Моделирование и анализ информационных систем. Т. 26, № 2 (2019), с. 267–278
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 26, No 2 (2019), pp. 267–278

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-2-267-278

УДК 519.2

Существование несмещенной состоятельной оценки энтропии для специальной меры Бернулли

Тимофеев Е. А.

Поступила в редакцию 6 мая 2019
После доработки 22 мая 2019
Принята к публикации 24 мая 2019

Аннотация.

Пусть $\Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ – пространство правосторонних бесконечных последовательностей символов из алфавита $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$,

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k| 2^{-k}$$

– метрика на Ω, и μ – вероятностная мера на Ω. Пусть $\boldsymbol{\xi_0}, \boldsymbol{\xi_1}, \dots, \boldsymbol{\xi_n}$ – независимые случайные точки на Ω, распределенные по мере μ. Будем изучать оценку $\eta_n^{(k)}(\gamma)$ – величину обратной к энтропии $1/h$, которая определяется следующим образом.

$$\eta_n^{(k)}(\gamma) = k\left(r_n^{(k)}(\gamma) - r_n^{(k+1)}(\gamma)\right),$$

где

$$r_n^{(k)}(\gamma) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \gamma\left(\min_{i: i \neq j}{}^{(k)} \rho(\boldsymbol{\xi_i}, \boldsymbol{\xi_j})\right),$$

$\min^{(k)}\{X_1, \dots, X_N\} = X_k$, если $X_1 \le X_2 \le \dots \le X_N$. Число k и функция $\gamma(t)$ – вспомогательные параметры. Основной результат работы

Теорема. Пусть μ – мера Бернулли с вероятностями $p_0, p_1 > 0$, $p_0 + p_1 = 1$, $p_0 = p_1^2$, тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $\gamma(t)$ такая, что

$$\left|\mathsf{E}\eta_n^{(k)}(\gamma) - \frac{1}{h}\right| < \varepsilon, \quad \mathsf{Var}\ \eta_n^{(k)}(\gamma) \to 0,\ n \to \infty.$$

Ключевые слова: мера, метрика, энтропия, оценка, несмещенность, самоподобие, мера Бернулли

Для цитирования: Тимофеев Е. А., "Существование несмещенной состоятельной оценки энтропии для специальной меры Бернулли", *Моделирование и анализ информационных систем*, **26**:2 (2019), 267–278.

Об авторах:
Тимофеев Евгений Александрович, orcid.org/0000-0002-3094-4390, доктор. физ.-мат. наук., профессор кафедры теоретической информатики,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: timofeevEA@gmail.com

В работе [4] предложена непараметрическая оценка энтропии, которая зависит от семейства метрик. В [7] эта оценка модифицирована так, что она зависит от конкретной метрики и некоторой функции $\gamma(t)$. Эта модификация более удобна для анализа, поэтому именно она и будет рассматриваться в настоящей работе.

Основным показателем качества оценки является ее точность, которая складывается из несмещенности и дисперсии оценки. Поиск порядка убывания дисперсии оценки является более простой задачей. Почти оптимальный порядок убывания дисперсии доказан в [5]. Нахождение математического ожидания оценки в общем случае является очень трудной задачей, найти решение которой, по-видимому, невозможно. Поэтому находить ее будем для мер Бернулли. Для мер Бернулли асимптотическая несмещенность доказана для почти всех значений параметров и конкретной функции $\gamma(t)$ [8]. Для бинарных мер Бернулли с параметрами p_0, p_1, $(p_0 + p_1 = 1)$ исключительные случаи, в которых асимптотическая сходимость не доказана, описываются как

$$\frac{\log p_0}{\log p_1} - \text{рационально.}$$

Отсутствие сходимости в исключительных случаях является принципиальной трудностью, поскольку при простейшем выборе метрики и функции $\gamma(t)$ в случае $p_0 = p_1 = 1/2$ показано [6], что оценка является смещенной, хотя смещение очень мало (порядка 10^{-6}).

В [4] показано, что при метрике, заданной в (1), и функции $\gamma(t) = -\log_2 t$ в случае $p_0 = p_1 = 1/2$, оценка будет несмещенной.

В [10] показано, что и для следующего исключительного случая

$$\frac{\log p_0}{\log p_1} = 2,$$

для метрики, заданной в (1), можно найти такую функцию $\gamma(t)$, для которой оценка энтропии будет несмещенной. Однако найденная функция $\gamma(t)$ является не ограниченной.

В настоящей работе будет показано, что для этого исключительного случая и для метрики, заданной в (1), можно найти такую непрерывную монотонную функцию $\gamma(t)$, для которой оценка энтропии будет несмещенной, а из непрерывности и монотонности этой функции следует и состоятельность оценки [4].

Таким образом, предложенный в [4, 7] метод адаптивного оценивания энтропии (предварительное нахождение вспомогательной функции) работает и в исключительных случаях.

1. Непараметрическая оценка энтропии

Обозначим через $\Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ пространство правосторонних бесконечных последовательностей символов из конечного алфавита $\mathcal{A} = \{0, 1\}$.

Пусть даны $\boldsymbol{\xi_0}, \boldsymbol{\xi_1}, \ldots, \boldsymbol{\xi_n}$ – независимые случайные точки в Ω, одинаково распределенные по вероятностной мере μ.

Зададим метрику ρ на Ω, положив

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i| 2^{-i}. \tag{1}$$

Пусть заданы:

1. k – вспомогательный параметр, который будем считать небольшим и фиксированным. Этот параметр служит для контроля применимости (оценки, полученные для различных значений k, являются оценками одной и той же величины);

2. $\gamma(t)$ – функция, определенная на полуинтервале $(0, 1]$.

Оценка $\eta_n^{(k)}(\gamma)$ величины обратной к энтропии $1/h$ определяется следующим образом:

$$\eta_n^{(k)}(\gamma) = k\left(r_n^{(k)}(\gamma) - r_n^{(k+1)}(\gamma)\right), \tag{2}$$

где

$$r_n^{(k)}(\gamma) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \gamma\left(\min_{i:i\neq j}{}^{(k)} \rho(\boldsymbol{\xi_i}, \boldsymbol{\xi_j})\right), \tag{3}$$

и $\min^{(k)}\{X_1, \ldots, X_N\} = X_k$, если $X_1 \leq X_2 \leq \cdots \leq X_N$.

Подчеркнем, что логарифм в определении энтропии выбирается натуральным (в этом случае в формуле (3) нет дополнительных множителей).

Для дисперсии статистики $r_n^{(k)}(\gamma_0)$ в [5] показано, что $\mathsf{Var}\, r_n^{(k)}(\gamma_0) = \mathcal{O}(n^{-1}\ln n)$.

В работе [4] аналогичные оценки доказаны для произвольной монотонной функции $\gamma(t)$, имеющей порядок $\log_2 t$.

Смещение оценки $\eta_n^{(k)}(\gamma_0)$ изучено в [8], где доказана асимптотическая несмещенность, если логарифмы некоторых вероятностей рационально не соизмеримы. Для меры Бернулли с вероятностями $p_0, p_1, \ldots, p_m$ асимптотическая несмещенность выполняется, если $\log p_0, \log p_1, \ldots, \log p_m$ рационально не соизмеримы.

2. Построение функции $\gamma(t)$ при $p_0 = p_1^2$

Теорема 1. *Пусть μ – мера Бернулли с параметрами $p_0 = q^2$, $p_1 = q$, тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $\gamma(t)$ такая, что*

$$\left|\mathsf{E}\eta_n^{(k)}(\gamma) - \frac{1}{h}\right| < \varepsilon, \quad \mathsf{Var}\ \eta_n^{(k)}(\gamma) \to 0,\ n \to \infty.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать [4,9], что $\forall \varepsilon > 0$ существует непрерывная монотонная функция $\gamma(t)$ такая, что в точках некоторого ε-разбиения отрезка $[0, 1]$

$$\chi(t) = -\frac{\ln t}{h}, \tag{4}$$

где

$$\chi(t) = \int_{\Omega} \gamma(\nu(t, \omega))\, d\mu(\omega), \tag{5}$$

а через $r = \nu(t, \omega)$ обозначается обратная функция к мере шара $B(r, \omega)$ радиуса r с центром в точке ω.

Для нахождения решения уравнения (4) введем вспомогательные функции

$$\chi_{n,j}(t) = \int_\Omega \gamma(j2^{-n} + 2^{-n}\nu(t,\omega))\, d\mu(\omega), \quad 0 \le j < 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{6}$$

и будем считать, что $\chi_{0,0}(t) = \chi(t)$.

Для метрики (1) и меры Бернулли с параметрами $p_0 = q^2$, $p_1 = q$ функция $r = \nu(t, \omega)$ удовлетворяет рекуррентному уравнению:

$$\begin{gathered}\nu(t, 0\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}\nu\left(\frac{t}{q^2}, \omega\right), & 0 \le t \le q^2; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu\left(\frac{t-q^2}{q}, \omega\right), & q^2 \le t \le 1; \end{cases} \\ \nu(t, 1\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}\nu\left(\frac{t}{q}, \omega\right), & 0 \le t \le q; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu\left(\frac{t-q}{q^2}, \omega\right), & q \le t \le 1. \end{cases}\end{gathered} \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), получим

$$\chi_{n,j}(t) = \begin{cases} q^2\chi_{n+1,2j}\left(\dfrac{t}{q^2}\right) + q\chi_{n+1,2j}\left(\dfrac{t}{q}\right), & 0 \le t \le q^2; \\ q^2\chi_{n+1,2j+1}\left(\dfrac{t-q^2}{q}\right) + q\chi_{n+1,2j}\left(\dfrac{t}{q}\right), & q^2 \le t \le q; \\ q^2\chi_{n+1,2j+1}\left(\dfrac{t-q^2}{q}\right) + q\chi_{n+1,2j+1}\left(\dfrac{t-q}{q^2}\right), & q \le t \le 1. \end{cases} \tag{8}$$

В [10] показано, что для нахождения решения уравнения (4) достаточно найти решение этого уравнения с непрерывной монотонной функцией $\chi(t)$ с условием $\chi(0) = 0$, $\chi(1) = 1$. В этом случае функция $\chi(t)$ является функцией распределения некоторой случайной величины.

Лемма 1. *Пусть для некоторых величин $A_{n,0} \ge 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} A_{n,0} = 1$ функция $\gamma(t)$ удовлетворяет равенствам:*

$$\gamma(2^{-n-1}t + 2^{-n-1}) = A_{n,0}\gamma(t) + 1 - \sum_{k=0}^{n} A_{k,0}, \quad n = 0, 1, \dots, \infty, \tag{9}$$

тогда

$$\begin{aligned} \chi(q + q^2 t) &= A_{0,0}\left[q\chi(t) + q^2\chi(q^2 + qt)\right] + 1 - A_{0,0}; \\ \chi(q^{m+1} + q^{m+2}t) &= q^2 A_{0,m-1}\chi(q^2 t) + A_{0,m}\left[q\chi(t) + q^2\chi(q^2 + qt)\right] + \\ &\quad +1 - \textstyle\sum_{k=0}^{m} A_{0,k}, \quad m = 1, 2, \dots, \infty; \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$A(qy + q^2y^2, 0) = A(0, y), \tag{11}$$

а через $A(x, y)$ обозначается производящая функция:

$$A(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{n,m}x^n y^m. \tag{12}$$

Доказательство. Подчеркнем, что функции $\gamma(t)$ и $\chi(t)$ задают инвариантные меры для итерационной системы подобий с вероятностями. Существование таких мер следует из известной теоремы Хатчинсона [2], [1] и ее обобщения для бесконечной системы подобий [3]. Отметим, что для функции $\chi(t)$ итерационная система подобий имеет перекрытия.

Покажем, что функции $\chi_{n,0}(t)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} \chi_{n,0}(q+q^2t) &= A_{n,0}\left[q\chi(t)+q^2\chi(q^2+qt)\right]+B_{n,0};\\ \chi_{n,0}(q^{m+1}+q^{m+2}t) &= q^2A_{n,m-1}\chi(q^2t)+A_{n,m}\left[q\chi(t)+q^2\chi(q^2+qt)\right]+B_{n,m},\\ & m=1,2,\dots,\infty; \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} &A_{n,1}=qA_{n+1,0},\\ &A_{n,m}=q^2A_{n+1,m-2}+qA_{n+1,m-1},\\ &B_{n,0}=1-\textstyle\sum_{k=0}^{n}A_{k,0},\\ &B_{n,1}=qB_{n+1,0}+q^2B_{n,0},\\ &B_{n,m}=q^2B_{n+1,m-2}+qB_{n+1,m-1},\qquad m=2,3,\dots,\infty. \end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя (9) в (6), получим

$$\chi_{n+1,1}(t)=A_{n,0}\chi(t)+B_{n,0}, \tag{15}$$

где $B_{n,0}$ задано в (14).

Подставляя (15) в третье уравнение (8), получим первое уравнение в (13).

Из второго уравнения (8) имеем

$$\begin{aligned} \chi_{n,0}(q^2+q^3t) &= q^2\chi_{n+1,1}(q^2t)+q\chi_{n+1,0}(q+q^2t)=\\ &= q^2A_{n,0}\chi(q^2t)+q^2B_{n,0}+qA_{n+1,0}\left[q\chi(t)+q^2\chi(q^2+qt)\right]+qB_{n+1,0}. \end{aligned}$$

Используя первое и четвертое равенство в (14), получим второе уравнение в (13) при $m=1$.

Из первого уравнения (8) имеем

$$\begin{aligned} \chi_{n,0}(q^{m+1}+q^{m+2}t) &= q^2\chi_{n+1,1}(q^{m-1}+q^mt)+q\chi_{n+1,0}(q^m+q^{m+1}t)=\\ &= q^4A_{n+1,m-3}\chi(q^2t)+q^2A_{n+1,m-2}\left[q\chi(t)+q^2\chi(q^2+qt)\right]+q^2B_{n+1,m-2}+\\ &\quad + q^3A_{n+1,m-2}\chi(q^2t)+qA_{n+1,m-1}\left[q\chi(t)+q^2\chi(q^2+qt)\right]+qB_{n+1,m-1}. \end{aligned}$$

Используя второе и пятое равенство в (14), получим второе уравнение в (13) при $m>1$.

Из уравнений (14) найдем уравнение для производящей функции (12).

$$A(x,y)-A(x,0)=qx^{-1}y\left(A(x,y)-A(0,y)\right)+q^2x^{-1}y^2\left(A(x,y)-A(0,y)\right).$$

Следовательно,

$$A(x,y)\left(x-qy-q^2y^2\right)=xA(x,0)-(qy+q^2y^2)A(0,y).$$

При $x=qy+q^2y^2$ получаем (11).

□

Лемма 2. *Пусть для некоторых величин* $A_{0,m} \geq 0$, $\sum_{m=0}^{\infty} A_{0,m} = 1$ *функция* $\chi(t)$ *удовлетворяет равенствам* (10), *пусть производящая функция* $A(x, y)$ *удовлетворяет уравнению* (11) *и коэффициенты* $A_{n,0} \geq 0$, *тогда функция* $\gamma(t)$ *удовлетворяет уравнению* (9).

Доказательство. Индукцией по n покажем, что функции $\chi_{n,0}(t)$ удовлетворяют системе уравнений (13), функции $\chi_{n,1}(t)$ – уравнению (15), а коэффициенты $A_{n,m}$, $B_{n,m}$ – уравнениям (14).

При $n = 0$ функции $\chi_{n,0}(t)$ удовлетворяют системе уравнений (13) по условию леммы. Предположим, что условия выполнены для некоторого n и покажем, что они выполнены для $n + 1$.

Применим Лемму 1 из работы [10], в которой утверждается, что для ограниченной функции $\chi_{n+1,1}(t)$

$$\chi_{n+1,1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{k-1} \chi_{n,0}\left(1 - q^{k+2}(1-t)\right), \quad 0 \leq t \leq 1. \tag{16}$$

Поскольку $1 - q^{k+2}(1 - t) \geq q$, то подставляя первое равенство из (13), получим

$$\begin{aligned} \chi_{n+1,1}(t) = B_{n,0} + \\ + A_{n,0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{k-1} \left[q\chi_{n,0}\left(1 - q^k(1-t)\right) + q^2 \chi_{n,0}\left(1 - q^{k+1}(1-t)\right) \right] = \\ = B_{n,0} + A_{n,0} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^k \chi_{n,0}\left(1 - q^k(1-t)\right) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k q^k \chi_{n,0}\left(1 - q^k(1-t)\right) \right] = \\ = A_{n,0}\chi(t) + B_{n,0}. \end{aligned}$$

Следовательно, получаем, что функция $\gamma(t)$ удовлетворяет уравнению (9).

Покажем, что функции $\chi_{n+1,0}(t)$ удовлетворяют системе уравнений (13).

Из второго уравнения (8) при $j = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \chi_{n+1,0}(q + q^2 t) = q^{-1}\chi_{n,0}(q^2 + q^3 t) - q\chi_{n+1,1}(q^2 t) = \\ = q^{-1} A_{n,1} \left[q\chi(t) + q^2 \chi(q^2 + qt) \right] + q^{-1} B_{n,1} - qB_{n,0}. \end{aligned}$$

Используя первое и четвертое равенство в (14), получим первое уравнение в (13) при $n + 1$.

Из первого уравнения (8) при $j = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \chi_{n+1,0}(q^{m+1} + q^{m+2} t) = q^{-1}\chi_{n,0}(q^{m+2} + q^{m+3} t) - q\chi_{n+1,0}(q^m + q^{m+1} t) = \\ = qA_{n,m}\chi(q^2 t) + q^{-1} A_{n,m+1} \left[q\chi(t) + q^2\chi(q^2 + qt) \right] + q^{-1} B_{n,m+1} - \\ - q^3 A_{n+1,m-2}\chi(q^2 t) - qA_{n+1,m-1} \left[q\chi(t) + q^2 \chi(q^2 + qt) \right] - qB_{n+1,m-1}. \end{aligned}$$

Используя второе и пятое равенство в (14), получим второе уравнение в (13) при $n + 1$.

□

Подчеркнем, что в отличие от предыдущей леммы, условие $A_{n,0} \geq 0$ здесь существенно и трудно проверяемо. Действительно, уравнение (11) можно переписать как

$$A(x,0) = A(0, q^{-1}xC(-x)), \tag{17}$$

где

$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}\binom{2k}{k} x^k.$$

– функция Каталана.

Приведем еще один класс непрерывных функций, которые реализуются некоторой функцией $\gamma(t)$.

Лемма 3. *Пусть для некоторых величин $A_{n,0} \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} A_{n,0} = 1$ функция $\gamma(t)$ удовлетворяет равенствам*

$$\gamma(2^{-n-1}t + 1 - 2^{-n}) = A_{n,0}\gamma(t) + \sum_{k=0}^{n-1} A_{k,0}, \quad n = 0, 1, \ldots, \infty, \tag{18}$$

тогда

$$\begin{array}{ll} \chi(q^2 t) & = A_{0,0}\left[q^2\chi(t) + q\chi(qt)\right]; \\ \chi(1 - q^m + q^{m+2}t) & = qA_{0,m-1}\chi(q + q^2 t) + A_{0,m}\left[q^2\chi(t) + q\chi(qt)\right] + \\ & +q^2 A_{0,m-1} + \sum_{k=0}^{m-2} A_{0,k}, \quad m = 1, 2, \ldots, \infty; \end{array} \tag{19}$$

где

$$A(q^2 y + qy^2, 0) = A(0, y), \tag{20}$$

где через $A(x,y)$ обозначается производящая функция.

Доказательство. Покажем, что функции $\chi_{n,2^n-1}(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{array}{ll} \chi_{n,2^n-1}(q^2 t) & = A_{n,0}\left[q^2\chi(t) + q\chi(qt)\right] + B_{n,0}; \\ \chi_{n,2^n-1}(1 - q^m + q^{m+2}t) & = qA_{n,m-1}\chi(q + q^2 t) + A_{n,m}\left[q^2\chi(t) + q\chi(qt)\right] + B_{n,m}, \\ & \quad m = 1, 2, \ldots, \infty; \end{array} \tag{21}$$

где

$$\begin{array}{l} A_{n,1} = q^2 A_{n+1,0}, \\ A_{n,m} = q^2 A_{n+1,m-1} + qA_{n+1,m-2}, \\ B_{n,0} = \sum_{k=0}^{n-1} A_{k,0}, \\ B_{n,1} = q^2 B_{n+1,0} + qB_{n,0}, \\ B_{n,m} = q^2 B_{n+1,m-1} + qB_{n+1,m-2}, \quad m = 2, 3, \ldots, \infty. \end{array} \tag{22}$$

Подставляя (18) в (6), получим

$$\chi_{n+1,2^{n+1}-2}(t) = A_{n,0}\chi(t) + B_{n,0}, \tag{23}$$

где $B_{n,0}$ задано в (22).

Подставляя (23) в первое уравнение (8), получим первое уравнение в (21).

Из второго уравнения (8) имеем

$$\chi_{n,2^n-1}(q^2+q^3t) = q^2\chi_{n+1,2^{n+1}-1}(q^2t) + q\chi_{n+1,2^{n+1}-2}(q+q^2t) =$$
$$= qA_{n,0}\chi(q+q^2t) + qB_{n,0} + q^2A_{n+1,0}\left[q^2\chi(t) + q\chi(qt)\right] + q^2B_{n+1,0}.$$

Используя первое и четвертое равенство в (22), получим второе уравнение в (21) при $m=1$.

Из третьего уравнения (8) имеем

$$\chi_{n,2^n-1}(1-q^m+q^{m+2}t) = q^2\chi_{n+1,2^{n+1}-1}(1-q^{m-1}+q^{m+1}t)+q\chi_{n+1,2^{n+1}-1}(1-q^{m-2}+q^mt) =$$
$$= q^3A_{n+1,m-2}\chi(q+q^2t) + q^2A_{n+1,m-1}\left[q^2\chi(t)+q\chi(qt)\right] + q^2B_{n+1,m-1}+$$
$$+ q^2A_{n+1,m-3}\chi(q+q^2t) + qA_{n+1,m-2}\left[q^2\chi(t)+q\chi(qt)\right] + qB_{n+1,m-2}.$$

Используя второе и пятое равенство в (22), получим второе уравнение в (21) при $m>1$.

Из уравнений (22) найдем уравнение для производящей функции (12):

$$A(x,y) - A(x,0) = q^2x^{-1}y\left(A(x,y) - A(0,y)\right) + qx^{-1}y^2\left(A(x,y) - A(0,y)\right).$$

Следовательно,

$$A(x,y)\left(x - q^2y - qy^2\right) = xA(x,0) - (q^2y+qy^2)A(0,y). \tag{24}$$

При $x = q^2y + qy^2$ получаем (20).

□

Лемма 4. *Пусть для некоторых величин* $A_{0,m}\geq 0$, $\sum_{m=0}^{\infty}A_{0,m}=1$ *функция* $\chi(t)$ *удовлетворяет равенствам* (19), *пусть производящая функция* $A(x,y)$ *удовлетворяет уравнению* (24) *и коэффициенты* $A_{n,0}\geq 0$, *тогда функция* $\gamma(t)$ *удовлетворяет уравнению* (18).

Доказательство. Индукцией по n покажем, что функции $\chi_{n,2^n-1}(t)$ удовлетворяют системе уравнений (21), функции $\chi_{n,2^n-2}(t)$ – уравнению (23), а коэффициенты $A_{n,m}$, $B_{n,m}$ – уравнениям (22).

При $n=0$ функции $\chi_{n,2^n-1}(t)$ удовлетворяют системе уравнений (21) по условию леммы. Предположим, что условия выполнены для некоторого n и покажем, что они выполнены для $n+1$.

Применим Лемму 1 из работы [10], в которой утверждается, что для ограниченной функции $\chi_{n+1,2^{n+1}-1}(t)$

$$\chi_{n+1,2^{n+1}-1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kq^{k-1}\chi_{n,2^n-1}\left(1-q^{k+2}(1-t)\right). \tag{25}$$

Подставляя (21), получим

$$\chi_{n+1,2^{n+1}-1}(q^2t) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{k-1}\left[qA_{n,k+1}\chi(q+q^2t) + A_{n,k+2}\left(q^2\chi(t)+q\chi(qt)\right) + B_{n,k+2}\right] =$$
$$= \chi(q+q^2t)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^k A_{n,k+1} +$$
$$+ \left(q^2\chi(t)+q\chi(qt)\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{k-1} A_{n,k+2} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{k-1} B_{n,k+2}.$$

Из уравнения для производящей функции (24) имеем

$$A(x,-q) = A(x,0),$$

поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^k A_{n,k+1} = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{k-1} A_{n,k+2} = q^{-2}A_{n,1} = A_{n+1,0}. \tag{26}$$

Аналогично показывается, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{k-1} B_{n,k+2} = B_{n+1,0}.$$

Следовательно,

$$\chi_{n+1,2^{n+1}-1}(q^2t) = A_{n+1,0}\left(q^2\chi(t)+q\chi(qt)\right) + B_{n+1,0}.$$

Подставляя в (25) $t = 1 - q^m + q^{m+2}t$, получим

$$\chi_{n+1,2^{n+1}-1}(1-q^m+q^{m+2}t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{k-1}\chi_{n,2^n-1}\left(1-q^{k+m+2}+q^{k+m+4}t\right).$$

Подставляя (21), получим

$$\chi_{n+1,2^{n+1}-1}(1-q^m+q^{m+2}t) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{k-1}\left[qA_{n,k+m+1}\chi(q+q^2t) + A_{n,k+m+2}\left(q^2\chi(t)+q\chi(qt)\right) + B_{n,k+m+2}\right] =$$
$$= \chi(q+q^2t)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^k A_{n,k+m+1} +$$
$$+ \left(q^2\chi(t)+q\chi(qt)\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{k-1} A_{n,k+m+2} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{k-1} B_{n,k+m+2}.$$

Индукцией по m покажем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{k-1} A_{n,k+m+2} = A_{n+1,m}.$$

При $m = 0$ это равенство доказано в (26).

Применяя второе равенство в (22), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{k-1} A_{n,k+m+2} = \\ = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{k-1}\left[q^2 A_{n+1,k+m+1} + qA_{n,k+m}\right] = \\ = q^2 A_{n+2,m-1} + qA_{n+2,m-2} = A_{n+1,m}.$$

Аналогично показывается, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{k-1} B_{n,k+m+2} = B_{n+1,m}.$$

Следовательно,

$$\chi_{n+1,2^{n+1}-1}(1 - q^m + q^{m+2}t) = qA_{n+1,m-1}\chi(q + q^2 t) + A_{n+1,m}\left(q^2\chi(t) + q\chi(qt)\right) + B_{n+1,m}.$$

Итак, функции $\chi_{n,2^n-1}(t)$ удовлетворяют системе уравнений (21).

Покажем, что, функции $\chi_{n+1,2^{n+1}-2}(t)$ удовлетворяют уравнению (23). Из второго уравнения (6), имеем

$$\chi_{n+1,2^{n+1}-2}(q + q^2 t) = q^{-1}\chi_{n,2^n-1}(q^2 + q^3 t) - q\chi_{n+1,2^{n+1}-1}(q^2 t) = \\ = A_{n,0}\chi(q + q^2 t) + q^{-1}A_{n,1}\left(q^2\chi(t) + q\chi(qt)\right) + q^{-1}B_{n,1} - \\ - qA_{n+1,0}\left(q^2\chi(t) + q\chi(qt)\right) - qB_{n+1,0} = \\ = A_{n,0}\chi(q + q^2 t) + \left[q^{-1}A_{n,1} - qA_{n+1,0}\right]\left(q^2\chi(t) + q\chi(qt)\right) + q^{-1}B_{n,1} - qB_{n+1,0} = \\ = A_{n,0}\chi(q + q^2 t) + B_{n,0}.$$

Индукцией по m покажем, что уравнение

$$\chi_{n+1,2^{n+1}-2}(t) = A_{n,0}\chi(t) + B_{n,0},$$

выполняется при $t \geq q^m$. При $m = 1$ это доказано.

Из третьего уравнения (6), имеем

$$\chi_{n+1,2^{n+1}-2}(qt) = q^{-1}\chi_{n,2^n-1}(q^2 t) - q\chi_{n+1,2^{n+1}-2}(t) = \\ = +q^{-1}A_{n,0}\left(q^2\chi(t) + q\chi(qt)\right) + q^{-1}B_{n,0} - qA_{n,0}\chi(t) - qB_{n,0} = \\ = A_{n,0}\chi(qt) + B_{n,0}.$$

Следовательно, получаем, что функция $\gamma(t)$ удовлетворяет уравнению (18).

$\square$

Перейдем к доказательству теоремы.

Определим систему подмножеств $Q_n \subset [0,1]$ по правилу:

$$Q_1 = \{0, q^2, q, 1\};$$

$t \in Q_{n+1}$, если

$$\begin{array}{ll} \frac{t}{q^2}, \frac{t}{q} \in Q_n, & t \le q^2; \\ \frac{t-q^2}{q}, \frac{t}{q} \in Q_n, & q^2 \le t \le q; \\ \frac{t-q^2}{q}, \frac{t-q}{q^2} \in Q_n, & q \le t. \end{array}$$

Отметим, что при построении множеств можно использовать следующее свойство:

$$Q_{n+1} \subset qQ_n \cup q^2 + qQ_n.$$

Покажем, что существует функция $\chi^{(n)}(t)$ такая, что

$$\chi^{(n)}(t_k) = a_k, \quad \forall t_k \in Q_n.$$

Для построения такой функции выберем функцию $\gamma^{(n)}(t)$

$$\gamma^{(n)}(t,\omega) = \begin{cases} \alpha\gamma_0^{(n-1)}(2t), & 0 \le t \le 0.5; \\ \alpha + (1-\alpha)\gamma_1^{(n-1)}(2t-1), & 0.5 \le t \le 1; \end{cases}$$

а функции $\gamma_0^{(n-1)}(t)$, $\gamma_1^{(n-1)}(t)$ строятся по соответствующим функциям $\chi_0^{(n-1)}(t)$, $\chi_1^{(n-1)}(t)$, которые задаются на множестве Q_{n-1}.

На множестве Q_1 функции $\gamma_i^{(0)}(t)$ строятся по леммам 2, 4, причем соответствующую функцию $\chi_0^{(0)}(t)$ достаточно задать только в точке q, а функцию $\chi_1^{(0)}(t)$ – только в точке q^2.

$\square$

Список литературы / References

[1] Falconer K. J., *Fractal geometry : Mathematical Foundation and Applications*, John Wiley & Sons, NY USA, 1990.

[2] Hutchinson J. E., “Fractals and self-similarity”, *Indiana Univ. Math. J.*, **30** (1981), 713–747.

[3] Mauldin R. D. and Williams S. C., “Random Recursive Constructions: Asymptotic Geometric and Topological Properties”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **295**:1 (1986), 325–346.

[4] Timofeev E. A., “Selection of a Metric for the Nearest Neighbor Entropy Estimators”, *Journal of Mathematical Sciences*, **203**:6 (2014), 892–906.

[5] Kaltchenko A., Timofeeva N., “Entropy Estimators with Almost Sure Convergence and an $O(n^{-1})$ Variance”, *Advances in Mathematics of Communications*, **2**:1 (2008), 1–13.

[6] Kaltchenko A., Timofeeva N., “Rate of convergence of the nearest neighbor entropy estimator”, *AEU – International Journal of Electronics and Communications*, **64**:1 (2010), 75–79.

[7] Тимофеева Н. Е., “Построение оценки энтропии для специальной метрики и произвольной функции”, *Модел. и анализ информ. систем*, **20**:6 (2013), 174-–178; [Timofeeva N. E., “Construction of Entropy Estimator with Special Metric and Arbitrary Function”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **20**:6 (2013), 174-–178, (in Russian).]

[8] Timofeev E. A., “Bias of a nonparametric entropy estimator for Markov measures”, *Journal of Mathematical Sciences*, **176**:2 (2011), 255–269.

[9] Timofeev E. A., “Statistical Estimation of measure invariants”, *St.Petersburg Math. J.*, **17**:3 (2006), 527–551.

[10] Тимофеев Е. А., “Существование несмещенной оценки энтропии для специальной меры Бернулли”, *Модел. и анализ информ. систем*, **24**:5 (2017), 521—536; [Timofeev E. A., “Existence of an unbiased entropy estimator for the special Bernoulli measure”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:5 (2017), 521—536, (in Russian).]

Timofeev E. A., "Existence of an Unbiased Consistent Entropy Estimator for the Special Bernoulli Measure", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **26**:2 (2019), 267–278.

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-2-267-278

Abstract. Let $\Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ be a space of right-sided infinite sequences drawn from a finite alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$,

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k| 2^{-k}$$

– a metric on $\Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, and μ – a probability measure on Ω. Let $\boldsymbol{\xi_0}, \boldsymbol{\xi_1}, \dots, \boldsymbol{\xi_n}$ be independent identically distributed points on Ω. We study the estimator $\eta_n^{(k)}(\gamma)$ of the reciprocal of the entropy $1/h$ that are defined as

$$\eta_n^{(k)}(\gamma) = k \left(r_n^{(k)}(\gamma) - r_n^{(k+1)}(\gamma) \right),$$

where

$$r_n^{(k)}(\gamma) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \gamma \left(\min_{i: i \neq j}{}^{(k)} \rho(\boldsymbol{\xi_i}, \boldsymbol{\xi_j}) \right),$$

$\min^{(k)}\{X_1, \dots, X_N\} = X_k$, if $X_1 \le X_2 \le \dots \le X_N$. Number k and a function $\gamma(t)$ are auxiliary parameters. The main result of this paper is
Theorem. Let μ be the Bernoulli measure with probabilities $p_0, p_1 > 0$, $p_0 + p_1 = 1$, $p_0 = p_1^2$, then $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ some continuous function $\gamma(t)$ such that

$$\left| \mathsf{E}\eta_n^{(k)}(\gamma) - \frac{1}{h} \right| < \varepsilon, \quad \mathsf{Var}\ \eta_n^{(k)}(\gamma) \to 0,\ n \to \infty.$$

Keywords: measure, metric, entropy, estimator, unbias, self-similar, Bernoulli measure

On the authors:
Timofeev Evgeniy Alexandrovich,orcid.org/0000-0002-3094-4390, ScD, professor
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150003, Russia, e-mail: timofeevEA@gmail.com