*Модел. и анализ информ. систем.* Т. **21**, № **2** (2014) 50–55


УДК 512.543

# Некоторые аппроксимационные свойства групп конечного ранга

Азаров Д. Н.[1]

*Ивановский государственный университет*
*153025 Россия, г. Иваново, ул. Ермака, 39*

*e-mail: azarovdn@mail.ru*

*получена 8 февраля 2014*

**Ключевые слова:** группа конечного ранга, аппроксимируемость конечными $p$-группами.

Получено обобщение одной классической теоремы К. Сексенбаева о полициклических группах. Сексенбаев доказал, что если полициклическая группа $G$ аппроксимируема конечными $p$-группами для бесконечного множества простых чисел $p$, то она нильпотентна. Напомним, что группа $G$ называется аппроксимируемой конечными $p$-группами, если для любого неединичного элемента $a$ группы $G$ существует гомоморфизм группы $G$ на некоторую конечную $p$-группу, при котором образ элемента $a$ отличен от 1. Одним из обобщений понятия полициклической группы является понятие группы конечного ранга. Напомним, что группа $G$ называется группой конечного ранга, если существует целое положительное число $r$ такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы $G$ порождается не более чем $r$ элементами. Доказано следующее обобщение теоремы Сексенбаева: если группа $G$ конечного ранга аппроксимируема конечными $p$-группами для бесконечного множества простых чисел $p$, то она нильпотентна. Более того, доказано, что если для каждого множества $\pi$, состоящего из почти всех простых чисел, группа $G$ конечного ранга аппроксимируема конечными нильпотентными $\pi$-группами, то она нильпотентна. Для нильпотентной группы конечного ранга получено необходимое и достаточное условие аппроксимируемости конечными $\pi$-группами, где $\pi$ — множество простых чисел.

## Введение

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Напомним, что группа $G$ называется аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента $a$ группы $G$ существует гомоморфизм группы $G$ на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образ элемента $a$ отличен от 1.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России по государственному заданию.

Если $\mathcal{F}$ обозначает класс всех конечных групп, то понятие $\mathcal{F}$-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также более тонкое свойство $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости, где $\pi$ — некоторое множество простых чисел, $\mathcal{F}_\pi$ — класс всех конечных $\pi$-групп. Если множество $\pi$ состоит из одного простого числа $p$, то множество $\mathcal{F}_\pi$ совпадает с множеством $\mathcal{F}_p$ всех конечных $p$-групп.

Еще более тонким свойством является $\pi$-примарная аппроксимируемость, т. е. аппроксимируемость классом $\mathcal{K} = \bigcup_{p\in\pi} \mathcal{F}_p$. Это свойство равносильно аппроксимируемости конечными нильпотентными $\pi$-группами. Если множество $\pi$ состоит из одного простого числа $p$, то понятие $\pi$-примарной аппроксимируемости совпадает с понятием $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости.

Группа $G$ называется группой конечного ранга (или, в другой терминологии, группой конечного ранга Прюфера), если существует целое положительное число $r$ такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы $G$ порождается не более чем $r$ элементами. Наименьшее такое $r$ называется рангом группы $G$ и обозначается через $r(G)$. Понятие группы конечного ранга введено А. И. Мальцевым в работе [1]. Простейшим примером группы конечного ранга является произвольная полициклическая группа.

Лубоцкий и Манн [2] доказали, что финитно аппроксимируемая группа конечного ранга содержит локально разрешимую подгруппу конечного индекса.

В связи с этой важной и глубокой теоремой мы докажем здесь следующий результат.

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — группа конечного ранга. Если для каждого множества $\pi$, состоящего из почти всех простых чисел, группа $G$ $\pi$-примарно аппроксимируема, то она нильпотентна. В частности, если группа $G$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа $p$ из некоторого бесконечного множества простых чисел, то она нильпотентна.*

Второе утверждение этой теоремы является частным случаем первого утверждения. Действительно, предположим, что группа $G$ конечного ранга $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа $p$ из некоторого бесконечного множества $\pi_0$ простых чисел. Так как множество $\pi_0$ бесконечно, то каждое множество $\pi$, состоящее из почти всех простых чисел, содержит в себе число $p$ из $\pi_0$, т. е. такое $p$, для которого группа $G$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Следовательно, группа $G$ $\pi$-примарно аппроксимируема для каждого множества $\pi$, состоящего из почти всех простых чисел, и поэтому она нильпотентна в силу первого утверждения теоремы 1.

В качестве следствия из теоремы 1 отметим следующий результат Сексенбаева [3].

*Если полициклическая группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа $p$ из некоторого бесконечного множества простых чисел, то она нильпотентна.*

Д. Робинсоном были получены обобщения теоремы Сексенбаева на некоторые классы разрешимых групп [4].

В связи с теоремой 1 заметим, что вопрос об $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости нильпотентной группы конечного ранга решается следующей почти очевидной теоремой.

**Теорема 2.** *Пусть группа $G$ является нильпотентной группой конечного ранга, или произвольной абелевой группой (без ограничения на ранг). И пусть $\pi$ — произвольное множество простых чисел. Группа $G$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит $\pi$-полных элементов отличных от 1.*

Элемент $a$ группы $G$ мы называем $\pi$-полным, если для любого целого положительного $\pi$-числа $n$ уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе $G$. Если множество $\pi$ совпадает с множеством всех простых чисел, то понятие $\pi$-полного элемента совпадает с классическим понятием полного элемента.

Связь финитной аппроксимируемости с полнотой элементов впервые была обнаружена еще А. И. Мальцевым в [5], где он заметил, что в финитно аппроксимируемой группе нет полных элементов отличных от 1 и что абелева группа финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда в ней нет полных элементов отличных от 1. Эта теорема не может быть распространена на нильпотентные группы. Соответствующий пример был подсказан автору А.Л. Шмелькиным и представляет собой обобщенное прямое произведение бесконечного числа экземпляров группы кватернионов с объединенными центрами. Тем не менее, как показывает теорема 2, для нильпотентных групп конечного ранга аналог теоремы Мальцева уже имеет место.

# 1. Доказательство теоремы 1

Говорят, что группа $G$ имеет конечный ранг Гирша, если в ней существует конечный субнормальный ряд, каждый фактор которого является циклической группой или периодической группой. Число бесконечных циклических факторов такого ряда не зависит от выбора этого ряда. Оно называется рангом Гирша группы $G$ и обозначается через $h(G)$. Для групп конечного ранга Гирша имеет место следующее очевидное правило сложения рангов: если $H$ — нормальная подгруппа группы $G$, то $h(G) = h(H) + h(G/H)$. Для ранга Прюфера это правило уже не выполняется, но если $H$ — подгруппа группы $G$, имеющей конечный ранг, то $r(H) \leq r(G)$, и если $F$ — гомоморфный образ группы $G$, то $r(F) \leq r(G)$. Если $A$ — элементарная абелева $p$-группа порадка $p^k$, т.е. если $A$ — прямое произведение $k$ экземпляров группы простого порядка $p$, то легко видеть, что $r(A) = k$. Хорошо известно, что любая конечно порожденная нильпотентная группа является полициклической и поэтому она имеет конечный ранг Гирша и конечный ранг Прюфера.

**Лемма 1.** *Пусть $G$ — конечно порожденная нильпотентная группа. Тогда $h(G) \leq r(G)$.*

*Доказательство.* Мы можем считать, что $h(G) > 0$. В этом случае из элементарных свойств конечно порожденных нильпотентных групп следует, что группа $G$ содержит бесконечную циклическую центральную подгруппу $C$. Пусть $p$ — простое число. Очевидно, что $h(G/C^p) = h(G)-1$, $C/C^p$ — центральная подгруппа порядка $p$ группы $G/C^p$, и если $T$ — центральная элементарная абелева подгруппа порядка $p^k$ группы $G$, то $CT/C^p$ — центральная элементарная абелева подгруппа порядка $p^{k+1}$

группы $G/C^p$. Поэтому индукцией по $h(G)$ легко проверить, что некоторый гомоморфный образ $F$ группы $G$ содержит элементарную абелеву подгруппу $A$ порядка $p^{h(G)}$, и тогда $h(G) = r(A) \leq r(F) \leq r(G)$. Лемма доказана.

Далее, как и обычно, через

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \dots$$

будем обозначать нижний центральный ряд группы $G$.

**Лемма 2.** *Пусть $G$ — конечно порожденная группа конечного ранга $r$. Тогда для некоторого числа $k \leq r+1$ фактор $\gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)$ конечен.*

*Доказательство.* Допустим противное. Тогда первые $r+1$ факторов нижнего центрального ряда группы $G$ являются бесконечными конечно порожденными абелевыми группами. Поэтому ранг Гирша каждого из этих факторов больше 0, и, следовательно, $h(G/\gamma_{r+2}(G)) \geq r+1$. С другой стороны, по лемме 1 $h(G/\gamma_{r+2}(G)) \leq r(G/\gamma_{r+2}(G)) \leq r$. Это противоречие доказывает лемму.

**Лемма 3.** *Пусть для каждого множества $\pi$, состоящего из почти всех простых чисел, группа $G$ $\pi$-примарно аппроксимируема. Если для некоторого целого положительного числа $k$ фактор $\gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)$ конечен, то $\gamma_k(G) = 1$.*

*Доказательство.* Обозначим через $\pi$ множество всех простых чисел, не делящих порядок фактора $\gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)$. Тогда при любом гомоморфизме $\varphi$ группы $G$ на конечную $\pi$-группу $F$ выполняется равенство $\gamma_k(G)\varphi = \gamma_{k+1}(G)\varphi$, т.е. $\gamma_k(F) = \gamma_{k+1}(F)$. Если дополнительно предположить, что группа $F$ нильпотентна, то последнее равенство означает, что $\gamma_k(F) = 1$, т.е. $\gamma_k(G)\varphi = 1$. Таким образом, при любом гомоморфизме $\varphi$ группы $G$ на конечную нильпотентную $\pi$-группу $\gamma_k(G)\varphi = 1$. Отсюда и из того, что группа $G$ $\pi$-примарно аппроксимируема, следует равенство $\gamma_k(G) = 1$. Лемма доказана.

**Лемма 4.** *Пусть $G$ — группа конечного ранга $r$. И пусть для каждого множества $\pi$, состоящего из почти всех простых чисел, группа $G$ $\pi$-примарно аппроксимируема. Тогда $\gamma_{r+1}(G) = 1$.*

*Доказательство.* Достаточно проверить, что для любой конечно порожденной подгруппы $H$ группы $G$ выполняется равенство $\gamma_{r+1}(H) = 1$. Так как $H$ — конечно порожденная группа конечного ранга, не превосходящего $r$, то по лемме 2 для некоторого числа $k \leq r+1$ фактор $\gamma_k(H)/\gamma_{k+1}(H)$ конечен. Отсюда и из того, что для каждого множества $\pi$, состоящего из почти всех простых чисел, группа $H$ $\pi$-примарно аппроксимируема, по лемме 3 следует, что $\gamma_k(H) = 1$, а так как $k \leq r+1$, то и $\gamma_{r+1}(H) = 1$. Лемма доказана.

Справедливость теоремы 1 обеспечивается леммой 4.

## 2. Доказательство теоремы 2

Пусть $\pi$ — непустое множество простых чисел.

**Лемма 5.** *Если группа $G$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то она не содержит $\pi$-полных элементов отличных от единицы.*

*Доказательство.* Пусть $g$ — $\pi$-полный элемент $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группы $G$. И пусть $\varphi$ — произвольный гомоморфизм группы $G$ на конечную $\pi$-группу. Так как в конечной $\pi$-группе, очевидно, нет $\pi$-полных элементов отличных от 1, а элемент $g\varphi$ наследует $\pi$-полноту от элемента $g$, то $g\varphi = 1$. Отсюда и из $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы $G$ следует, что $g = 1$. Лемма доказана.

**Лемма 6.** *Если абелева группа $G$ не содержит $\pi$-полных элементов отличных от 1, то она $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.*

*Доказательство.* Пусть абелева группа $G$ не содержит $\pi$-полных элементов отличных от 1. И пусть $g$ — неединичный элемент группы $G$. Тогда для некоторого целого положительного $\pi$-числа $n$ уравнение $x^n = g$ не разрешимо в группе $G$. Поэтому элемент $g$ не принадлежит степенной подгруппе $N = G^n$, то есть элемент $gN$ фактор-группы $G/N$ отличен от единицы. Так как группа $G/N$ является абелевой $\pi$-группой с ограниченными порядками элементов, то по первой теореме Прюфера группа $G/N$ раскладывается в прямое произведение циклических $\pi$-групп и поэтому является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группой. Отсюда и из того, что $gN$ — неединичный элемент группы $G/N$ следует, что существует гомоморфизм $\sigma$ группы $G/N$ на конечную $\pi$-группу такой, что $(gN)\sigma \neq 1$. Тогда произведение естественного гомоморфизма $G \to G/N$ и гомоморфизма $\sigma$ отображает элемент $g$ в неединичный элемент некоторой конечной $\pi$-группы. Поэтому группа $G$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Лемма доказана.

**Лемма 7.** *Если нильпотентная группа $G$ конечного ранга не содержит $\pi$-полных элементов отличных от 1, то она $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.*

*Доказательство.* Пусть нильпотентная группа $G$ конечного ранга не содержит $\pi$-полных элементов отличных от 1. И пусть $g$ — неединичный элемент группы $G$. Тогда элемент $g$ не является $\pi$-полным и поэтому мы можем зафиксировать $\pi$-число $s$ такое, что уравнение $x^s = g$ не разрешимо в группе $G$. Рассмотрим степенную подгруппу $V = G^{s^c}$, где $c$ — ступень нильпотентности группы $G$. По лемме 2 из [5] из любого элемента $v$ подгруппы $V$ в группе $G$ извлекается корень степени $s$. Отсюда и из того, что уравнение $x^s = g$ не разрешимо в группе $G$, следует, что $h \notin V$. Очевидно, что любая периодическая абелева группа конечного ранга с ограниченными порядками элементов конечна. Это утверждение легко распространить с абелевых групп на разрешимые группы. Поэтому $G/V$ является конечной группой, и даже конечной $\pi$-группой. Таким образом, $V$ — нормальная подгруппа конечного $\pi$-индекса группы $G$, не содержащая элемент $g$. Тем самым доказана $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость группы $G$. Лемма доказана.

Справедливость теоремы 2 обеспечивается леммами 5, 6 и 7.

# Список литературы

1. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Мат. сб. 1948. Т. 22(2). С. 351–352. [*Malcev A. I.* O gruppah konechnogo ranga // Mat. sb. 1948. T. 22(2). S. 351–352 (in Russian)].

2. *Lubotzki. A., Mann A.* Residually finite groups of finite rank // Math. Proc. Comb. Phil. Soc. 1989. V. 106(3). P. 385–388.

3. *Сексенбаев К.* К теории полициклических групп // Алгебра и логика. 1965. Т. 4. Вып. 3. С. 79–83. [*Seksenbaev K.* K teorii policiklicheskih grupp // Algebra i logika. 1965. T. 4. Vyp. 3. S. 79–83 (in Russian)].

4. *Robinson D.* Intersections of primary powers of a group // Mathematische Zeitschrift. 1972. V. 124(2). P. 119–132.

5. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18(5). С. 49–60. [*Malcev A. I.* O gomomorfizmah na konechnye gruppy // Uchen. zap. Ivan. gos. ped. in-ta. 1958. T. 18(5). S. 49–60 (in Russian)].

## Some Residual Properties of Finite Rank Groups

Azarov D. N.

*Ivanovo State University,*
*Ermaka str., 39, Ivanovo, 153025, Russia*

**Keywords:** finite rank group, residually finite $p$-group.

The generalization of one classical Seksenbaev theorem for polycyclic groups is obtained. Seksenbaev proved that if $G$ is a polycyclic group which is residually finite $p$-group for infinitely many primes $p$, it is nilpotent. Recall that a group $G$ is said to be a residually finite $p$-group if for every nonidentity element $a$ of $G$ there exists a homomorphism of the group $G$ onto a finite $p$-group such that the image of the element $a$ differs from 1. One of the generalizations of the notation of a polycyclic group is the notation of a finite rank group. Recall that a group $G$ is said to be a group of finite rank if there exists a positive integer $r$ such that every finitely generated subgroup in $G$ is generated by at most $r$ elements. We prove the following generalization of Seksenbaev theorem: if $G$ is a group of finite rank which is a residually finite $p$-group for infinitely many primes $p$, it is nilpotent. Moreover, we prove that if for every set $\pi$ of almost all primes the group $G$ of finite rank is a residually finite nilpotent $\pi$-group, it is nilpotent. For nilpotent groups of finite rank the necessary and sufficient condition to be a residually finite $\pi$-group is obtained, where $\pi$ is a set of primes.

**Сведения об авторах:**
**Азаров Дмитрий Николаевич**,
Ивановский государственный университет,
канд. физ.-мат. наук, доцент, старший научный сотрудник