*Модел. и анализ информ. систем.* Т. **19**, № **1** (2012) 60–68

УДК 517.968+519.64

# Моделирование систем автоматического управления на основе полиномов Вольтерра

Солодуша С.В.[1]

*Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН*

*e-mail: solodusha@isem.sei.irk.ru*

*получена 22 июля 2011*

**Ключевые слова:** уравнения Вольтерра I рода, нелинейные интегральные неравенства, система автоматического управления.

Рассмотрен вопрос существования решений полиномиальных интегральных уравнений Вольтерра I рода второй степени. Разработан алгоритм численного решения одного класса нелинейных систем Вольтерра I рода. Приводятся также численные результаты для тестовых примеров.

## 1. Постановка задачи

Одним из наиболее универсальных подходов к построению математической модели нелинейной динамической системы типа черного ящика является представление отклика системы на внешнее возмущение в виде отрезка интегро-степенного ряда (полинома) Вольтерра некоторой степени $N$. Пусть нелинейная динамическая система с векторными входом $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_p(t))^T$ и выходом $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_m(t))^T$ моделируется $m$ полиномами Вольтерра $N$-й степени следующего вида:

$$y_r(t) = P_{r,N}(x(t)) \equiv \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_\nu \le p} \int\limits_0^t \ldots \int\limits_0^t K^{(r)}_{i_1 \ldots i_\nu}(t, s_1, ..., s_\nu) \prod_{k=1}^{\nu} x_{i_k}(s_k)\, ds_k, \qquad (1)$$

где $r = \overline{1,m},\ t \in [0,T]$. В (1) функции $K^{(r)}_{i_1 \ldots i_\nu}$ (ядра Вольтерра) симметричны относительно переменных, соответствующих совпадающим индексам.

Переходные характеристики $K^{(r)}_{i_1 \ldots i_\nu}$, $r = \overline{1,m}$, и отклик $y(t)$ в (1) считаются известными. Рассматривается задача автоматического управления нелинейной динамической системой, которая состоит в определении входного воздействия $x(t)$, соответствующего заданному (желаемому) отклику $y(t)$. Выбор $x(t)$ проводится при условии отсутствия обратной связи по выходу.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 12-01-00722.

Когда в (1) $p = m = 1$, так что $x_1(t) \equiv x(t)$, $K^{(1)}_{\underbrace{1...1}_{\nu}} \equiv K_\nu$, $y_1(t) \equiv y(t)$, управляющее воздействие $x(t)$ является решением полиномиального интегрального уравнения Вольтерра I рода

$$P_{1,N}(x(t)) \equiv \sum_{\nu=1}^{N} \int_0^t ... \int_0^t K_\nu(t, s_1, ..., s_\nu) \prod_{k=1}^{\nu} x\left(s_k\right) ds_k = y(t),\ t \in [0, T]. \tag{2}$$

При $N = 1$ вместо (2) имеем стандартное линейное уравнение Вольтерра I рода

$$P_{1,1}(x(t)) \equiv \int_0^t K_1(t, s)x(s)ds = y(t),\ t \in [0, T]. \tag{3}$$

Общеизвестно, что линейное уравнение (3) в предположении, что $K_1'(t, s) \in C_\Delta$, $\Delta = \{t, s/0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$; $K_1(t, t) \neq 0\ \forall t \in [0, T]$; $y(0) = 0$, $y'(t) \in C_{[0,T]}$, имеет единственное решение $x(t) \in C_{[0,T]}$ при любом $T < \infty$.

В работах [1–5] приведены результаты в области теории и численных методов построения непрерывных решений уравнений вида (2) при $N = 2, 3$. Согласно [1–5], основная специфика полиномиального уравнения (2) при $N > 1$ состоит в том, что его (единственное) непрерывное решение имеет локальный характер, так что величина $T$, вообще говоря, должна быть достаточно малой.

## 2. Полиномиальные уравнения Вольтерра I рода второй степени

Пусть теперь $x(t)$ есть вектор-функция времени, а $y(t)$ — скалярная функция времени, так что в (1) $x(t) = (x_1(t), ..., x_p(t))^T$, $m = 1$, $y_1(t) \equiv y(t)$, $K^{(1)}_{i_1...i_\nu} \equiv K_{i_1...i_\nu}$. Рассмотрим наиболее интересный для приложений случай $N = 2$. Теперь вместо (1) имеем

$$P_{1,2}(x(t)) \equiv \sum_{i=1}^{p} \int_0^t K_i(t, s)x_i(s)ds + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{i} \int_0^t \int_0^t K_{ji}(t, s_1, s_2)x_j(s_1)x_i(s_2)ds_1ds_2 = y(t), \tag{4}$$

где для определенности возмущения $x_i\left(t\right)$, $i = \overline{2, p}$, считаются заданными; ядра $K_{ii}$, $i = \overline{1, p}$, симметричны по переменным $s_1$, $s_2$; $y\left(0\right) = 0$, $y'\left(t\right) \in C_{[0,T]}$, $t \in [0, T]$. Всюду далее считаем все функции и функциональные пространства вещественными. Определение входного сигнала $x_1\left(t\right)$ будем проводить при условии отсутствия обратной связи по выходу.

Рассмотрим случай, когда $K_i(t, s) = \hat{K}_i(t)$, $0 \leq s \leq t \leq T$, $K_{ji}(t, s_1, s_2) = \hat{K}_{ji}(t)$, $0 \leq s_1, s_2 \leq t \leq T$, $\hat{K}_{11}(0) \neq 0$, $\hat{K}_i'(t) \in C_{[0,T]}$, $\hat{K}_{ji}'(t) \in C_{[0,T]}$, $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant p$. Вместо (4) имеем

$$\left[\hat{K}_1(t) + \sum_{i=2}^{p} \hat{K}_{1i}(t) \int_0^t x_i(s)ds\right] \int_0^t x_1(s)ds + \hat{K}_{11}(t)\left(\int_0^t x_1(s)ds\right)^2 = f(t),\ t \in [0, T], \tag{5}$$

где

$$f(t) = y(t) - \sum_{i=2}^{p} \hat{K}_i(t) \int\limits_0^t x_i(s)ds - \sum_{i=2}^{p} \sum_{j=2}^{i} \hat{K}_{ji}(t) \Big( \int\limits_0^t x_i(s)ds \Big) \Big( \int\limits_0^t x_j(s)ds \Big). \quad (6)$$

**Теорема 1.** *Пусть*

$$f(t) \in C^{(1)}_{[0,T]}, \ \ f(0) = 0.$$

*Тогда единственное непрерывное решение (5), (6) определяется формулой*

$$x_1^*(t) = \frac{\alpha'(t) - \beta'(t) - \hat{K}_1'(t)}{2\hat{K}_{11}(t)} - \hat{K}_{11}'(t) \frac{\alpha(t) - \beta(t) - \hat{K}_1(t)}{2\hat{K}_{11}^2(t)}, \quad (7)$$

*где*

$$\theta_i(t) = \int\limits_0^t x_i(s)ds, \ \ i = \overline{2,p}, \quad (8)$$

$$\beta(t) = \sum_{i=2}^{p} \hat{K}_{1i}(t)\theta_i(t), \ \ \alpha(t) = \sqrt{(\hat{K}_1(t) + \beta(t))^2 + 4\hat{K}_{11}(t)f(t)}. \quad (9)$$

*Доказательство.* Убедимся, что подстановка (7)–(9) в (5) обращает его в тождество. Имеем:

$$I = \int\limits_0^t x_1^*(s)ds = \frac{1}{2\hat{K}_{11}(t)}(\alpha(t) - \beta(t) - \hat{K}_1(t)),$$

отсюда, с учетом (8), (9),

$$\left[ \hat{K}_1(t) + \sum_{i=2}^{p} \hat{K}_{1i}(t) \int\limits_0^t x_i(s)ds \right] I + \hat{K}_{11}(t) I^2 \equiv f(t).$$

Единственность легко доказывается от противного. ■

Для установления области существования непрерывного решения применим технику получения неулучшаемых оценок решений нелинейных интегральных неравенств, разработанную в [1–5]. Предположим, что допустимые входные возмущения есть

$$x_i(t) \in X_i = \{g_i e(t), \ \ g_i \in R, \ \ t \in [0,T]\}, \ \ i = \overline{2,p},$$

здесь $e(t)$– функция Хевисайда.

Введем следующие обозначения

$$F = \max_{0 \le t \le T} |y'(t)| > 0, \ M_1 = \min_{0 \le t \le T} \left| \hat{K}_1(t) \right| > 0, \ M_l = \max_{0 \le t \le T} \left| \hat{K}_l(t) \right| > 0,$$

$$M_{ji} = \max_{0 \le t \le T} \left| \hat{K}_{ji}(t) \right| > 0, \ G_i = |g_i| > 0, \ L_i = \max_{0 \le t \le T} \left| \hat{K}_i'(t) \right| \ge 0, \ L_{ji} = \max_{0 \le t \le T} \left| \hat{K}_{ji}'(t) \right| \ge 0,$$

где $l = \overline{2,p}$, $1 \leq j \leq i \leq p$. Не ограничивая общности, выберем $M_1 = 1$. По аналогии с [1–5], рассмотрим мажорантное интегральное уравнение для (5), (6) при $L_i = 0$, $L_{ji} = 0$, $1 \leq j \leq i \leq p$, в следующем виде

$$\left(1 - t\sum_{i=2}^{p} M_{1i}G_i\right)\int_0^t \varphi(s)\,ds - M_{11}\left(\int_0^t \varphi(s)\,ds\right)^2 = \tilde{F}t + t^2\sum_{i=2}^{p}\sum_{j=2}^{i} M_{ji}G_jG_i, \quad (10)$$

где $\tilde{F} = F + \sum\limits_{i=2}^{p} M_iG_i$, $t \in [0,T]$. Заменой вида (8) решение уравнения (10) может быть сведено к нахождению решения задачи Коши

$$\theta'(t) = \frac{\tilde{F} + 2t\sum\limits_{i=2}^{p}\sum\limits_{j=2}^{i} M_{ji}G_jG_i + \theta(t)\sum\limits_{i=2}^{p} M_{1i}G_i}{1 - 2M_{11}\theta(t) - t\sum\limits_{i=2}^{p} M_{1i}G_i}, \quad \theta(0) = 0, \quad t \in [0,T], \qquad (11)$$

и его дифференцированию.

Решение уравнений вида (10), (11) при $p = 2$ было рассмотрено в [6]. Переходя к случаю $p > 2$, получаем, что если исходным данным в (5), (6) отвечает набор $(F, M_i,\ M_{ji},\ G_i,\ 0,\ 0)$, $\quad 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant p$, то непрерывное решение уравнения (5), (6) $x_1^*(t)$ заведомо существует и единственно на $[0,T]$, где

$$T < T^* = \frac{1}{\eta}\left(\sum_{i=2}^{p} M_{1i}G_i + 2M_{11}\tilde{F} - 2\gamma\right),$$

$$\gamma = \sqrt{M_{11}\tilde{F}\left(\sum_{i=2}^{p} M_{1i}G_i + M_{11}\tilde{F}\right) + M_{11}\sum_{i=2}^{p}\sum_{j=2}^{i} M_{ji}G_jG_i},$$

$$\eta = \left(\sum_{i=2}^{p} M_{1i}G_i\right)^2 - 4M_{11}\sum_{i=2}^{p}\sum_{j=2}^{i} M_{ji}G_jG_i, \qquad (12)$$

причем справедливо неравенство

$$|x_1^*(t)| \leq \varphi^*(t),\ t \in [0,T^*),$$

где, с учетом (12),

$$\varphi^*(t) = \frac{1}{2M_{11}\chi(t)}\left(\sum_{i=2}^{p} M_{1i}G_i - t\eta + 2\tilde{F}M_{11}\right) - \frac{1}{2M_{11}}\sum_{i=2}^{p} M_{1i}G_i,$$

$$\chi(t) = \sqrt{\left(1 - t\sum_{i=2}^{p} M_{1i}G_i\right)^2 - 4tM_{11}\left(\tilde{F} + t\sum_{i=2}^{p}\sum_{j=2}^{i} M_{ji}G_jG_i\right)}.$$

До сих пор в работе рассматривалось непрерывное решение уравнения (5), (6). Заметим, что в линейном случае условие $y(0)=0$ гарантирует отсутствие решений в классе обобщенных функций. Следующая теорема показывает, что при переходе к (5), (6) это заведомо не так. Учитывая (8), введем

$$\tilde{K}(t) = \frac{\hat{K}_1(t) + \sum\limits_{i=2}^{p} \hat{K}_{1i}(t)\theta_i(t)}{\hat{K}_{11}(t)}, \ \tilde{K}(0) = \frac{\hat{K}_1(0)}{\hat{K}_{11}(0)}. \tag{13}$$

**Теорема 2.** *Пусть*

$$\tilde{K}(t) \in C^{(1)}_{[0,T]}.$$

*Если $x_1^*(t)$ — решение уравнения (5), (6), то*

$$x_1^{**}(t) = -(x_1^*(t) + \tilde{K}(t)\delta(t) + \tilde{K}'(t)) \tag{14}$$

*также решение (5), (6). Здесь $\delta(t)$ — $\delta$-функция Дирака, функция $\tilde{K}(t)$ определена формулой (13).*

*Доказательство.* Покажем, что подстановка (14) в (5) обращает его в тождество. Действительно, в силу (14)

$$I = \int\limits_0^t x_1^{**}(s)ds = -\int\limits_0^t x_1^*(s)ds - \tilde{K}(0) - \int\limits_0^t \tilde{K}'(s)ds = -\int\limits_0^t x_1^*(s)ds - \tilde{K}(t),$$

следовательно, с учетом (8), (13), получаем

$$\left[\hat{K}_1(t) + \sum_{i=2}^{p} \hat{K}_{1i}(t) \int\limits_0^t x_i(s)ds\right] I + \hat{K}_{11}(t)I^2 =$$

$$= \left[\hat{K}_1(t) + \sum_{i=2}^{p} \hat{K}_{1i}(t) \int\limits_0^t x_i(s)ds\right] \int\limits_0^t x_1^*(s)ds + \hat{K}_{11}(t)\left(\int\limits_0^t x_1^*(s)ds\right)^2 \equiv f\,(t)\,,$$

поскольку $x_1^*(t)$ — решение (5), (6). ∎

Исследованию структуры решений уравнений вида (2) с операторами типа многомерных сверток в пространстве обобщенных функций посвящена работа [7].

## 3. Системы полиномиальных уравнений Вольтерра I рода второго порядка

Пусть в (1) $m=p=2$, так что $x(t) = (x_1(t),\, x_2(t))^T$, $y(t) = (y_1(t),\, y_2(t))^T$. Тогда при $N=2$ вместо (1) имеем

$$P_{r,2}(x(t)) \equiv \sum_{i=1}^{2} \int\limits_0^t K_i^{(r)}(t,s)x_i(s)ds + \tag{15}$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{i}\int_0^t\int_0^t K_{ji}^{(r)}(t,s_1,s_2)x_i(s_1)x_j(s_2)ds_1ds_2 = y_r(t), \quad r=1,\,2,\ t\in[0,T].$$

В математическом плане задача поиска управляемого параметра применительно к (15), где известны $y(t)=(y_1(t),\,y_2(t))^T$, $K_i^{(r)}$, $K_{ji}^{(r)}$, $1\le j\le i\le 2$, $r=1,\,2$, заключается в решении системы полиномиальных уравнений Вольтерра I рода относительно $x(t)$. Для удобства примем обозначения:

$$\mathcal{K}_i=\left(K_i^{(1)},\ K_i^{(2)}\right)^T, \quad \mathcal{K}_{ji}=\left(K_{ij}^{(1)},\ K_{ji}^{(2)}\right)^T, \quad i,\,j=1,\,2\,,\ \ j<i.$$

Пусть $\mathcal{K}_i,\,\mathcal{K}_{ji}\in C_\Delta,\quad i,\,j=1,\,2,\quad \Delta=\{t,s_1,s_2/0\le s_1,s_2\le t\le T\}$, определитель блочной матрицы $(\mathcal{K}_1\ \mathcal{K}_2)$ не нулевой $(|\mathcal{K}_1\ \mathcal{K}_2|\ne 0)$, $y_r(0)=0$, $y_r{}'(t)\in C_{[0,T]}$, $r=1,\,2$.

В работе [8] рассмотрены алгоритмы решения (15), основанные на сведении исходной задачи к решению полиномиального интегрального уравнения Вольтерра I рода четвертой степени.

Основная цель данного раздела — рассмотреть частный класс (15), допускающий модификацию изложенного в [8] алгоритма численного решения.

Для понимания специфики системы вида (15) полезно рассмотреть случай постоянных ядер, так что (15) примет вид

$$\sum_{i=1}^{2}K_i^{(r)}\int_0^t x_i(s)ds+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{i}K_{ji}^{(r)}\left(\int_0^t x_i(s)ds\right)\left(\int_0^t x_j(s)ds\right)=y_r(t), \tag{16}$$

$r=1,\,2,\ t\in[0,T]$. Введем сетку узлов $t_i=ih$, $t_{i-\frac12}=(i-\frac12)h$, $i=\overline{1,n}$, $nh=T$, причем считаем $T<T^*$, чтобы обеспечить существование непрерывного решения системы. Аппроксимируя интегралы в (16) квадратурами средних прямоугольников, запишем сеточный аналог

$$h\sum_{l=1}^{2}K_l^{(r)}\sum_{j=1}^{i}x^h_{l_{j-\frac12}}+h^2\sum_{l=1}^{2}K_{ll}^{(r)}\left(\sum_{j=1}^{i}x^h_{l_{j-\frac12}}\right)^2+h^2K_{12}^{(r)}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}x^h_{1_{j-\frac12}}x^h_{2_{k-\frac12}}=y_{r_i}, \tag{17}$$

где $i=\overline{1,n},\ r=1,\,2.$

Согласно [9, с. 342], функция

$$\Phi(\psi_1,\psi_2)=a\psi_1^2+b\psi_2^2+c+2a_1\psi_2+2b_1\psi_1+2c_1\psi_1\psi_2=0$$

разлагается на два линейных множителя

$$b\psi_2+c_1\psi_1+a_1\ \pm\ \left(\sqrt{c_1^2-ab}\,\psi_1+\sqrt{a_1^2-bc}\right),$$

если

$$|U|=\begin{vmatrix} a & c_1 & b_1\\ c_1 & b & a_1\\ b_1 & a_1 & c\end{vmatrix}=0. \tag{18}$$

Для идентификации $x^h_{1_{i-\frac{1}{2}}}$, $x^h_{2_{i-\frac{1}{2}}}$ сформируем (при фиксированном значении $i$) элементы матрицы $U$ по следующему правилу $u = u_1 + \lambda u_2$ и введем в (18) обозначения

$$\begin{gathered} a = K_{11}^{(1)} + \lambda K_{11}^{(2)}, \quad a_1 = \frac{1}{2}\left(K_2^{(1)} + \lambda K_2^{(2)}\right), \\ b = K_{22}^{(1)} + \lambda K_{22}^{(2)}, \quad b_1 = \frac{1}{2}\left(K_1^{(1)} + \lambda K_1^{(2)}\right), \\ c = -\big(y_1(t_i) + \lambda y_2(t_i)\big), \quad c_1 = \frac{1}{2}\left(K_{12}^{(1)} + \lambda K_{12}^{(2)}\right). \end{gathered} \tag{19}$$

Исходная задача (17) редуцируется к численному решению смешанной системы следующего вида:

$$h\sum_{l=1}^{2} K_l^{(r)} \sum_{j=1}^{i} x^h_{l_{j-\frac{1}{2}}} + h^2 \sum_{l=1}^{2} K_{ll}^{(r)} \left(\sum_{j=1}^{i} x^h_{l_{j-\frac{1}{2}}}\right)^2 + h^2 K_{12}^{(r)} \sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} x^h_{1_{j-\frac{1}{2}}} x^h_{2_{k-\frac{1}{2}}} = y_r(t_i), \tag{20}$$

$$\begin{gathered} \left(K_{22}^{(1)} + \lambda_0 K_{22}^{(2)}\right) \sum_{j=1}^{i} x^h_{2_{j-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\left(K_{12}^{(1)} + \lambda_0 K_{12}^{(2)}\right) \sum_{j=1}^{i} x^h_{1_{j-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\left(K_2^{(1)} + \lambda_0 K_2^{(2)}\right) - \\ -\Bigg(\sum_{j=1}^{i} x^h_{1_{j-\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{4}\left(K_{12}^{(1)} + \lambda_0 K_{12}^{(2)}\right)^2 - \left(K_{11}^{(1)} + \lambda_0 K_{11}^{(2)}\right)\left(K_{22}^{(1)} + \lambda_0 K_{22}^{(2)}\right)} + \\ + \sqrt{\frac{1}{4}\left(K_2^{(1)} + \lambda_0 K_2^{(2)}\right)^2 + \left(K_{22}^{(1)} + \lambda_0 K_{22}^{(2)}\right)\left(y_1(t_i) - \lambda_0 y_2(t_i)\right)}\Bigg) = 0, \end{gathered}$$

где $r = 1 \vee 2$, $i = \overline{1,n}$, $\lambda_0$ — корень (18) в принятых обозначениях (19), выбор которого обеспечивается условием

$$x^h_{1_{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[h\to 0]{} x_1(0) = \frac{|y'(0)\ \ \mathcal{K}_2|}{|\mathcal{K}_1\ \ \mathcal{K}_2|}, \ x^h_{2_{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[h\to 0]{} x_2(0) = \frac{|y'(0)\ \ \mathcal{K}_1|}{|\mathcal{K}_2\ \ \mathcal{K}_1|}.$$

Вещественность корней (20) гарантирует неравенство $T < T^*$.

Приведем следующий

**Пример 1.**

$K_1^{(1)} = K_2^{(1)} = K_1^{(2)} = K_{11}^{(1)} = 1$, $K_2^{(2)} = 2$, $K_{11}^{(2)} = K_{22}^{(2)} = K_{12}^{(2)} = \frac{1}{2}$, $K_{22}^{(1)} = \frac{1}{8}$, $K_{12}^{(1)} = \frac{1}{4}$,

$$y_1(t) = t + \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{6} + \frac{7t^4}{24} + \frac{t^5}{16} + \frac{t^6}{36} + \frac{t^7}{96} + \frac{t^8}{128}, \ y_2(t) = 2t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{7t^4}{12} + \frac{t^5}{4} + \frac{t^6}{72} + \frac{t^7}{48} + \frac{t^8}{32}.$$

В работе [8, с. 117] приведены значения погрешностей сеточных решений для данной тестовой системы. Вычислительный эксперимент показал, что как и в скалярном случае [4], методы правых и средних прямоугольников сходятся по шагу сетки $h$ с порядками $\mathcal{O}(h)$ и $\mathcal{O}(h^2)$ соответственно, а при возмущенных исходных данных в метрике $C$ они обладают саморегуляризующим свойством.

Для иллюстрации саморегуляризующего эффекта процедуры дискретизации зададим пилообразное возмущение правой части (20):

$$\tilde{y}_r(t_i) = y_r(t_i) + (-1)^i\,\delta, \quad i = \overline{1,n}, \ nh = T, \ r = 1,2.$$

В таблице приведены значения оптимального шага сетки, минимизирующего при фиксированном $\delta$ величину $\|\tilde{\varepsilon}_r^{h(\delta)}\|_{C_h} = \max\limits_{1\le i\le n(\delta)}\left|\bar{x}_r\left(t_{i-\frac{1}{2}}\right) - \tilde{x}^h_{r_{i-\frac{1}{2}}}\right|$. Оптимизация шага сетки осуществлялась методом Фибоначчи с десятью испытаниями.

Таблица 1.

| $\delta$ | $h_{opt}(\delta)$ | $\|\tilde{\varepsilon}_1^{h_{opt}(\delta)}\|_{C_h}$ | $\|\tilde{\varepsilon}_2^{h_{opt}(\delta)}\|_{C_h}$ |
|---|---|---|---|
| $10^{-1}$ | 0,7303371 | 0,1976315 | 0,1302130 |
| $10^{-2}$ | 0,4185078 | 0,0481122 | 0,0243483 |
| $10^{-4}$ | 0,0887632 | 0,0017558 | 0,0019073 |
| $10^{-5}$ | 0,0449438 | 0,0003816 | 0,0004654 |

Как видно из таблицы, $h_{opt}(\delta) \asymp \delta^{\frac{1}{3}}$, при этом $\|\tilde{\varepsilon}_1^{h_{opt}(\delta)}\|_{C_h} \asymp \delta^{\frac{2}{3}}$, $\|\tilde{\varepsilon}_2^{h_{opt}(\delta)}\|_{C_h} \asymp \delta^{\frac{2}{3}}$.

## 4. Заключение

В статье рассмотрен подход к моделированию систем автоматического управления нелинейной динамикой на основе использования полиномов Вольтерра. Работа продолжает исследования, начатые в [6], [8]. Приведены теоремы существования решений одного класса полиномиальных уравнений Вольтерра I рода второй степени. Показано, что, несмотря на условие $y(0) = 0$, данные полиномиальные уравнения Вольтерра I рода заведомо имеют решение в классе обобщенных функций. Изложен алгоритм численного решения одного класса систем полиномиальных уравнений Вольтерра I рода второго порядка, позволяющий упростить исходную задачу.

# Список литературы


1. Апарцин А.С. О полилинейных уравнениях Вольтерра I рода // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 118–125.

2. Апарцин А.С. К теории полилинейных уравнений Вольтерра I рода // Оптимизация, управление, интеллект. 2005. № 1(9). С. 5–27.

3. Апарцин А.С. Полилинейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода: элементы теории и численные методы // Известия ИГУ. Серия: Математика. 2007. Т. 1. № 1. С. 13–42.

4. Апарцин А.С. О сходимости численных методов решения билинейного уравнения Вольтерра I рода // ЖВМиМФ. 2007. № 8. С. 1380–1388.

5. Апарцин А.С. Полилинейные уравнения Вольтерра I рода и некоторые задачи управления // Автоматика и телемеханика. 2008. № 4. С. 3–16.

6. Солодуша С.В. Приложение нелинейных уравнений Вольтерра I рода к задаче управления динамикой теплообмена // Автоматика и телемеханика. 2011. №6. С. 133–140.

7. Сидоров Д.Н., Сидоров Н.А. Обобщенные решения полиномиальных интегральных уравнений первого рода в одной модели нелинейной динамики // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 127–132.

8. Солодуша С.В. Об одном классе систем билинейных интегральных уравнений Вольтерра I рода второго порядка // Автоматика и телемеханика. 2009. №4. С. 110–118.

9. Вебер Г., Вельштейн И. Энциклопедия элементарной математики. Одесса: Матезис, 1906. Т. 1. 622 с.

## Automatic Control Systems Modeling by Volterra Polynomials

Solodusha S.V.

**Keywords:** Volterra equations of the first kind, nonlinear integral inequalities, system of automatic control.

The problem of the existence of the solutions of polynomial Volterra integral equations of the first kind of the second degree is considered. An algorithm of the numerical solution of one class of Volterra nonlinear systems of the first kind is developed. Numerical results for test examples are presented.

**Сведения об авторе:**
Солодуша Светлана Витальевна,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск,
кандидат физико-математических наук, доцент