u) =_{def} M(u) - G(u,p) + G(p,u)$.*

Таким образом, F-дуги переносят обычные фишки (токены) при срабатываниях переходов, G-дуги переносят квадратные фишки (покены) при срабатываниях позиций. В определение активности перехода и позиции введено новое условие, которого не было в обыкновенных сетях Петри — требование наличия фишки в самом переходе или позиции. Без этого условия F- и G-компоненты сети получаются полностью независимыми друг от друга (точнее, поведение переходов не зависит от разметки переходов, а поведение позиций не зависит от разметки позиций).

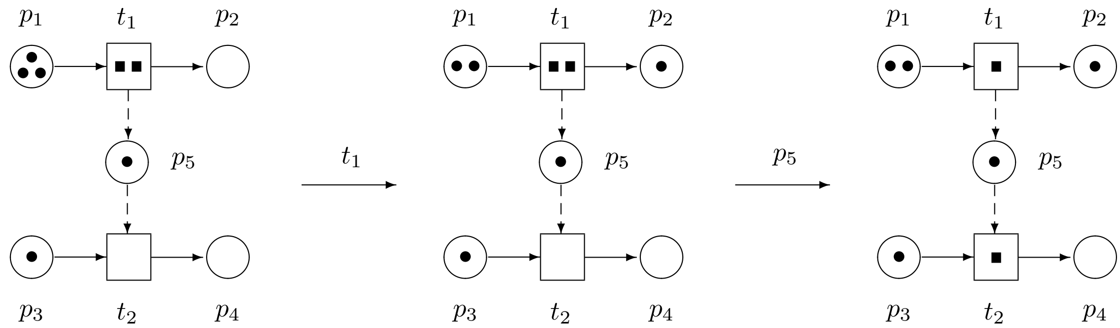

Рис. 2. Супер-двойственная сеть

Теорема 1. *[5] Класс супер-двойственных сетей совпадает с классом обыкновенных сетей Петри* [3].

3. Сети активных ресурсов

Определение 7. Сетью активных ресурсов (АР-сетью) *назовём набор $AR = (V, I, O)$, где*

- *V — конечное множество вершин (ресурсов);*
- *$I : V \times V \to Nat$ — множество потребляющих дуг;*
- *$O : V \times V \to Nat$ — множество производящих дуг.*

Графически вершины сети изображаются кружками, потребляющие дуги — пунктирными стрелками, производящие дуги — непрерывными стрелками.

Естественно вводятся следующие термины:

Пусть $i = (v_1, v_2)$ — потребляющая дуга. Тогда дуга i называется *входной* для вершины v_2 и *потребляющей* для вершины v_1. Ресурс в вершине v_1 — *потребляемый* по дуге i, ресурс в вершине v_2 — *потребляющий* по дуге i.

Пусть $o = (v_1, v_2)$ — производящая дуга. Тогда дуга o называется *выходной* для вершины v_1 и *производящей* для вершины v_2. Ресурс в вершине v_1 — *производящий* по дуге o, ресурс в вершине v_2 — *производимый* по дуге o.

Не бывает выходных потребляющих и входных производящих дуг. Один и тот же ресурс может быть одновременно производящим, потребляющим, производимым и потребляемым (по разным инцидентным дугам).

Определение 8. Размеченной сетью активных ресурсов *назовём пару (AR, M_0), где $AR = (V, I, O)$ — сеть активных ресурсов, $M_0 : V \to Nat$ — начальная разметка.*

На рисунках разметка изображается при помощи соответствующего количества фишек в вершинах.

Определение 9. *Ресурс $v \in V$* активен *при разметке M, если*

[3] Для любой супер-двойственной сети найдется эквивалентная ей сеть Петри, и наоборот (эквивалентность понимается в смысле равенства множеств достижимости).

- $M(v) > 0$ *(узел v непустой);*
- $\forall w \in V \quad M(w) \geq I(w,v)$ *(в потребляемых узлах содержится достаточное количество фишек).*

Активный при разметке M ресурс v может сработать*, порождая при этом новую разметку M', где* $\forall w \in V \quad M'(w) =_{def} M(v) - I(w,v) + O(v,w)$.

Таким образом, в срабатывании ресурса участвуют его входные и выходные дуги, в трансформации ресурса (изменении разметки соответствующей вершины) — потребляющие и производящие его дуги.

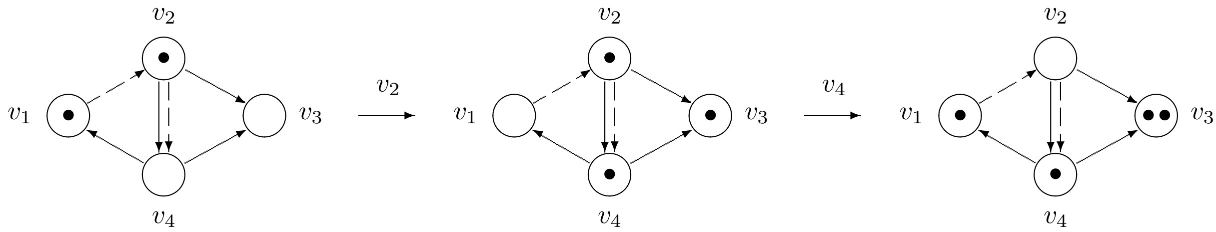

Рис. 3. Сеть активных ресурсов

Структура АР-сетей отличается от структуры сетей Петри. Сеть активных ресурсов — это два ориентированных псевдографа на общем множестве вершин, тогда как сеть Петри — это двудольный ориентированный псевдограф. При этом они определяют один и тот же класс систем:

Теорема 2. *Класс сетей активных ресурсов совпадает с классом обыкновенных сетей Петри.*

Доказательство. 1) Докажем, что для любой сети Петри существует эквивалентная АР-сеть.

Действительно, мы можем переделать сеть Петри в АР-сеть, преобразовав переходы и позиции в вершины, дуги от позиций к переходам — в потребляющие дуги, дуги от переходов к позициям — в производящие дуги и добавив в начальной разметке по одной фишке в каждую вершину, получившуюся из перехода. Пример такой трансформации приведен на рис. 4.

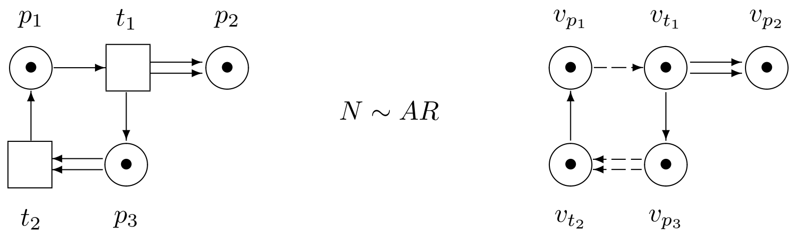

Рис. 4. Симулирование сети Петри АР-сетью

2) Докажем, что для любой АР-сети существует эквивалентная сеть Петри.

Здесь можно применить способ моделирования, аналогичный предложенному в [5] для моделирования супер-двойственной сети Петри при помощи обыкновенной сети Петри.

Каждой вершине v в АР-сети сопоставим позицию p_v и переход t_v в сети Петри, связанные парой разнонаправленных дуг (p_v, t_v) и (t_v, p_v). Каждой потребляющей дуге (v, w) сопоставим дугу (p_v, t_w), а каждой производящей дуге (v, w) — дугу (t_v, p_w). Фишки из вершины v перенесем в позицию p_v.

Пример такой трансформации приведен на рис. 5. □

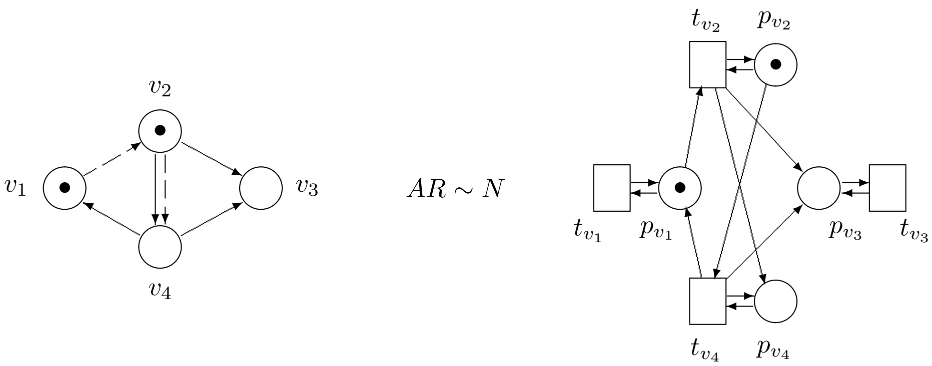

Рис. 5. Симулирование АР-сети сетью Петри

Факт, сформулированный в теореме, можно объяснить тем, что для АР-сетей выполняются все ключевые свойства сетей Петри, которые были перечислены во Введении. При этом от двудольности графа модели удалось избавиться без потери выразительности или разрешимости.

4. Сети с простым срабатыванием

Рассмотрим сети активных ресурсов, в которых срабатывание вершины не зависит от наличия в ней фишки:

Определение 10. *Ресурс $v \in V$* активен *при разметке M, если $\forall w \in V \quad M(w) \geq I(w, v)$.*

Активный при разметке M ресурс v может сработать, *порождая при этом новую разметку M', где $\forall w \in V \quad M'(w) =_{def} M(v) - I(w, v) + O(v, w)$.*

Теорема 3. *Класс сетей активных ресурсов с простым срабатыванием совпадает с классом обыкновенных сетей Петри.*

Доказательство. 1) Докажем, что для любой сети Петри существует эквивалентная АР-сеть с простым срабатыванием.

Аналогично первой части доказательства теоремы 1, за исключением начальной разметки: вершины, полученные из переходов, не размечаются.

2) Докажем, что для любой АР-сети с простым срабатыванием существует эквивалентная сеть Петри.

Аналогично второй части доказательства теоремы 1, за исключением дуг (p_v, t_v) и (t_v, p_v) — здесь они не добавляются. □

Таким образом, можно избавиться и от требования наличия фишки в активной вершине графа. Однако это упрощение не совсем удобно в практическом плане, так как интерпретация срабатывания "пустой" вершины неочевидна.

5. Сети с одновременным срабатыванием

Рассмотрим сети активных ресурсов, в которых срабатывание вершины зависит не только от наличия в ней фишек, но и от их количества:

Определение 11. *Ресурс $v \in V$* активен *при разметке M, если $\forall w \in V \quad M(w) \geq M(v) * I(w, v)$.*

Активный при разметке M ресурс v может сработать, *порождая при этом новую разметку M', где $\forall w \in V \quad M'(w) =_{def} M(v) - M(v) * I(w, v) + M(v) * O(v, w)$.*

В таких сетях за один шаг срабатывают сразу все фишки, содержащиеся в активной вершине. Усложнение правила срабатывания приводит к увеличению выразительности модели:

Теорема 4. *Класс сетей активных ресурсов с одновременным срабатыванием строго мощнее класса обыкновенных сетей Петри.*

Доказательство. 1) Докажем, что для любой сети Петри существует эквивалентная АР-сеть с одновременным срабатыванием.

Аналогично первой части доказательства теоремы 1.

2) Докажем, что существует АР-сеть с одновременным срабатыванием, для которой не может быть построена эквивалентная сеть Петри.

Известно, что средствами обыкновенных сетей Петри невозможно моделировать так называемые переносящие дуги [3]. Переносящая дуга — это срабатывание, за один шаг переносящее все фишки из одной позиции в другую (независимо от их количества). Перенос ресурсов в АР-сетях с одновременным срабатыванием может быть реализован при помощи конструкции, изображенной на рис. 6. Здесь одно срабатывание вершины v забирает K фишек из вершины v (то есть все, что там были) и переносит их в вершину w. □

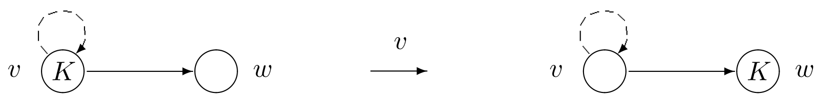

Рис. 6. Переносящая дуга

Еще одним косвенным признаком выхода формализма за рамки класса сетей Петри является то, что для сетей с одновременным срабатыванием не выполняется так называемое свойство монотонности [1], которое формулируется как $M \to M' \ \Rightarrow \ M+K \to M'+K$. Действительно, можно придумать ситуацию, когда добавление фишек в разметку АР-сети с одновременным срабатыванием приводит к тому, что какая-то активная вершина становится неактивной. В то же время в обыкновенных сетях Петри добавление ресурсов не может упростить поведение системы (заключительная часть третьего свойства сетей Петри из Введения).

Вопрос о том, каким образом АР-сети с одновременным срабатыванием соотносятся с машинами Тьюринга, остается открытым. Однако маловероятно, что эти классы эквивалентны: в АР-сетях с одновременным срабатыванием, по-видимому, всё ещё нет возможности выполнять нелокальные проверки состояния памяти (такие, как тест на ноль).

6. Заключение

В работе представлен новый способ моделирования систем — сети активных ресурсов. Они обладают достаточно простым и наглядным синтаксисом. Структура определения у АР-сети проще, чем у супердвойственной сети, и не сложнее, чем у обыкновенной сети Петри. По выразительной мощности класс АР-сетей совпадает с классом обыкновенных сетей Петри, то есть в нем разрешимы все те же проблемы, что и в сетях Петри: достижимость, ограниченность, живость и др. При этом в сетях активных ресурсов появляется возможность “двойного” использования ресурса (фишки) — не только в качестве пассивного ресурса, но ещё и в качестве активного агента. Это чисто синтаксическое расширение может оказаться полезным на практике при моделировании систем с динамической модификацией структуры действий (например, в системах адаптивного управления процессами).

Список литературы

1. Котов, В.Е. *Сети Петри* / В.Е. Котов. — М.: Наука, 1984.

2. Ломазова, И.А. *Вложенные сети Петри: моделирование и анализ распределенных систем с объектной структурой* / И.А. Ломазова. — М.: Научный мир, 2004.

3. Dufourd, C. *Reset nets between decidability and undecidability* / C. Dufourd, A. Finkel, Ph. Schnoebelen. // LNCS 1443. — Springer, 1998. — P.103–115.

4. Jensen, K. *Coloured Petri Nets: Basic Concepts, Analysis Methods and Practical Use* / K. Jensen. — Springer, 1994.

5. Kohler, M. *Super-Dual Nets* / M. Kohler, H. Rolke // Proc. of CS&P'2005. — Warsaw, 2005. — P.271–280.

Nets of active resources

Bashkin V.A.

In this work nets of active resources (AR-nets) are presented. This is a generalization of Petri nets (ordinary and Super-dual) with a single type of nodes and two types of arcs (consuming and producing). Each node may contain a number of tokens (resources), that can be consumed or produced by “firings” of other tokens (location of consumed/produced resources is defined by corresponding arcs). So, in this model the same token may be considered as a passive resource (produced or consumed by agents) and an active agent (producing or consuming resources) at the same time.

The expressive power of AR-nets and two modified models is studied. It is shown, that AR-nets and AR-nets with simple firing are equivalent to ordinary Petri nets. AR-nets with simultaneous firing are strictly more expressive.