Модел. и анализ информ. систем. Т.**14**, №**4** (2007) 53–56

УДК 512.552.4+519.115.1

О нижней оценке количества $k+1$-неразбиваемых перестановок

Челноков Г.Р. [1]

Ярославский государственный университет,
150 000, Ярославль, Советская, 14

получена 29 сентября 2007

Аннотация

Перестановку $\tau : [1;n] \to [1;n]$ назовем $k+1$-*неразбиваемой*, если для любого набора $a_1, \ldots, a_i \in [1;n]$ из условий $a_1 < a_2 < \cdots < a_i$ и $\tau(a_1) < \tau(a_2) < \cdots < \tau(a_i)$ следует $i \le k$. Число $k+1$-неразбиваемых перестановок на n элементах обозначим через $f(n,k)$. В работе доказано, что для $f(n,k)$ верна асимптотическая оценка $f(n,k) = k^{2n-o(n)}$, равномерная по всем $k \le K(n) = o(\sqrt[3]{n}\ln n)$.

1. Постановка задачи

Определение 1. Перестановку $\tau : [1;n] \to [1;n]$ назовем $k+1$-*неразбиваемой*, если для любого набора $a_1, \ldots, a_i \in [1;n]$ из условий $a_1 < a_2 < \cdots < a_i$ и $\tau(a_1) < \tau(a_2) < \cdots < \tau(a_i)$ следует $i \le k$. Число $k+1$-неразбиваемых перестановок на n элементах обозначим через $f(n,k)$.

Другими словами, в $k+1$-неразбиваемой перестановке нельзя выбрать больше k элементов, идущих в порядке возрастания, образы которых тоже идут в порядке возрастания.

Понятие k-разбиваемости было введено в [1], в связи с PI-алгебрами, для оценки размерности через высоту. В [2] была получена верхняя оценка $f(n,k) < k^{2n}$, которая позволила получить комбинаторное доказательство теоремы Регева. В данной заметке для функции $f(n,k)$ доказывается нижняя оценка $f(n,k) = k^{2n-o(n)}$, таким образом, оценка является асимптотически точной.

Теорема 1. *Для функции $f(n,k)$ верна асимптотическая оценка $f(n,k) = k^{2n-o(n)}$, причем стремление равномерно по всем $k \le K(n)$ и зависит лишь от выбора функции $K(n)$ такой, что $K(n) = o(\sqrt[3]{n}/\ln n)$.*

2. Предварительные замечания

Сформулируем вспомогательные утверждения из [2] в более удобных для нас терминах. Для перестановки $\tau : [1;n] \to [1;n]$ числа $\{1, 2, \ldots, n\}$ назовём *номерами*, а числа $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$ — *элементами.*

Окраской (f,g) перестановки τ называется пара таких функций $f : [1;n] \to \mathbb{N}$ и $g : [1;n] \to \mathbb{N}$, что $g(\tau(i)) = f(i)$, и f удовлетворяет условию

(i) если $f(i) = m$, то для всех $j, i,\ j < i, (f(j) \ne m) \vee (\tau(j) > \tau(i))$.

Каждое значение функции f будем называть *цветом*, функцию f будем называть *окраской номеров* а функцию g — *окраской элементов.*

Пару функций (f,g) будем называть *жадной окраской перестановки*, если функция f удовлетворяет условию

(ii) $\forall m \in \mathbb{N} \quad m < f(i) \quad \exists j, i$ такие, что $i > j,\ f(j) = m$ и $\tau(j) < \tau(i)$

Другими словами, мы так по очереди красим элементы перестановки, что одинаково окрашенные элементы убывают, и каждый раз используем цвет с наименьшим номером, не противоречащий условию.

Легко видеть, что жадная окраска перестановки однозначно определяется перестановкой. Поэтому будем говорить, что пара функций (f,g) соответствует перестановке. Если жадная окраска перестановки (f,g), соответствует некоторой $k+1$-неразбиваемой перестановке, будем называть её *хорошей.*

Лемма 1. *Перестановка τ является $k+1$-неразбиваемой тогда и только тогда, когда f использует не больше k цветов.*

Лемма 2. *Пара функций f и g соответствует не более чем одной перестановке.*

Доказательства лемм 1, 2 см. в [2].

[1]Исследование выполнено при поддержке РФФИ, грант №06-01-00648.

Лемма 3. *Окраска (f, g) перестановки τ не является жадной, тогда и только тогда существуют $i, j \in [1; n]$, такие, что $i > j$, $f(i) = a$, $f(j) = a - 1$ и $\tau(j) > \tau(i)$, и j — наибольший номер, меньший i, для которого значение f есть $a - 1$.*

Доказательство сразу следует из определения жадной окраски.

Приведём общий план доказательства. Положим $D = \frac{k(k-1)}{2} c\sqrt{n/k} \ln n$. Основная идея доказательства такая: 1)специальным образом окрасим первые D номеров; 2) рассмотрим произвольную окраску остальных $n-D$ номеров и произвольную же окраску $n-2D$ элементов (кроме $2D$ наименьших); 3) докажем, что с вероятностью больше нуля существует такой способ окрасить оставшиеся $2D$ элементов, что полученная пара окрасок будет хорошей.

Для этого на множестве отображений $[1; n] \to [1; k]$ введём естественную меру. Тогда лемма 4 является стандартным фактом о сумме независимых случайных величин. Лемма 5 описывает все случаи, когда для пары функций (f, g) не существует перестановки, окраской которой они являются. В лемме 7 доказывается, что при подходящем выборе константы c вероятность этого события $< \varepsilon$. В лемме 3 описаны все случаи, когда для пары функций (f, g) перестановка существует, но (f, g) не является жадной окраской этой перестановки. После чего в лемме 8 доказывается, что при подходящем выборе константы c вероятность этого события меньше ε, что завершает доказательство теоремы 1.

3. Доказательство теоремы 1

Лемма 4. *Предположим, что $K(n) = o(\sqrt[3]{n})$, $\varepsilon > 0$, $l, n, k \in \mathbb{N}$ и $k \le K(n)$. Пусть $f_1, \ldots, f_l, l \le n$ такие независимые одинаково распределенные случайные величины, что с вероятностью $1/k$ эти величины имеют значение 1, иначе 0. Тогда существует такая константа c, что вероятность того, что при некотором $m \le n$, выполняется неравенство $|f_1 + f_2 + \cdots + f_m - m/k| > c\sqrt{n/k} \ln n$, меньше $\frac{\varepsilon}{k}$.*

Эта лемма является несложным следствием центральной предельной теоремы (см. [3]).

Для набора случайных величин $f_1, \ldots, f_l$, удовлетворяющего условию леммы 4, набор значений, при котором нашлось m такое, что $|f_1 + f_2 + \cdots + f_m - m/k| > c\sqrt{n/k} \ln n$, будем называть *c-плохим.*

Зафиксируем некоторую константу $c > 0$. Окрасим первые $(k-1)c\sqrt{n/k} \ln n$ номеров в первый цвет, следующие $(k-2)c\sqrt{n/k} \ln n$ номеров окрасим во второй цвет, и так далее. Таким образом, из отрезка номеров выброшено $\frac{k(k-1)}{2} c\sqrt{n/k} \ln n = o(n)$ номеров.

Определим вероятностное пространство на множестве пар функций (f', g'), где $f' : [D+1; n] \to [1; k]$ и $g' : [2D+1; n] \to [1; k]$ (окраской первых D элементов мы уже определили продолжение функции f' до f, продолжение g' до g будет построено ниже): все значения $f'(i)$ функции f' при любом $i \in [D+1; n]$ и все значения $g'(i)$ функции g' при любом $i \in [2D+1; n]$ считаем равновероятными и независимыми в совокупности. Иными словами, все пары функций (f', g') считаем равновероятными.

Лемма 5. *Перестановка, окраска номеров которой есть функция f и окраска элементов которой есть продолжение функции g', существует, если $|\{i : g'(i) = a\}| \le |\{i : f(i) = a\}|$ для всех $a \in [1; k]$.*

Доказательство. Неформально говоря, лемма утверждает, что перестановку с данными f и g' можно построить всегда, когда в каждый цвет покрашено не больше элементов, чем есть номеров этого цвета.

Приведем алгоритм, строящий эту перестановку и продолжение g' до g. Сначала для каждого цвета расставим элементы этого цвета по номерам этого цвета в порядке убывания. Если номеров какого-то цвета больше, чем элементов этого цвета, то последние номера пока оставим незаполненными. Если для какого-то цвета элементов больше, чем номеров, то получаем противоречие с условием леммы.

Элементы из $[1; 2D]$ пока не окрашены. Расставим их: ставим элементы в порядке возрастания на номера в порядке возрастания цвета, внутри одного цвета — в порядке убывания номера. Естественно, элемент при этом красится в цвет номера, на который попадает. Очевидно, что для полученной перестановки пара (f, g) является окраской. □

Определение 2. Номера из $[1; D]$, а также элементы, образами которых являются эти номера, назовём *предрегулярными*, элементы из $[1; 2D]$, а также номера, образами которых являются эти элементы, назовём *пострегулярными*. Элементы и номера, не являющиеся ни предрегулярными, ни пострегулярными, назовём *регулярными*.

При произвольном $i \in [1; k]$ рассмотрим следующие последовательности случайных величин $f_1^i, \ldots f_{n-D}^i$: $f_j^i = 1$, если $f(j + D) = i$, и $f_j^i = 0$ в противном случае и $g_1^i, \ldots g_{n-2D}^i$: $g_j^i = 1$, если $g(n + 1 - j) = i$, и $g_j^i = 0$ в противном случае.

Лемма 6. *Последовательности $f_1^i, \dots f_{n-D}^i$ и $g_1^i, \dots g_{n-2D}^i$ удовлетворяют условию леммы 4.*

Доказательство сразу следует из определения этих последовательностей.

Лемма 7. *При всех $\varepsilon > 0$ существует такое $c > 0$, что вероятность того, что пара $(f'; g')$, где $f', g' : [D+1; n] \to [1, k]$ не продолжается до окраски (f, g) некоторой перестановки $\leq 2\varepsilon$.*

Доказательство. Продолжим f', как указывалось выше. Пусть g' нельзя продолжить до пары $(f; g)$, являющейся окраской. Тогда по лемме 5 нашелся цвет i, для которого номеров этого цвета больше, чем элементов этого цвета. Заметим, что если последовательности f^i и g^i не являются c-плохими, то элементов цвета i не больше $1/k(n-2D) + c\sqrt{n/k}\ln n$, а номеров цвета i не меньше $1/k(n-D) - c\sqrt{n/k}\ln n$, что противоречит тому, что номеров цвета i меньше. Итак, если перестановка не существует, то одна из последовательностей f^i или g^i при $i \in [1; k]$ является c-плохой, суммарная вероятность этих $2k$ событий не больше 2ε. □

Лемма 8. *При любом $\varepsilon > 0$ существует такое $c > 0$, что вероятность того, что пара (f, g) не является жадной окраской для построенной по алгоритму леммы 5 перестановки, не превосходит 2ε.*

По лемме 3 существуют такие $i, j \in [1; n]$, $i > j$, что $f(i) = a$, $f(j) = a - 1$, и $\tau(j) > \tau(i)$, и j — наибольший номер, меньший i, для которого значение f есть $a-1$. Ясно, что номера i и j — регулярные.

Докажем, что одна из 4 последовательностей f^a, f^{a-1}, g^a, g^{a-1} является $c/4$-плохой.

Пусть $x = |\{l : l \in [1; j] \quad f(l) = a - 1\}|$ и $y = |\{l : l \in [1; i] \quad f(l) = a\}|$. Тогда

$$x = (k-a)c\sqrt{n/k}\ln n + f_1^{a-1} + f_2^{a-1} + \dots + f_{j-D}^{a-1}, \quad y = (k-1-a)c\sqrt{n/k}\ln n + f_1^a + f_2^a + \dots + f_{i-D}^a$$

Так как j — наибольший номер, меньший i, для которого значение f есть $a-1$, то имеем $f_{j+1-D}^{a-1} = f_{j+2-D}^{a-1} = \dots = f_{i-D}^{a-1} = 0$. Следовательно, $x = (k-a)c\sqrt{n/k}\ln n + f_1^{a-1} + f_2^{a-1} + \dots + f_{i-D}^{a-1}$.

Если f^a и f^{a-1} не являются $c/4$-плохими, то $x - y > \frac{1}{2}c\sqrt{n/k}\ln n$.

С другой стороны, так как число элементов $a-1$ цвета, не меньших $\tau(j)$, равно числу номеров $a-1$ цвета, не больших j, то

$$a = g_1^{a-1} + g_2^{a-1} + \dots + g_{n+1-\tau(j)}^{a-1} \leq g_1^{a-1} + g_2^{a-1} + \dots + g_{n+1-\tau(i)}^{a-1}.$$

Последнее неравенство, верно так как $\tau(j) > \tau(i)$. Аналогично, $b = g_1^a + g_2^a + \dots + g_{n+1-\tau(i)}^a$. Если g^a и g^{a-1} не являются $c/4$-плохими, то имеем $x - y < \frac{1}{2}c\sqrt{n/k}\ln n$ — противоречие. Следовательно, одна из 4 последовательностей f^a, f^{a-1}, g^a, g^{a-1} является $c/4$-плохой.□

Доказательство теоремы 1. Пусть $4\varepsilon < 1$. По лемме 4, существует такое c, что последовательность, удовлетворяющая условию леммы 8, является $c/4$-плохой с вероятностью меньше $\frac{\varepsilon}{k}$. Тогда получим, что пара функций достраивается до пары (f, g) с вероятностью больше нуля. Теорема доказана. □

Список литературы

1. Ширшов А.И. О кольцах с тождественными соотношениями / А.И. Ширшов // Мат. сб. — 1957. — Т.43, №2. — С. 277-283.

2. Латышев В.Н. К теореме Регева о тождествах тензорного произведения PI-алгебр / В.Н. Латышев // УМН. — 1972. — 27:4(166). — С. 213-214.

3. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и её приложения / В. Феллер. — М.: Мир, 1984.

On the lower estimate for $k+1$-nondecomposible permutations

Chelnokov G.R.

A permutation τ is called$k+1$-*nondecomposible* if the following condition holds: if $\{a_1, \ldots, a_i n\}$ is a set of natural numbers such that $1 \leq a_1, < \ldots, < a_i \leq n$ and $\tau(a_1) < \tau(a_2) < \cdots < \tau(a_i)$, then $i \leq k$.

By $f(n, k)$ denote the number of all not $k+1$-nondecomposible permutations.

The following statement was proved in this paper: suppose $K(n) = o(\sqrt[3]{n}/\ln n)$; then $f(n, k) = k^{2n - o(n)}$ for every $k \leq K(n)$.