

УДК 515.1

Род и категория Люстерника – Шнирельмана прообразов

Карасёв Р.Н.¹

Московский физико-технический институт

получена 22 сентября 2007

Аннотация

Вводится некоторое аксиоматическое обобщение понятия относительной категории Люстерника – Шнирельмана и для него доказывается оценка на категорию прообраза точки (или её окрестностей) при отображении в конечный полиэдр.

1. Формулировки результатов

Следующее определение выделяет некоторые общие свойства разных видов понятия категории в духе Люстерника – Шнирельмана [1].

Определение 1. Пусть X — топологическое пространство, а k — функция, определённая на непустых открытых подмножествах X , обладающая следующими свойствами:

- 1) если $U \subseteq V$, то $k(U) \leq k(V)$ (монотонность);
- 2) $k(U_1 \cup \dots \cup U_n) \leq k(U_1) + \dots + k(U_n)$ (субаддитивность);
- 3) $k(U_1 \cup \dots \cup U_n) \leq \max\{k(U_1), \dots, k(U_n)\}$, если замыкания $\text{cl } U_1, \dots, \text{cl } U_n$ попарно не пересекаются.

Такую функцию k будем называть *обобщённой относительной категорией*.

Ясно, что относительная категория Люстерника – Шнирельмана $\text{cat}_X U$ из [1] является обобщённой относительной категорией, если пространство X линейно связно. Есть и другие примеры обобщённой относительной категории.

Чтобы избежать возможных тонкостей с определениями категории, всюду далее топологические пространства будут предполагаться паракомпактными абсолютными окрестностными ретрактами. В этом случае в определении категории Люстерника – Шнирельмана можно открытые множества заменить на замкнутые.

Пусть G — конечная группа. Напомним определение.

Определение 2. Пусть Y — свободное G -пространство. Тогда минимальное k , для которого существует G -эквивариантное (перестановочное с действием G) отображение $Y \rightarrow G * \dots * G = G^{*k}$ (k -кратный джойн G с диагональным действием G сдвигами), называется *родом пространства* Y . Обозначение $k = g_G(Y)$.

Далее будет показано, что если Y — свободное G пространство, а $\pi : Y \rightarrow Y/G$ — естественная проекция, то функция $k(U) = g_G(\pi^{-1}(U))$ является обобщённой относительной категорией на $X = Y/G$.

Далее для когомологий фиксируем некоторое кольцо коэффициентов A .

Определение 3. Пусть X — топологическое пространство, $\iota : U \rightarrow X$ — естественное вложение подпространства. Тогда *относительной когомологической длиной* U назовём

$$\text{hl}_X U = \max\{k : \exists u_1, \dots, u_k \in H^*(X, A), \forall i \dim u_i > 0, \iota^*(u_1 u_2 \dots u_k) \neq 0\}.$$

Далее будет показано, что $\text{hl}_X U + 1$ является обобщённой относительной категорией. Также из доказываемого далее свойства субаддитивности длины следует, что $\text{cat}_X U \geq \text{hl}_X U + 1$. На самом деле для любой обобщённой относительной категории k , которая равна единице на стягиваемых по X подмножествах, верно, что $k(U) \leq \text{cat}_X U$.

Заметим также, что для всякого непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$ категория сужения отображения, определённая в [2], $f|_U$ является обобщённой относительной категорией. Также для всякого класса когомологий ξ (возможно обобщённых) категория сужения класса (определённая там же) $\xi|_U$ является обобщённой относительной категорией. Для некоторого расслоения $E \rightarrow X$ категория сечений (sectional category — обозначение работы [3] $\text{secat } E|_U$, определённая в [4], также является обобщённой относительной категорией.

¹Исследование выполнено при поддержке РФФИ, грант №06-01-00648.

Обзор разных обобщений понятия категории Люстерника – Шнирельмана содержится в [3]. Заметим, что разные варианты понятия *строгой категории* U , в которых, в отличие от обычной категории, требуется стягиваемость каждого множества покрытия по себе, не обладают требуемыми свойствами, в частности нарушается свойство 3. Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. Пусть X — пространство с обобщённой относительной категорией k . Пусть также $k(X) > n(d+1)$. Пусть есть непрерывное отображение $f : X \rightarrow K$ в конечный d -мерный полиэдр (геометрическую реализацию конечного симплициального комплекса) K . Тогда найдётся $c \in K$ такая, что $k(f^{-1}(U)) > n$ для любой окрестности $U \ni c$.

В этой теореме можно опустить условие конечности K , если X — компактно.

Если k является гомотопическим инвариантом и слой $f^{-1}(c)$ является ретрактом некоторой своей окрестности в X , то из теоремы следует, что $k(f^{-1}(c)) > n$. В частности, это выполнено для аналитических функций на вещественно-аналитическом многообразии X и приведённых выше примеров функций k .

Если функция $k(U)$ обладает свойством непрерывности (для всякого замкнутого $F \subseteq X$ для некоторой окрестности $U \supset F$ выполняется $k(F) \geq k(U)$), то из теоремы следует, что $k(f^{-1}(c)) > n$. Это выполняется, в частности, для рода G -действия и для некоторых случаев категории сечений и т. п.

Частный случай теоремы 1 для некоторого аналога рода Z_2 -действия доказан в [5] (Лемма 3.1), где из него выведено содержательное геометрическое следствие. Для другого аналога рода Z_p -пространств этот результат доказан в [6] (Лемма 9.1 и Следствие 9.1). Фактически в [6] содержится и идея доказательства теоремы 1 для кохомологической длины.

Близкий результат получен в работе [7], где отображение должно быть расслоением и в оценке $d+1$ заменено на категорию отображения. Сформулируем его для сравнения:

Теорема 2. Пусть $F \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{p} B$ — расслоение со связными B и F . Тогда $\text{cat } E \leq \text{cat } \iota \cdot \text{cat } p$.

2. Свойства рода G -действия

Напомним известные свойства рода. Это понятие было введено в [8, 9, 4]. Широкий обзор по разным понятиям рода и кохомологическим индексам G -действия можно найти в [6].

Лемма 1. Если существует эквивариантное отображение $X \rightarrow Y$ между двумя G -пространствами, то

$$g_G(X) \leq g_G(Y).$$

Следующее свойство сразу следует из $k-2$ -связности G^{*k} и теории препятствий.

Лемма 2. Для CW -комплекса X , являющегося свободным G -пространством, имеет место неравенство

$$g_G(X) \leq \dim X + 1.$$

Лемма 3. Для $n-1$ -связного свободного G -пространства X имеет место неравенство $g_G(X) \geq n+1$.

И следствие двух предыдущих лемм:

Лемма 4. Пусть G действует на сфере S^d свободно, тогда $g_G(S^d) = d+1$.

Пусть $\pi : Y \rightarrow Y/G$ — естественная проекция пространства со свободным действием G . Для величины $g_G(\pi^{-1}(U))$ свойства 1 и 3 обобщённой относительной категории выполняются очевидно.

Субаддитивность следует из того, что $g_G(\pi^{-1}(U))$ является частным случаем категории сечений (см. [4, 3]). Но мы докажем для этой величины свойство, которое сильнее, чем субаддитивность.

Теорема 3. Пусть свободное G -пространство Y покрыто открытыми инвариантными подпространствами $\{Y_i\}_{i=1}^l$. Тогда найдётся точка $x \in Y$ такая, что

$$\sum_{Y_i \ni x} g_G(Y_i) \geq g_G(Y).$$

Доказательство. Положим $g_G(Y_i) = k_i$, можно считать, что все эти числа конечны, так как в противном случае утверждение теоремы очевидно. Рассмотрим эквивариантные отображения $f_i : Y_i \rightarrow G^{*k_i}$, которые существуют по определению рода.

Рассмотрим также инвариантное разбиение единицы $\{\rho_i\}_{i=1}^l$, подчинённое покрытию $\{Y_i\}$. Тогда отображение

$$f : x \mapsto \rho_1(x)f_1(x) \oplus \cdots \oplus \rho_l(x)f_l(x)$$

даёт эквивариантное отображение Y в джойн $G^{*(k_1+\cdots+k_l)}$. При этом, если теорема неверна, то образ этого отображения лежит в $(g_G(Y) - 2)$ -мерном остове симплициального комплекса $G^{*(k_1+\cdots+k_l)}$, что противоречит монотонности рода и лемме 2. $\square$

Кроме того, эта теорема даёт известную из [8, 4] оценку $\text{cat } Y/G \geq g_G(Y)$, так как если $X = Y/G$ покрыто замкнутыми множествами $U_1, \dots, U_n$ и $\forall i \text{ cat}_X U_i = 0$, то прообразы $\pi^{-1}(U_i)$ будут иметь род 1, и тогда по теореме 3 будем иметь $g_G(Y) \leq n$.

3. Свойства кохомологической длины

Когомологическая длина — один из наиболее распространённых способов оценки категории Люстерника – Шнирельмана. Сформулируем нужную нам лемму из [10], которую также можно найти в [3].

Лемма 5. Пусть пространство X покрыто семейством открытых множеств $U_1, U_2, \dots, U_m$ и даны элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in H^*(X, A)$. Если для каждого $i = 1, \dots, m$ образ a_i в $H^*(U_i, A)$ нулевой, то произведение $a_1 a_2 \cdots a_m = 0$ в $H^*(X, A)$.

Из этой леммы сразу следует выполнение свойства 2 обобщённой относительной категории для числа $\text{hl}_X U$. Действительно, если некоторое произведение $N = \sum_{i=1}^n \text{hl}_X U_i + n$ классов положительной размерности $u_1, \dots, u_N \in H^*(X, A)$ не обращается в нуль на $\bigcup_{i=1}^n U_i$, то это произведение можно разбить на n отрезков длин $\text{hl}_X U_i + 1$ соответственно. По лемме 5, один из отрезков произведения не сможет обратиться в нуль на соответствующем U_i , что противоречит определению длины U_i .

Свойства 1 и 3 для кохомологической длины очевидны.

4. Лемма о покрытии

Лемма 6. У всякого конечного d -мерного полиэдра K существует открытое покрытие $\mathcal{U}$ сколь угодно малой мелкости, которое можно представить в виде объединения семейств

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{d+1} \mathcal{U}_i,$$

где каждое семейство $\mathcal{U}_i$ состоит из множеств с попарно непересекающимися замыканиями.

Доказательство. Рассмотрим достаточно мелкое разбиение K . Далее возьмём барицентрическое подразделение K' этого комплекса — его вершины соответствуют симплексам исходного, значит, размерности исходных симплексов дают правильную раскраску вершин комплекса K' в $d + 1$ цвет. Здесь правильная раскраска — это раскраска, при которой вершины любого симплекса раскрашены в попарно различные цвета.

Теперь двойственное к K' клеточное разбиение K , образованное звёздами вершин K' в следующем барицентрическом подразделении K'' , даёт нам как раз покрытие K мелкими замкнутыми множествами, разбитыми на $d + 1$ группу так, что множества из одной группы не пересекаются.

Далее от замкнутого покрытия можно перейти и к открытому. $\square$

5. Доказательство теоремы 1

По лемме 6 покроем K достаточно мелким покрытием $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{d+1}$, разбитым на $d + 1$ дизъюнктное покрытие. Обозначим $V_i \in \mathcal{U}_i$.

По свойству 2 обобщённой относительной категории для некоторого i $k(f^{-1}(V_i)) > n$. По свойству 3 найдётся мелкое множество $V \in \mathcal{U}_i$, для которого $k(f^{-1}(V)) > n$.

Рассматривая все более мелкие разбиения, мы будем находить все более мелкие множества V , по соображениям компактности можно считать, что все они стремятся к некоторой точке $c \in K$. Покажем, что c является нужной точкой от противного. Если найдётся окрестность $U \ni c$, для которой $k(f^{-1}(U)) \leq n$, то для достаточно мелкого покрытия будет $V \subseteq U$, значит, получаем противоречие со свойством 1.

6. Некоторые следствия

Сформулируем некоторые следствия из теоремы 1. На самом деле эти следствия вытекают уже из версии теоремы 1, известной Янгу [5].

Следствие 1 (Обобщение теоремы Борсука — Улама). Пусть даны натуральные числа k, l, n , причём $k(l+1) \leq n$. Тогда для любых l непрерывных чётных функций на сфере S^n ($f_1, \dots, f_l$) найдутся такие числа $(c_1, \dots, c_l)$, что для любых k непрерывных нечётных функций ($g_1, \dots, g_k$) система

$$\begin{aligned} f_1(x) &= c_1, \quad f_2(x) = c_2, \dots, f_l(x) = c_l \\ g_1(x) &= 0, \quad g_2(x) = 0, \dots, g_k(x) = 0 \end{aligned}$$

имеет решение.

Доказательство. По лемме 4, Z_2 -род S^n при действии $x \mapsto -x$ равен $n+1$. Применим теорему 1 к отображению $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^l$, задаваемому функциями $(f_1, \dots, f_l)$. Тогда мы найдём такой набор $(c_1, \dots, c_l)$, что подмножество S^n (см. комментарий после теоремы 1)

$$Y = \{x \in S^n : f_1(x) = c_1, f_2(x) = c_2, \dots, f_l(x) = c_l\}$$

имеет род не менее k . Аналогично доказательству обычной теоремы Борсука — Улама, из леммы 4 и свойства монотонности рода следует, что любой набор нечётных функций $(g_1, \dots, g_k)$ имеет нуль на Y , что и требовалось доказать. $\square$

Можно также сформулировать следствие из этого обобщения теоремы Борсука-Улама, которое получается, если функции $(g_1, \dots, g_k)$ брать линейными.

Следствие 2. Пусть даны натуральные числа k, l, n , причём $k(l+1) \leq n$. Тогда для любых l непрерывных чётных функций $(f_1, \dots, f_l)$ на сфере $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ найдутся такие числа $(c_1, \dots, c_l)$, что множество

$$Y = \{x \in S^n : f_1(x) = c_1, f_2(x) = c_2, \dots, f_l(x) = c_l\}$$

пересекается с любым линейным подпространством $\mathbb{R}^{n+1}$ размерности $n+1-k$.

Список литературы

1. Lusternik L.A., Schnirelmann L.G. Méthodes topologiques dans le problèmes variationnels. — Paris: Hermann, 1934.
2. Bernstein I., Ganea T. The category of a map and of a cohomology class // Fundam. Math. — 1961. — 50. — P. 265–279.
3. James I.M. On category, in the sense of Lusternik – Schnirelmann // Topology. — 1978. — 17. — P. 331–348.
4. Schwarz A.S. The genus of a fibre space // Amer. Math. Soc. Transl. — 1966. — 55. — P. 49–140.
5. Yang C.-T. On Theorems of Borsuk – Ulam, Kakutani – Yamabe – Yujobo and Dyson, II // The Annals of Mathematics. — 1955. — 2nd Ser. — 62(2). — P. 271–283.
6. Воловиков А.Ю. Точки совпадения отображений $\mathbb{Z}_p^n$ -пространств // Изв. РАН.: Сер. матем. — 2005. — 69(5) — С. 53–106.
7. Varadarajan K. On fibrations and category // Mathematische Zeitschrift. — 1965. — 88. — P. 267–273.
8. Krasnosel'skii M.A. On special coverings of a finite-dimensional sphere // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1955. — 103. — P. 961–964.
9. Yang C.-T. Continuous Functions From Spheres to Euclidean Spaces // The Annals of Mathematics. — 1955. — 2nd Ser. — 62(2). — P. 284–292.
10. Froloff S., Elsholz L. Limite inférieure pour le nombre des valeurs critiques d'une fonction, donné sur une variété // Math. Sbornik. — 1935. — 42(5). — P. 637–643.

Genus and the Lyusternik-Snirelmann category of preimages

Karasev R.N.

In this paper some axiomatic generalization (function of open subsets) of the relative Lyusternik – Snirelmann category is considered. For this function and a given map of the underlying space to a finite polyhedron some lower bounds on the value of this function on the preimage of some point are given.