Моделирование и анализ информационных систем. Т. 26, №2 (2019), с. 279–296
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 26, No 2 (2019), pp. 279–296

Computing methodologies and applications

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-2-279-296

УДК 514.17+517.51+519.6

Линейная интерполяция на евклидовом шаре в $\mathbb{R}^n$

Невский М. В., Ухалов А. Ю.

Поступила в редакцию 8 декабря 2018
После доработки 21 февраля 2019
Принята к публикации 25 февраля 2019

Аннотация. Пусть $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, R > 0$. Через $B = B(x^{(0)}; R)$ обозначим евклидов шар в $\mathbb{R}^n$, задаваемый неравенством $\|x - x^{(0)}\| \leq R$, $\|x\| := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$. Положим $B_n := B(0,1)$. Под $C(B)$ будем понимать пространство непрерывных функций $f : B \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{C(B)} := \max_{x\in B} |f(x)|$, под $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — совокупность многочленов от n переменных степени ≤ 1, то есть линейных функций на $\mathbb{R}^n$. Пусть $x^{(1)}, \ldots, x^{(n+1)}$ — вершины n-мерного невырожденного симплекса $S \subset B$. Интерполяционный проектор $P : C(B) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, соответствующий S, определяется равенствами $Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right)$. Через $\|P\|_B$ обозначим норму P как оператора из $C(B)$ в $C(B)$. Определим $\theta_n(B)$ как минимальную величину $\|P\|_B$ при условии $x^{(j)} \in B$. В статье получена формула для вычисления $\|P\|_B$ через $x^{(0)}$, R и коэффициенты базисных многочленов Лагранжа, соответствующих S. Более подробно исследован случай, когда S — правильный симплекс, вписанный в B_n. Доказано, что в этой ситуации справедливо равенство $\|P\|_{B_n} = \max\{\psi(a), \psi(a+1)\}$, где $\psi(t) = \frac{2\sqrt{n}}{n+1}\big(t(n+1-t)\big)^{1/2} + \left|1 - \frac{2t}{n+1}\right|$ $(0 \leq t \leq n+1)$, целое a имеет вид $a = \left\lfloor \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} \right\rfloor$. Для такого проектора $\sqrt{n} \leq \|P\|_{B_n} \leq \sqrt{n+1}$, причём равенство $\|P\|_{B_n} = \sqrt{n+1}$ имеет место тогда и только тогда, когда число $\sqrt{n+1}$ является целым. Приводятся точные значения $\theta_n(B_n)$ для $1 \leq n \leq 4$. Даются результаты компьютерных вычислений, дополняющие теоретический анализ. Обсуждаются некоторые другие вопросы, связанные с интерполяцией на евклидовом шаре, в том числе открытые.

Ключевые слова: n-мерный симплекс, n-мерный шар, линейная интерполяция, проектор, норма

Для цитирования: Невский М. В., Ухалов А. Ю., "Линейная интерполяция на евклидовом шаре в $\mathbb{R}^n$", *Моделирование и анализ информационных систем*, **26**:2 (2019), 279–296.

Об авторах:
Невский Михаил Викторович, orcid.org/0000-0002-6392-7618, доктор физ.-мат. наук, доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: mnevsk55@yandex.ru

Ухалов Алексей Юрьевич, orcid.org/0000-0001-6551-5118, кандидат физ.-мат. наук,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: alex-uhalov@yandex.ru

1. Введение

Начнём с основных определений и обозначений. Всюду далее $n \in \mathbb{N}$. Элемент $x \in \mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Через $e_1, \ldots, e_n$ обозначим канонический базис $\mathbb{R}^n$. Положим

$$\|x\| := \sqrt{(x,x)} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2},$$

$$B\left(x^{(0)};R\right) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^{(0)}\| \le R\} \quad \left(x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, R > 0\right),$$

$$B_n := B(0;1), \quad Q_n := [0,1]^n, \quad Q_n' := [-1,1]^n.$$

Всюду далее S есть невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Через $c(S)$ обозначим центр тяжести S. Под τS будем понимать результат гомотетии S относительно точки $c(S)$ с коэффициентом τ. Под $\mathrm{ver}(G)$ понимается совокупность вершин выпуклого многогранника G. Для замкнутого ограниченного $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ введём в рассмотрение величину $\xi(\Omega;S) := \min\{\sigma \ge 1 : \Omega \subset \sigma S\}$. Это число мы называем *коэффициентом поглощения (absorption index) множества Ω симплексом S.*

Обозначим вершины симплекса S через $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)$, $1 \le j \le n+1$. Матрица вершин

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}$$

является невырожденной. Положим $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$. Линейные многочлены $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$, коэффициенты которых составляют столбцы $\mathbf{A}^{-1}$, обладают свойством $\lambda_j\left(x^{(k)}\right) = \delta_j^k$. Мы называем λ_j *базисными многочленами Лагранжа, соответствующими S.* Числа $\lambda_j(x)$ являются барицентрическими координатами точки $x \in \mathbb{R}^n$ относительно S. Симплекс S задаётся системой линейных неравенств $\lambda_j(x) \ge 0$. Подробнее о многочленах λ_j см. [4, гл. 1].

Положим

$$\xi_n(\Omega) := \min\{\xi(\Omega;S) : \ S - n\text{-мерный симплекс}, \mathrm{ver}(S) \subset \Omega,\ \mathrm{vol}(S) \ne 0\},$$

$\xi_n := \xi_n(Q_n)$. Разнообразные оценки чисел ξ_n получены в [2–5, 14] и других работах авторов. Здесь лишь отметим, что $n \le \xi_n < n+1$. Однако точные значения ξ_n пока известны лишь для $n = 2$, $n = 5$, $n = 9$ и бесконечной совокупности тех n, для каждого из которых существует матрица Адамара порядка $n+1$. Во всех этих ситуациях, кроме $n = 2$, выполняется $\xi_n = n$, в то время как $\xi_2 = \frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 = 2.34\ldots$ До сих пор $n = 2$ остаётся единственным чётным n, для которого ξ_n вычислено точно. Число ξ_n для евклидова шара, т. е. точное значение $\xi_n(B_n)$, найдено в [7]. Именно для любого $S \subset B_n$ верно $\xi(B_n;S) \ge n$, причём равенство имеет место лишь для правильного симплекса S, вписанного в граничную сферу (для краткости в дальнейшем будем говорить, что такой симплекс вписан в шар). Таким образом, всегда $\xi_n(B_n) = n$.

Через $C(\Omega)$ обозначим пространство непрерывных функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ с равномерной нормой

$$\|f\|_{C(\Omega)} := \max_{x \in Q_n} |f(x)|.$$

Под $\Pi_1\left(\mathbb{R}^n\right)$ будем понимать совокупность многочленов от n переменных степени не выше 1 или линейных функций на $\mathbb{R}^n$.

Пусть $x^{(j)} \in \Omega$, $1 \le j \le n+1$, — вершины n-мерного невырожденного симплекса S. Будем говорить, что интерполяционный проектор $P : C(\Omega) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ соответствует симплексу S, если его узлы интерполяции совпадают с точками $x^{(j)}$. Этот проектор определяется равенствами $Pf\left(x^{(j)}\right) = f_j := f\left(x^{(j)}\right)$. Справедлив аналог интерполяционной формулы Лагранжа

$$Pf(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f\left(x^{(j)}\right)\lambda_j(x). \tag{1}$$

Обозначим через $\|P\|_\Omega$ норму P как оператора из $C(\Omega)$ в $C(\Omega)$. Из (1) следует, что

$$\|P\|_\Omega = \sup_{\|f\|_{C(\Omega)}=1} \|Pf\|_{C(\Omega)} = \sup_{-1\le f_j\le 1} \max_{x\in\Omega} \sum_{j=1}^{n+1} f_j\lambda_j(x).$$

Выражение $\sum f_j\lambda_j(x)$ линейно по x и $f_1, \ldots, f_{n+1}$, поэтому

$$\|P\|_\Omega = \max_{f_j=\pm 1} \max_{x\in\Omega} \sum_{j=1}^{n+1} f_j\lambda_j(x) = \max_{x\in\Omega} \max_{f_j=\pm 1} \sum_{j=1}^{n+1} f_j\lambda_j(x) = \max_{x\in\Omega} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|. \tag{2}$$

Если же Ω — выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$ (например, $\Omega = Q_n$), то на этом пути получается и более простое равенство

$$\|P\|_\Omega = \max_{x\in \mathrm{ver}(\Omega)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|.$$

Будем говорить, что точка $x \in \Omega$ является 1-*точкой* Ω *относительно* S, если для проектора $P : C(\Omega) \to \Pi_1\left(\mathbb{R}^n\right)$ с узлами в вершинах S выполняется равенство $\|P\| = \sum |\lambda_j(x)|$, причём среди чисел $\lambda_j(x)$ имеется ровно одно отрицательное. Для любого P и соответствующего S в [1, теорема 2.1] установлено соотношение

$$\frac{n+1}{2n}\Big(\|P\|_\Omega - 1\Big) + 1 \le \xi(\Omega; S) \le \frac{n+1}{2}\Big(\|P\|_\Omega - 1\Big) + 1. \tag{3}$$

Если в Ω существует 1-точка относительно S, то правое соотношение является равенством. (Последнее утверждение доказано в [1] в эквивалентном виде; понятие 1-вершины куба было введено позднее в [2].)

Через $\theta_n(\Omega)$ обозначим минимальную величину $\|P\|_\Omega$ при условии $x^{(j)} \in \Omega$. Для чисел $\theta_n := \theta_n(Q_n)$ в цикле работ первого автора доказана асимптотика $\theta_n \asymp \sqrt{n}$ (различные оценки систематизированы в [4]). В дальнейшем ряд оценок был улучшен М. В. Невским и А. Ю. Ухаловым, а также учениками второго автора (см., например, [5, 6]). На сегодняшний день точные значения θ_n известны лишь для $n = 1, 2, 3$ и 7. Именно, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5} + 1 = 1.89\ldots$, $\theta_3 = 2$, $\theta_7 = \frac{5}{2}$. Для всех этих размерностей

$$\xi_n = \frac{n+1}{2}\Big(\theta_n - 1\Big) + 1.$$

В настоящей статье рассматривается случай $\Omega = B_n$. Поскольку для $S \subset B_n$ выполняется $\xi(B_n; S) \geq n$, то для соответствующего проектора P правое неравенство из (3) даёт

$$\|P\|_{B_n} \geq 3 - \frac{4}{n+1}. \tag{4}$$

Таким образом, всегда $\theta_n(B_n) \geq 3 - \frac{4}{n+1}$.

Заметим также, что если для интерполяционного проектора $P : C(B_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ в (4) выполняется равенство, то соответствующий симплекс S является правильным и вписан в B_n. Действительно, в этом случае

$$\frac{n+1}{2}\Big(\|P\|_{B_n} - 1\Big) + 1 = n,$$

и (3) даёт $\xi(B_n; S) \leq n$. Значит $\xi(B_n; S) = n$, а это выполняется лишь для правильного симплекса, вписанного в B_n. Поэтому из равенства $\theta_n(B_n) = 3 - \frac{4}{n+1}$ следует, что симплекс, соответствующий минимальному по норме проектору, обязательно имеет отмеченный вид.

Если S является правильным симплексом, вписанным в B_n, и существует 1-точка B_n относительно S, то соотношение (4) является равенством. Если же S не является правильным симплексом или не вписан в шар, то неравенство (4) является строгим. Как мы установим, 1-точка шара относительно вписанного правильного симплекса существует лишь при $1 \leq n \leq 4$. Начиная с $n = 5$ равенство (4) не выполняется ни при каких n и P, поэтому для $n \geq 5$ верно $\theta_n(B_n) > 3 - \frac{4}{n+1}$.

Настоящая статья содержит обоснование этого и других результатов для линейной интерполяции на шаре. В частности, мы получим точную формулу для нормы интерполяционного проектора, соответствующего вписанному правильному симплексу. Базируясь на этой формуле, мы покажем, что $\theta_n(B_n) \leq \sqrt{n+1}$, причём равенство здесь возможно лишь в случае $n = m^2 - 1$, $m \geq 2$.

2. Редукция в задаче о минимальном проекторе

Интерполяционный проектор $P : C(B_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ назовём *минимальным*, если для него $\|P\|_{B_n} = \theta_n(B_n)$. Существование минимального проектора вытекает из непрерывности $\|P\|$ как функции узлов, которую можно рассматривать на замкнутом ограниченном подмножестве пространства $\mathbb{R}^m$, $m = n(n+1)$, задаваемом ограничениями $x^{(j)} \in B_n$, $\det \mathbf{A} \geq \varepsilon_n > 0$. Покажем, что минимальный проектор может быть реализован по набору узлов, принадлежащих граничной сфере $\|x\| = 1$.

Пусть P — интерполяционный проектор с узлами $x^{(j)} \in B_n$, λ_j — базисные многочлены Лагранжа соответствующего симплекса S. Допустим, что не все $x^{(j)}$ принадлежат граничной сфере. Построим проектор P', для которого число узлов на границе B_n больше на 1, чем у исходного, и такой, что $\|P'\| \leq \|P\|$. Предположим, что узел $x^{(i)}$ проектора P лежит строго внутри B_n. Пусть z — ортогональная проекция $x^{(i)}$ на гиперплоскость $\lambda_i(x) = 0$, y — точка пересечения границы шара и прямой $(zx^{(i)})$, принадлежащая тому же полупространству, что и $x^{(i)}$. Тогда

$$0 < \sigma := \frac{\|y - x^{(i)}\|}{\|z - x^{(i)}\|} < 1.$$

Обозначим через T сжатие пространства $\mathbb{R}^n$ с коэффициентом σ относительно гиперплоскости $\lambda_i(x) = 0$ в ортогональном направлении. Рассмотрим проектор P_1 по тем же узлам, но определяемый через эллипсоид $T(B_n)$ — результат сжатия шара. Так как $x^{(i)}$ принадлежит границе $T(B_n)$, а остальные узлы лежат в гиперплоскости $\lambda_i(x) = 0$, то число узлов на границе $T(B_n)$ по сравнению с числом исходных узлов на границе B_n увеличится ровно на 1. Рассмотрим теперь обратное преобразование T^{-1}. Это невырожденное аффинное отображение переводит эллипсоид $T(B_n)$ обратно в шар B_n, а симплекс S — в некоторый симплекс $S' = T^{-1}(S)$. Очевидно, что i-я вершина S' совпадает с y, а другие вершины S' — те же, что и у S. Пусть P' — интерполяционный проектор, узлы которого находятся в вершинах S', вновь рассматриваемый на шаре B_n. Остаётся сравнить нормы проекторов. Поскольку $T(B_n) \subset B_n$, имеем

$$\|P_1\|_{T(B_n)} = \max_{x\in T(B_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| \leq \max_{x\in B_n} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| = \|P\|_{B_n}.$$

Так как пространства $C((B_n))$ и $C(B_n)$ изометричны, справедливо равенство $\|P'\|_{B_n} = \|P_1\|_{T(B_n)}$. Следовательно, $\|P'\|_{B_n} \leq \|P\|_{B_n}$.

Применяя указанную процедуру нужное число раз можно переместить все узлы интерполяции на границу шара, при этом норма проектора не возрастёт. Значит, существует минимальный проектор, все узлы которого принадлежат граничной сфере. Это свойство, в частности, может применяться при численном решении задачи минимизации нормы проектора.

3. Норма проектора при интерполяции на шаре

Пусть $B = B(x^{(0)}; R)$, $P : C(B) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — интерполяционный проектор по набору узлов $x^{(j)} \in B$, $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$ — базисные многочлены Лагранжа симплекса S, вершины которого совпадают с узлами интерполяции. Тогда, как отмечалось,

$$\|P\|_B = \max_{x\in B} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|, \tag{5}$$

см. (2) для $\Omega = B$. Дополним (5) другим выражением для нормы проектора.

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$\|P\|_B = \max_{f_j=\pm 1} \left[R \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right)^2 \right)^{1/2} + \left| \sum_{j=1}^{n+1} f_j \left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij} x_i^{(0)} + l_{n+1,j} \right) \right| \right] =$$

$$= \max_{f_j=\pm 1} \left[R \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right)^2 \right)^{1/2} + \left| \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x^{(0)}) \right| \right]. \tag{6}$$

Доказательство. В выражении для $\|P\|_B$ запишем повторный максимум в другом порядке, нежели при получении (5):

$$\|P\|_B = \max_{f_j=\pm 1} \max_{x\in B} \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x) = \max_{f_j=\pm 1} \max_{x\in B} \left| \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x) \right|. \tag{7}$$

При фиксированных f_j функция

$$\Lambda(x) := \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right) x_i + \sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{n+1,j}$$

является линейной по x. Максимум модуля $\Lambda(x)$ на шаре $B = B(x^{(0)}; R)$ достигается в одной из двух точек пересечения сферы $\|x - x^{(0)}\| = R$ и прямой, проходящей через центр шара $x^{(0)}$ и имеющей направляющий вектор $v = (v_1, \ldots, v_n)$, где $v_i = \sum\limits_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij}$. Эти точки имеют вид

$$x_+ = x^{(0)} + \frac{R}{\|v\|} v, \quad x_- = x^{(0)} - \frac{R}{\|v\|} v.$$

Функция $L(x) := \Lambda(x) - \Lambda(0)$ является аддитивной и однородной, поэтому

$$L(x_+) = L\left(x^{(0)} + \frac{R}{\|v\|} v \right) = L\left(x^{(0)} \right) + \frac{R}{\|v\|} L(v),$$

$$\Lambda(x_+) = L(x_+) + \Lambda(0) = \Lambda\left(x^{(0)} \right) + \frac{R}{\|v\|} \Big[\Lambda(v) - \Lambda(0) \Big].$$

Заметим, что

$$\Lambda(v) - \Lambda(0) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right) v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right)^2 = \|v\|^2,$$

поэтому $\Lambda(x_+) = \Lambda\left(x^{(0)}\right) + R\|v\|$. Аналогично $\Lambda(x_-) = \Lambda\left(x^{(0)}\right) - R\|v\|$. Тем самым,

$$\max_{x\in B} |\Lambda(x)| = \max(|\Lambda(x_+)|, |\Lambda(x_-)|) = R\|v\| + \left| \Lambda\left(x^{(0)}\right) \right|.$$

Равенство (7) теперь даёт

$$\|P\|_B = \max_{f_j=\pm 1} \max_{x\in B} |\Lambda(x)| = \max_{f_j=\pm 1} \left[R\|v\| + \left| \Lambda\left(x^{(0)}\right) \right| \right].$$

Остаётся учесть, что

$$\|v\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right)^2 \right)^{1/2},$$

$$\Lambda\left(x^{(0)}\right) = \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x^{(0)}) = \sum_{j=1}^{n+1} f_j \left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij} x_i^{(0)} + l_{n+1,j} \right).$$

Теорема доказана. □

В случае, когда центр тяжести симплекса совпадает с центром шара, формула (6) заметно упрощается.

Следствие 1. *Пусть* $c(S) = x^{(0)}$, *тогда*

$$\|P\|_B = \max_{f_j=\pm 1} \left[R \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right)^2 \right)^{1/2} + \frac{1}{n+1} \left| \sum_{j=1}^{n+1} f_j \right| \right]. \tag{8}$$

Доказательство. Числа $\lambda_j(x^{(0)})$ суть барицентрические координаты точки $x^{(0)}$ относительно симплекса S. В силу равенств

$$x^{(0)} = c(S) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} x^{(j)}$$

имеем $\lambda_j(x^{(0)}) = \frac{1}{n+1}$ при любом j. Поэтому (8) получается из (6). □

4. Норма проектора для правильного симплекса, вписанного в шар

В этом пункте S — правильный симплекс, вписанный в n-мерный шар $B = (x^{(0)}; R)$, $P : C(B) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — соответствующий интерполяционный проектор. Очевидно, $\|P\|_B$ не зависит ни от центра $x^{(0)}$ и радиуса R шара, ни от выбора правильного симплекса, вписанного в этот шар. Иначе говоря, $\|P\|_B$ есть функция размерности n. В этом пункте мы получим явный вид этой функции и установим её оценки.

Для $0 \le t \le n+1$ введём в рассмотрение функцию

$$\psi(t) := \frac{2\sqrt{n}}{n+1} \Big(t(n+1-t) \Big)^{1/2} + \left| 1 - \frac{2t}{n+1} \right|. \tag{9}$$

Обозначим $a := \left\lfloor \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} \right\rfloor$, где $\lfloor s \rfloor$ — целая часть s.

Теорема 2. *Справедливы соотношения*

$$\|P\|_B = \max\{\psi(a), \psi(a+1)\}, \tag{10}$$

$$\sqrt{n} \le \|P\|_B \le \sqrt{n+1}. \tag{11}$$

При этом $\|P\|_B = \sqrt{n}$ *лишь в случае* $n = 1$, *а равенство* $\|P\|_B = \sqrt{n+1}$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $\sqrt{n+1}$ *— целое число.*

Доказательство. Сначала докажем (10). Если $n = 1$, то $\psi(t) = \sqrt{t(2-t)} + |1-t|$, $a = 0$, $\psi(a) = \psi(a+1) = 1$. Так как $\|P\|_B = 1$, то равенство (10) верно.

Пусть $n \ge 2$. Рассмотрим симплекс S с вершинами

$$x^{(1)} = e_1, \quad \ldots, \quad x^{(n)} = e_n, \quad x^{(n+1)} = \left(\frac{1-\sqrt{n+1}}{n}, \ldots, \frac{1-\sqrt{n+1}}{n} \right).$$

Этот симплекс является правильным, так как длина любого его ребра равна $\sqrt{2}$. Симплекс S вписан в шар $B = B(x^{(0)}; R)$, где

$$x^{(0)} = c(S) = \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{1}{n+1}}}{n}, \ldots, \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{n+1}}}{n} \right), \quad R = \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

Заметим, что $(n+1)$-я вершина S получается перемещением нулевой вершины координатного симплекса $x_i \geq 0$, $\sum x_i \leq 1$ в сторону от гиперплоскости $\sum x_i = 1$. Для нас важно, что S переходит в себя при любом переобозначении координат. В силу замечания, сделанного в начале пункта, достаточно найти $\|P\|_B$ именно для этого симплекса S.

Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-1}$, соответствующие S, имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ -\tau & -\tau & \ldots & -\tau & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \begin{pmatrix} \sigma & -\tau & \ldots & -\tau & -1 \\ -\tau & \sigma & \ldots & -\tau & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\tau & -\tau & \ldots & \sigma & -1 \\ \tau & \tau & \ldots & \tau & 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Мы положили

$$\sigma := \frac{(n-1)\sqrt{n+1} + 1}{n}, \quad \tau := \frac{\sqrt{n+1} - 1}{n}. \quad (13)$$

Поскольку $c(S) = x^{(0)}$, для вычисления $\|P\|_B$ воспользуемся формулой (8), в которой возьмём $R = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$:

$$\|P\|_B = \max_{f_j = \pm 1} \left[\sqrt{\frac{n}{n+1}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right)^2 \right)^{1/2} + \frac{1}{n+1} \left| \sum_{j=1}^{n+1} f_j \right| \right].$$

Здесь l_{ij} — элементы матрицы $\mathbf{A}^{-1}$, см. (12).

Обозначим через k число f_j, равных -1. Тогда число f_j, равных 1, есть $n+1-k$. Так как S не меняется при переобозначении координат, будем считать, что $f_1 = \ldots = f_k = -1$, $f_{k+1} = \ldots = f_{n+1} = 1$. В силу того, что максимизируемая величина не меняется при перемене знака сразу у всех f_j, можно ограничиться интервалом $1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}$. Итак,

$$\|P\|_B = \max_{1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}} \left[\sqrt{\frac{n}{n+1}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right)^2 \right)^{1/2} + \frac{n+1-2k}{n+1} \right], \quad (14)$$

причём здесь $f_j = -1$ для $1 \leq j \leq k$ и $f_j = 1$ для остальных j. Число $n+1-2k$ равно сумме, стоящей под знаком модуля. Учитывая множитель $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, стоящий в равенстве для $\mathbf{A}^{-1}$, преобразуем величину

$$W := (n+1) \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right)^2.$$

Чтобы использовать явный вид l_{ij}, представим эту сумму в виде

$$W=(n+1)\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij}\right)^2+(n+1)\sum_{i=k+1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij}\right)^2=W_1+W_2.$$

Применение (12) и указанного распределения значений f_j даёт

$$W_1=\sum_{i=1}^{k}(-\sigma+(k-1)\tau-(n-k)\tau-1)^2=k(2k\tau-\alpha)^2,$$

$$W_2=\sum_{i=k+1}^{n}(k\tau+\sigma-(n-1-k)\tau-1)^2=(n-k)(2k\tau+\beta)^2,$$

где $\alpha=\sigma+(n+1)\tau+1$, $\beta=\sigma-(n-1)\tau-1$. Из (13) следует, что $\alpha=2\sqrt{n+1}$, $\beta=0$, поэтому

$$W=4k(k\tau-\sqrt{n+1})^2+(n-k)\cdot 4k^2\tau^2=k^2(-8\sqrt{n+1}\tau+4n\tau^2)+4k(n+1)=$$

$$=-4k^2+4k(n+1)=4k(n+1-k).$$

Таким образом,

$$\|P\|_B=\max_{1\le k\le\frac{n+1}{2}}\left[\sqrt{\frac{n}{n+1}}\left(\frac{1}{n+1}W\right)^{1/2}+\frac{n+1-2k}{n+1}\right]=$$

$$=\max_{1\le k\le\frac{n+1}{2}}\left[\frac{2\sqrt{n}}{n+1}\big(k(n+1-k)\big)^{1/2}+1-\frac{2k}{n+1}\right].$$

Принимая во внимание (9), приходим к равенству

$$\|P\|_B=\max_{1\le k\le\frac{n+1}{2}}\psi(k). \tag{15}$$

Осталось показать, что последний максимум совпадает с наибольшим из чисел $\psi(a)$ и $\psi(a+1)$, где $a=\left\lfloor\frac{n+1}{2}-\frac{\sqrt{n+1}}{2}\right\rfloor$. Для этого проанализируем поведение $\psi(t)$ на всём промежутке $[0,n+1]$.

Функция

$$\psi(t)=\frac{2\sqrt{n}}{n+1}\Big(t(n+1-t)\Big)^{1/2}+\left|1-\frac{2t}{n+1}\right|,\quad 0\le t\le n+1$$

обладает свойствами $\psi(t)>0$, $\psi(0)=\psi(n+1)=1$, $\psi\left(\frac{n+1}{2}\right)=\sqrt{n}$, $\psi(n+1-t)=\psi(t)$. График $\psi(t)$ симметричен относительно прямой $t=\frac{n+1}{2}$. На каждой из половин отрезка $[0,n+1]$ функция $\psi(t)$ является вогнутой как сумма двух вогнутых функций. Действительно, для $0\le t\le\frac{n+1}{2}$

$$\psi(t)=\varphi_1(t)+\varphi_2(t),\quad \varphi_1(t):=\frac{2\sqrt{n}}{n+1}\Big(t(n+1-t)\Big)^{1/2},\quad \varphi_2(t):=1-\frac{2t}{n+1},$$

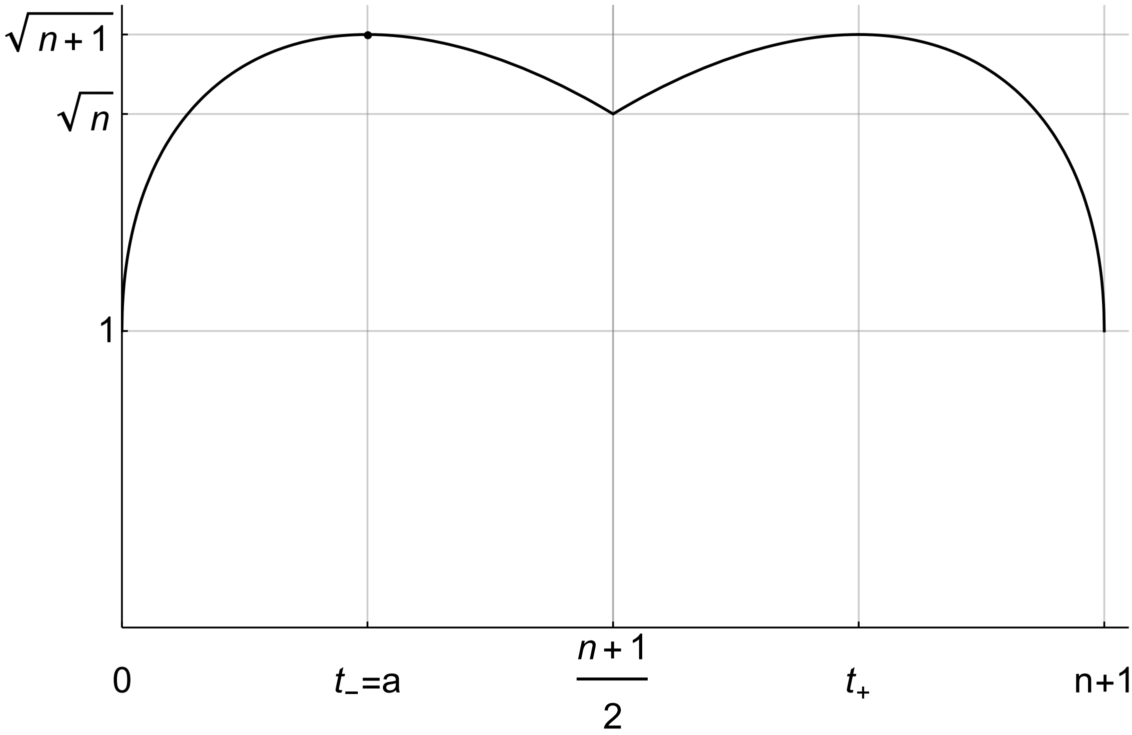

Рис. 1: График $\psi(t)$ для $n = 3$. Здесь $n + 1 = 4$, $t_- = a = 1$
Fig. 1: Graph of $\psi(t)$ for $n = 3$. Here $n + 1 = 4$, $t_- = a = 1$

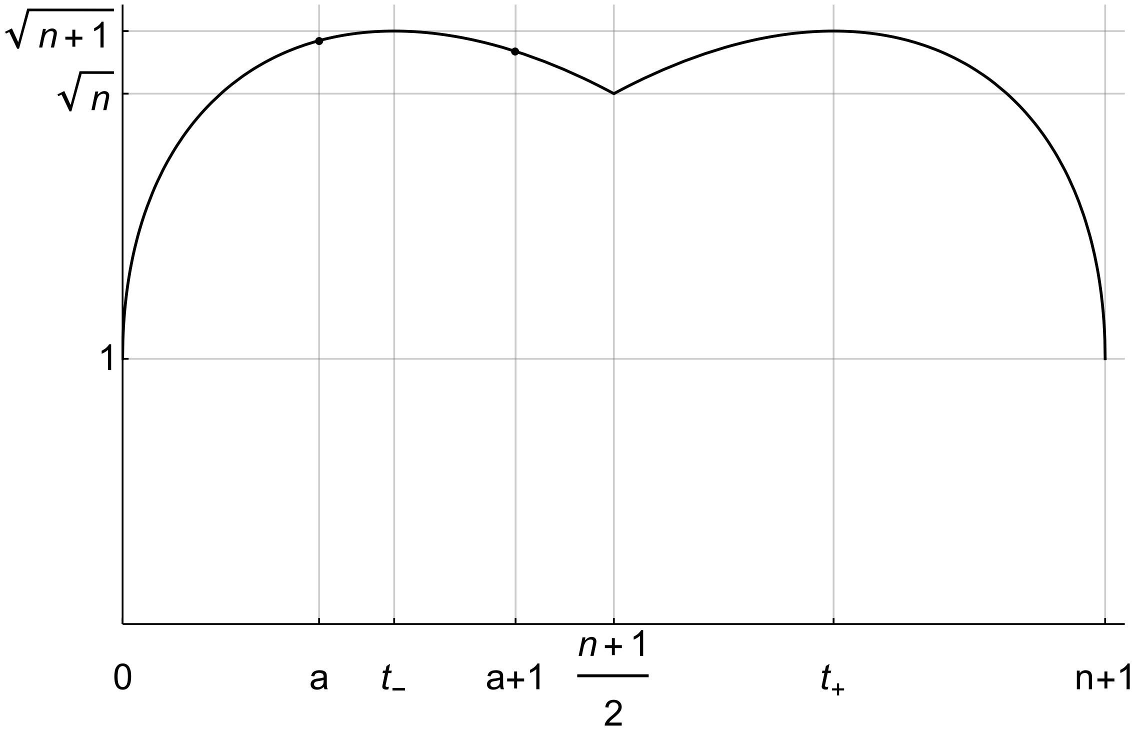

Рис. 2: График $\psi(t)$ для $n = 4$. Здесь $n + 1 = 5$, $a = 1$, $t_- = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$
Fig. 2: Graph of $\psi(t)$ for $n = 4$. Here $n + 1 = 5$, $a = 1$, $t_- = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$

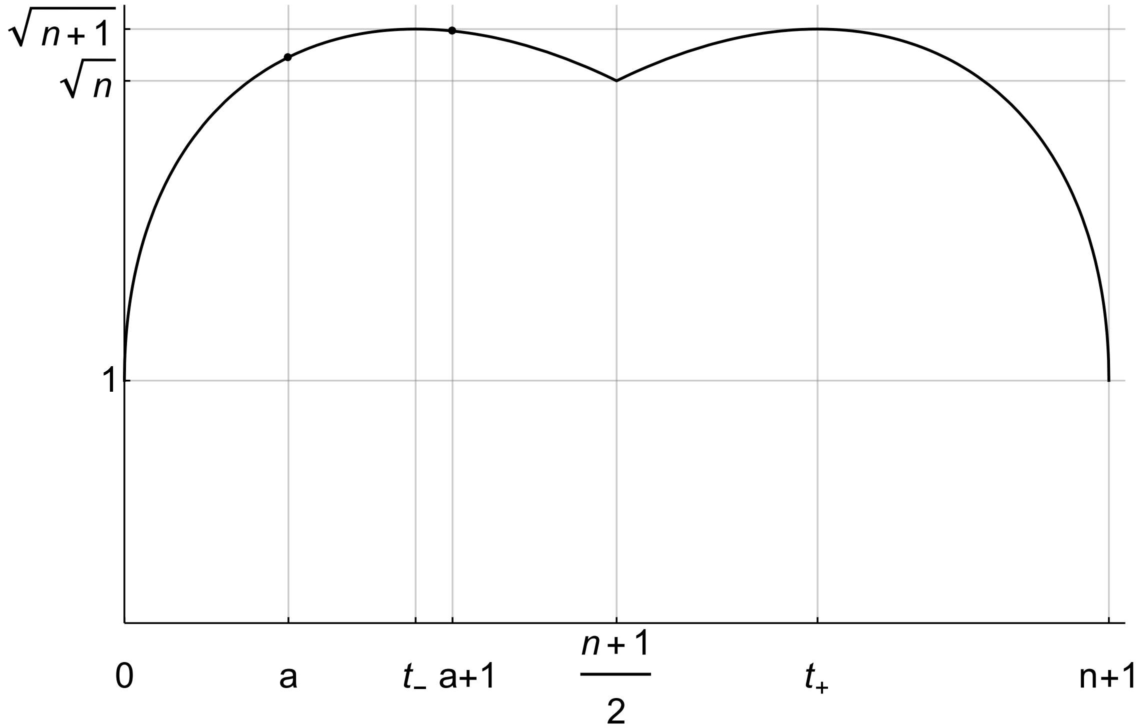

Рис. 3: График $\psi(t)$ для $n = 5$. Здесь $n + 1 = 5$, $a = 1$, $t_- = \frac{6-\sqrt{6}}{2}$
Fig. 3: Graph of $\psi(t)$ for $n = 5$. Here $n + 1 = 5$, $a = 1$, $t_- = \frac{6-\sqrt{6}}{2}$

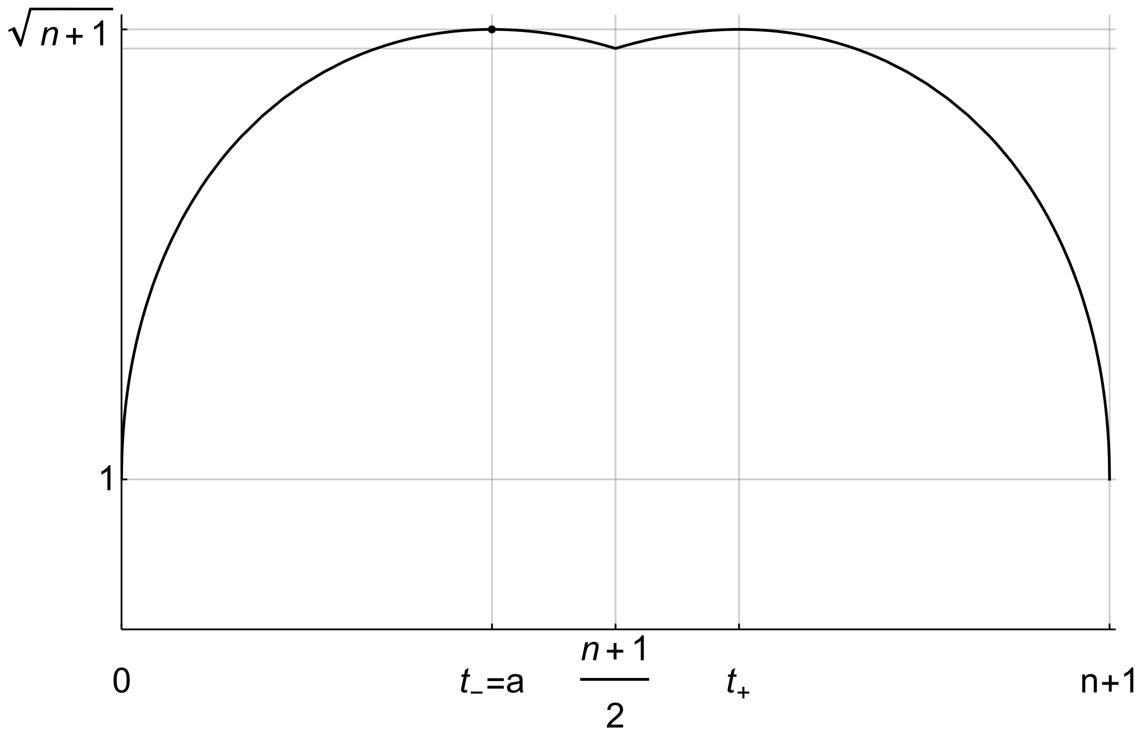

Рис. 4: График $\psi(t)$ для $n = 15$. Здесь $n + 1 = 16$, $t_- = a = 6$
Fig. 4: Graph of $\psi(t)$ for $n = 15$. Here $n + 1 = 16$, $t_- = a = 6$

причём $\varphi_1(t)$ вогнута как суперпозиция вогнутой функции $t(n+1-t)$ и возрастающей вогнутой функции $\sqrt{t}$, а $\varphi_2(t)$ является линейной. Производная $\psi'(t)$ обращается в нуль только в двух точках

$$t_- := \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2}, \quad t_+ := \frac{n+1}{2} + \frac{\sqrt{n+1}}{2},$$

внутренних соответственно для $\left[0, \frac{n+1}{2}\right]$ и $\left[\frac{n+1}{2}, n+1\right]$. Из вогнутости $\psi(t)$ на каждом из этих отрезков следует, что

$$\max_{0\le\psi(t)\le n+1} \psi(t) = \psi(t_-) = \psi(t_+) = \sqrt{n+1}.$$

При этом t_- — единственная точка максимума $\psi(t)$ на левой, а t_+ — на правой половине отрезка $[0, n+1]$. Значит, $\psi(t)$ возрастает при $0 \le t \le t_-$ и убывает при $t_- \le t \le \frac{n+1}{2}$. На левой половине $\psi(t)$ ведёт себя симметрично: возрастает при $\frac{n+1}{2} \le t \le t_+$ и убывает при $t_+ \le t \le n+1$.

Теперь ограничимся отрезком $\left[0, \frac{n+1}{2}\right]$. Так как $a = \lfloor t_- \rfloor$, то всегда $a \le t_- < a+1$. Пусть k — целое, $1 \le k \le \frac{n+1}{2}$. Из свойств $\psi(t)$ следует, что если $k < a$, то $\psi(k) < \psi(a)$, а если $k > a+1$, то $\psi(k) < \psi(a+1)$. С учётом (15) имеем

$$\|P\|_B = \max_{1\le k\le \frac{n+1}{2}} \psi(k) = \max\{\psi(a), \psi(a+1)\}.$$

Равенство (10) установлено.

Перейдём к неравенствам (11). Правое из них мы уже получили:

$$\|P\|_B = \max_{k\in\mathbb{Z}:\, 1\le k\le \frac{n+1}{2}} \psi(k) \le \max_{1\le t\le \frac{n+1}{2}} \psi(t) = \psi(t_-) = \sqrt{n+1}.$$

Опишем размерности n, для которых $\|P\|_B = \sqrt{n+1}$. Они характеризуются тем, что нестрогое неравенство в последнем соотношении является равенством, т. е. число t_- является целым.

Заметим, что каждая из точек t_- и t_+ является целочисленной тогда и только тогда, когда $\sqrt{n+1}$ есть целое число. Пусть, например,

$$t_- := \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} = d \in \mathbb{Z}.$$

Тогда $\sqrt{n+1} = n+1-2d$ — целое. Наоборот, если $\sqrt{n+1} = m \in \mathbb{Z}$, то $m(m-1)$ есть чётное число и $t_- = \frac{m(m-1)}{2}$ — целое. Утверждение для t_+ доказывается аналогично, а также выводится из предыдущего, поскольку $t_+ - t_- = \sqrt{n+1}$.

Мы получили, что для любой размерности вида $n = m^2 - 1$, m — целое, и только в этих ситуациях число t_- является целым и, значит,

$$\|P\|_B = \max_{k\in\mathbb{Z}:\, 1\le k\le \frac{n+1}{2}} \psi(k) = \max_{1\le t\le \frac{n+1}{2}} \psi(t) = \psi(t_-) = \sqrt{n+1} = m.$$

Эти равенства эквивалентны (10), поскольку в рассматриваемых случаях $a = \lfloor t_- \rfloor = t_-$ и $\|P\|_B = \psi(a)$. Для каждого из остальных n (т. е. отличных от чисел $m^2 - 1$) выполняется $\|P\| < \sqrt{n+1}$. Действительно, тогда $a < t_- < a+1$ и максимум в (15) достигается либо при $k = a$, либо при $k = a + 1$. Для любого $n \neq m^2 - 1$ норма P, т. е. максимум $\psi(k)$ по целым k из $\left[1, \frac{n+1}{2}\right]$ строго меньше, чем максимум $\psi(t)$ по всему этому промежутку.

Осталось показать, что всегда $\|P\|_B \geq \sqrt{n}$, причём для $n > 1$ это неравенство является строгим. Если $n > 3$, то $\sqrt{n+1} > 2$, поэтому

$$a + 1 = \left\lfloor \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} \right\rfloor + 1 \leq \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} + 1 < \frac{n+1}{2}.$$

Из (10) и свойств $\psi(t)$ имеем

$$\|P\|_B = \max\{\psi(a), \psi(a+1)\} \geq \psi(a+1) > \psi\left(\frac{n+1}{2}\right) = \sqrt{n} \qquad (n > 3).$$

Для $n = 2$ и $n = 3$ также верно $\|P\|_B > \sqrt{n}$. Поэтому норма P равна $\sqrt{n}$ лишь в случае $n = 1$. Теорема полностью доказана. $\square$

Будем говорить, что натуральное m есть число Адамара, если существует матрица Адамара порядка m (об этих матрицах см., например, [10–13]). В случае, когда $n+1$ — число Адамара, точная по порядку нижняя оценка $\|P\|_B \geq c\sqrt{n}$ следует из предыдущих результатов первого автора. В 2006 г. им было установлено, что при любом n

$$\theta_n(Q) \geq \chi_n^{-1}\left(\frac{1}{\nu_n}\right) > \frac{1}{e}\sqrt{n-1}. \tag{16}$$

Здесь Q — n-мерный куб, χ_n — нормализованный многочлен Лежандра степени n, ν_n — максимальный объём симплекса, содержащегося в единичном кубе $Q_n = [0,1]^n$. По поводу свойств χ_n см. [8, 9]. Доказательство соотношений (16) приведено в [4]. Предположим дополнительно, что $n + 1$ — число Адамара. Тогда существует правильный симплекс, вершины которого находятся в вершинах куба (см. [13]). Выберем в качестве Q куб, вписанный в евклидов шар B. Тогда указанный правильный симплекс, вписанный в куб, будет вписан также и в шар. Так как $Q \subset B$, то для соответствующего проектора P выполняются соотношения

$$\|P\|_B \geq \|P\|_Q \geq \theta_n(Q) \geq \chi_n^{-1}\left(\frac{1}{\nu_n}\right) > \frac{1}{e}\sqrt{n-1}.$$

5. Точные значения $\theta_n(B_n)$ для $1 \leq n \leq 4$

С помощью теоремы 2 и свойств, указанных во введении, для $n = 1, 2, 3, 4$ можно получить точные значения минимальной нормы проектора на n-мерном шаре и описать минимальные проекторы. Разумеется, $\theta_1(B_1) = 1$, но и этот случай укладывается в общую схему.

Теорема 3. *Имеют место равенства*

$$\theta_1(B_1) = 1, \quad \theta_2(B_2) = \frac{5}{3}, \quad \theta_3(B_3) = 2, \quad \theta_4(B_4) = \frac{11}{5}. \tag{17}$$

При $1 \leq n \leq 4$ равенство $\|P\|_{B_n} = \theta_n(B_n)$ выполняется лишь для проекторов, каждый из которых соответствует правильному симплексу, вписанному в B_n.

Доказательство. Вычислим норму проектора $P : C(B_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, соответствующего правильному симплексу, вписанному в B_n. По теореме 2

$$\|P\|_{B_n} = \max\{\psi(a), \psi(a+1)\},$$

где $\psi(t)$ определяется равенством (9) и $a = \left\lfloor \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} \right\rfloor$. Для $n = 1$ имеем $\psi(t) = \sqrt{t(2-t)} + |1-t|$, $a = 0$, $\psi(a) = \psi(a+1) = 1$ и $\|P\|_{B_1} = 1$. В случае $n = 2$ верно $\psi(t) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{t(3-t)} + \left|1 - \frac{2t}{3}\right|$, $a = 0$, $\psi(a) = 1$, $\psi(a+1) = \frac{5}{3}$ и $\|P\|_{B_2} = \psi(a+1) = \frac{5}{3}$. Если $n = 3$, то $\psi(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{t(4-t)} + \left|1 - \frac{t}{2}\right|$, $a = 1$, $\psi(a) = \psi(a+1) = 2$, поэтому $\|P\|_{B_3} = 2$. Наконец, для $n = 4$ надо взять $\psi(t) = \frac{4}{5}\sqrt{t(5-t)} + \left|1 - \frac{2t}{5}\right|$, $a = 1$, $\psi(a) = \frac{11}{5}$, $\psi(a+1) = \frac{1}{5}\left(1 + 4\sqrt{6}\right)$, что даёт $\|P\|_{B_4} = \psi(a) = \frac{11}{5}$.

Теперь заметим, что для каждого $n = 1, 2, 3, 4$ выполняется равенство

$$\|P\|_{B_n} = 3 - \frac{4}{n+1}.$$

В силу оценки $\theta_n(B_n) \geq 3 - \frac{4}{n+1}$, справедливой вообще для любой размерности, при $1 \leq n \leq 4$ верно

$$\theta_n(B_n) = 3 - \frac{4}{n+1}. \tag{18}$$

Это совпадает с (17). Как отмечалось выше, в случае выполнения (18) любой проектор, норма которого минимальна, соответствует правильному симплексу, вписанному в B_n. Это завершает доказательство. □

6. Заключительные замечания

Из неравенства (11) теоремы 2 следует, что величина $\theta_n(B_n)$ минимальной нормы проектора при линейной интерполяции на единичном шаре $\|x\| \leq 1$ удовлетворяет неравенству

$$\theta_n(B_n) \leq \sqrt{n+1}. \tag{19}$$

По крайней мере для тех n, когда число $\sqrt{n+1}$ не является целым, т. е. $n \neq m^2 - 1$, это неравенство является строгим. Если же минимальную норму имеет проектор, узлы которого находятся в вершинах правильного симплекса, вписанного в сферу $\|x\| = 1$, то для этого n в предыдущих обозначениях

$$\theta_n(B_n) = \max\{\psi(a), \psi(a+1)\}. \tag{20}$$

Равенство (20) выполняется, например, при $1 \leq n \leq 4$, когда оно эквивалентно соотношению (18), см. раздел 5. Вопросы о точности оценки (19) по порядку n и о выполнении (20) при $n > 4$ предполагается осветить в другой статье.

В заключение приведём некоторые иллюстрации, результаты численного анализа и некоторые комментарии к ним. Графики функции

$$\psi(t) = \frac{2\sqrt{n}}{n+1}\Big(t(n+1-t)\Big)^{1/2} + \left|1 - \frac{2t}{n+1}\right|, \quad 0 \leq t \leq n+1,$$

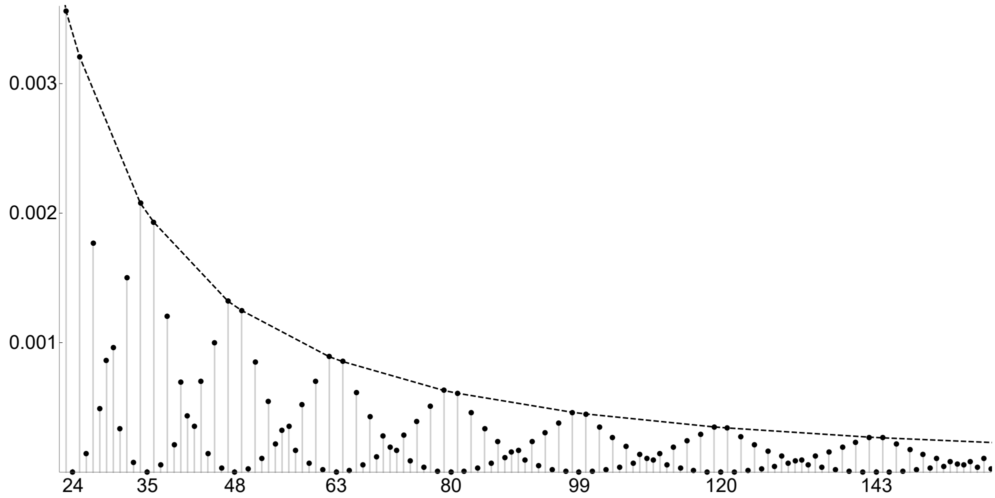

Рис. 5: Числа $d_n = \sqrt{n+1} - \|P\|_{B_n}$ для $23 \le n \le 160$
Fig. 5: The numbers $d_n = \sqrt{n+1} - \|P\|_{B_n}$ for $23 \le n \le 160$

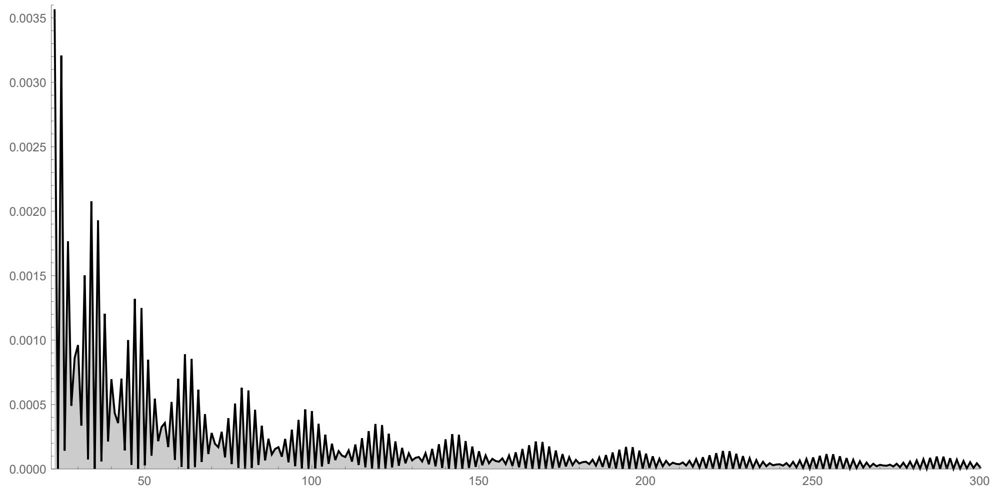

Рис. 6: Числа $d_n = \sqrt{n+1} - \|P\|_{B_n}$ для $23 \le n \le 300$
Fig. 6: The numbers $d_n = \sqrt{n+1} - \|P\|_{B_n}$ for $23 \le n \le 300$

для $n = 3, 4, 5, 15$ изображены на рис.1–4. Отмечены точки максимума этой функции $t_- := \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2}$, $t_+ := \frac{n+1}{2} + \frac{\sqrt{n+1}}{2}$, а также точки $a = \left\lfloor \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} \right\rfloor$ и $a+1$, одна из которых максимизирует $\psi(k)$ при целом $1 \le k \le \frac{n+1}{2}$. На рис. 5–6 для $n \ge 23$ представлены значения разности $d_n = \sqrt{n+1} - \|P\|_{B_n}$, где P — интерполяционный проектор, соответствующий правильному симплексу, вписанному в B_n. Как мы установили, $\|P\|_{B_n} \le \sqrt{n+1}$, причём равенство имеет место лишь для $n = 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, \ldots$, т. е. размерностей вида $m^2 - 1$. Именно в этих точках $d_n = 0$, что и видно на рис. 5. Пунктирной линией обозначен график ломаной (линейного интерполяционного сплайна) l, построенной по узлам $n = m^2 - 2$, $n = m^2$ и значениям d_n в этих узлах. Всегда $d_n \le l(n)$, причём равенство достигается лишь для $n = m^2 - 2$ и $n = m^2$. При $n \to \infty$ монотонно $l(n) \to 0$. Таким образом, справедлива двусторонняя оценка $\sqrt{n+1} - l(n) \le \|P\|_{B_n} \le \sqrt{n+1}$. Как правое, так и левое соотношения обращаются в равенства для бесконечного множества n. Эта оценка точнее, чем (2).

Таблица 1: Норма P для правильного симплекса, вписанного в B_n
Table 1: Norm of P for a regular simplex inscribed into B_n

n	t_-	a	$a+1$	$\psi(a)$	$\psi(a+1)$	k^*	$\\|P\\|_{B_n}$	$\\|P\\|_{B_n}$
1	$1-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	1	1	1	1	1	1
2	$\frac{3-\sqrt{3}}{2}$	0	1	1	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	$1.6666\ldots$
3	1	1	2	2	$\sqrt{3}$	1	2	2
4	$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$	1	2	$\frac{11}{5}$	$\frac{1+4\sqrt{6}}{5}$	1	$\frac{11}{5}$	2.2
5	$3-\sqrt{\frac{3}{2}}$	1	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{1+2\sqrt{10}}{3}$	2	$\frac{1+2\sqrt{10}}{3}$	$2.4415\ldots$
6	$\frac{7-\sqrt{7}}{2}$	2	3	$\frac{3+4\sqrt{15}}{7}$	$\frac{1+12\sqrt{2}}{7}$	2	$\frac{3+4\sqrt{15}}{7}$	$2.6417\ldots$
7	$4-\sqrt{2}$	2	3	$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{105}}{4}$	3	$\frac{1+\sqrt{105}}{4}$	$2.8117\ldots$
8	3	3	4	3	$\frac{1+8\sqrt{10}}{9}$	3	3	3
9	$5-\sqrt{\frac{5}{2}}$	3	4	$\frac{2+3\sqrt{21}}{5}$	$\frac{1+6\sqrt{6}}{5}$	3	$\frac{2+3\sqrt{21}}{5}$	$3.1495\ldots$
10	$\frac{11-\sqrt{11}}{2}$	3	4	$\frac{5+8\sqrt{15}}{11}$	$\frac{3+4\sqrt{70}}{11}$	4	$\frac{3+4\sqrt{70}}{11}$	$3.3151\ldots$
11	$6-\sqrt{3}$	4	5	$\frac{1+2\sqrt{22}}{3}$	$\frac{1+\sqrt{385}}{6}$	4	$\frac{1+2\sqrt{22}}{3}$	$3.4602\ldots$
12	$\frac{13-\sqrt{13}}{2}$	4	5	$\frac{5+24\sqrt{3}}{13}$	$\frac{3+8\sqrt{30}}{13}$	5	$\frac{3+8\sqrt{30}}{13}$	$3.6013\ldots$
13	$7-\sqrt{\frac{7}{2}}$	5	6	$\frac{2+3\sqrt{65}}{7}$	$\frac{1+4\sqrt{39}}{7}$	5	$\frac{2+3\sqrt{65}}{7}$	$3.7409\ldots$
14	$\frac{15-\sqrt{15}}{2}$	5	6	$\frac{1+4\sqrt{7}}{3}$	$\frac{1+4\sqrt{21}}{5}$	6	$\frac{1+4\sqrt{21}}{5}$	$3.8660\ldots$
15	6	6	7	4	$\frac{1+3\sqrt{105}}{8}$	6	4	4
50	$\frac{51-\sqrt{51}}{2}$	21	22	$\frac{3+20\sqrt{35}}{17}$	$\frac{7+20\sqrt{319}}{51}$	22	$\frac{7+20\sqrt{319}}{51}$	$7.1414\ldots$
100	$\frac{101-\sqrt{101}}{2}$	45	46	$\frac{11+120\sqrt{70}}{101}$	$\frac{9+20\sqrt{2530}}{101}$	45	$\frac{11+120\sqrt{70}}{101}$	$10.0494\ldots$
1000	$\frac{1001-\sqrt{1001}}{2}$	484	485	$\frac{3+40\sqrt{5170}}{91}$	$\frac{31+200\sqrt{25026}}{1001}$	485	$\frac{31+200\sqrt{25026}}{1001}$	$31.6385\ldots$

В таблице 1 представлены данные по вычислению $\|P\|_{B_n}$ для правильного симплекса, вписанного в шар. Мы применяем обозначения раздела 4. Значение k^* равно количеству -1 в экстремальном наборе f_j, соответствующем максимуму в (14). Так как этот максимум оказывается равным $\max\{\psi(a), \psi(a+1)\}$, то k^* совпадает с тем из чисел a или $a+1$, на котором $\psi(t)$ принимает большее значение (см. доказательство теоремы 2). Если $k^* = 1$, то в шаре B_n имеется 1-точка относительно симплекса S, соответствующего проектору P. Для такого n

$$\xi(B_n;S)=\frac{n+1}{2}\Big(\|P\|_{B_n}-1\Big)+1, \tag{21}$$

см. (3). Поскольку S — правильный симплекс, вписанный в B_n, то $\xi(B_n;S)=n$ и (21) равносильно $\|P\|_{B_n}=3-\frac{4}{n+1}$. Однако, начиная с $n=5$, всегда $k^*>1$. Более того, k^* возрастает с ростом n. Это соответствует тому, что (21) и равенство $\|P\|_{B_n}=3-\frac{4}{n+1}$ имеют место лишь при $1\le n\le 4$. Первоначально этот эффект был обнаружен авторами в ходе компьютерных экспериментов и лишь затем было дано аналитическое решение задачи.

Если $n+1$ есть число Адамара, вопрос о справедливости равенства, аналогичного (21), можно рассмотреть также для n-мерного куба и вписанного в него правильного симплекса. Интересно заметить, что 1-точка Q_n относительно такого S существует не только для $n=1$ и $n=3$, но и для $n=7$. В указанных случаях

$$\xi(Q_n;S)=\frac{n+1}{2}\Big(\|P\|_{Q_n}-1\Big)+1,$$

откуда следует, что $\theta_3=3$ и $\theta_7=\frac{5}{2}$. Эта тематика подробно рассмотрена в [4].

Для вычислений и построения графиков в настоящей работе использовалась система Wolfram Mathematica (см. [15, 16]).

Список литературы / References

[1] Невский М. В., “Неравенства для норм интерполяционных проекторов”, *Модел. и анализ информ. систем*, **15**:3 (2008), 28–37; [Nevskij M. V., “Inequalities for the norms of interpolating projections”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **15**:3 (2008), 28–37, (in Russian).]

[2] Невский М. В., “Об одном соотношении для минимальной нормы интерполяционного проектора”, *Модел. и анализ информ. систем*, **16**:1 (2009), 24–43; [Nevskij M. V., “On a certain relation for the minimal norm of an interpolational projection”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **16**:1 (2009), 24–43, (in Russian).]

[3] Невский М. В., “Об одном свойстве n-мерного симплекса”, *Матем. заметки*, **87**:4 (2010), 580–593; English transl.: Nevskii M. V., “On a property of n-dimensional simplices”, *Math. Notes*, **87**:4 (2010), 543–555.

[4] Невский М. В., *Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции*, Ярославль: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, 2012; [Nevskii M. V., *Geometricheskie ocenki v polinomialnoy interpolyacii*, Yaroslavl: P. G. Demidov Yaroslavl State University, 2012, (in Russian).]

[5] Невский М. В., Ухалов А. Ю., “Новые оценки числовых величин, связанных с симплексом”, *Модел. и анализ информ. систем*, **24**:1 (2017), 94–110; [Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., “New estimates of numerical values related to a simplex”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:1 (2017), 94–110, (in Russian).]; English transl.: Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., “New estimates of numerical values related to a simplex”, *Aut. Control Comp. Sci.*, **51**:7 (2017), 770–782.

[6] Невский М. В., Ухалов А. Ю., “Об оптимальной интерполяции линейными функциями на n-мерном кубе”, *Модел. и анализ информ. систем*, **25**:3 (2018), 291–311; [Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., “On optimal interpolation by linear functions on an n-dimensional cube”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:3 (2018), 291–311, (in Russian).]; English transl.: Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., “On optimal interpolation by linear functions on n-dimensional cube”, *Aut. Control Comp. Sci.*, **52**:7 (2018), 828–842.

[7] Невский М. В., "О некоторых задачах для симплекса и шара в $\mathbb{R}^n$", *Модел. и анализ информ. систем*, **25**:6 (2018), 680–691; [Nevskii M. V., "On some problems for a simplex and a ball in $\mathbb{R}^n$", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:6 (2018), 680–691, (in Russian).]

[8] Сегё Г., *Ортогональные многочлены*, Москва: Физматгиз, 1962; [Szegő G., *Orthogonal polynomials*, New York: American Mathematical Society, 1959, (in English).]

[9] Суетин П. К., *Классические ортогональные многочлены*, Москва: Наука, 1979; [Suetin P. K., *Klassicheskie ortogonalnye mnogochleny*, Moskva: Nauka, 1979, in Russian).]

[10] Холл М., *Комбинаторика*, Москва: Мир, 1970; [Hall M., Jr, *Combinatorial theory*, Blaisdall publishing company, Waltham (Massachusets) – Toronto – London, 1967, (in English).]

[11] Hedayat A., Wallis W. D., "Hadamard matrices and their applications", *The Annals of Statistics*, **6**:6 (1978), 1184–1238.

[12] Horadam K. J., *Hadamard matrices and their applications*, Princeton University Press, 2007.

[13] Hudelson M., Klee V., Larman D., "Largest j-simplices in d-cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem", *Linear Algebra Appl.*, **241** (1996), 519–598.

[14] Nevskii M., Ukhalov A., "Perfect simplices in $\mathbb{R}^5$", *Beiträge zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry*, **59**:3 (2018), 501–521.

[15] Wellin P., *Essentials of programming in Mathematica*, Cambridge University Press, 2016.

[16] Wolfram S., *An elementary introduction to the Wolfram Language*, Wolfram Media, Inc., 2017.

Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., "Linear Interpolation on a Euclidean Ball in $\mathbb{R}^n$", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **26**:2 (2019), 279–296.

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-2-279-296

Abstract. For $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, R > 0$, by $B = B(x^{(0)}; R)$ we denote a Euclidean ball in $\mathbb{R}^n$ given by the inequality $\|x - x^{(0)}\| \leq R$, $\|x\| := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$. Put $B_n := B(0,1)$. We mean by $C(B)$ the space of continuous functions $f : B \to \mathbb{R}$ with the norm $\|f\|_{C(B)} := \max_{x\in B} |f(x)|$ and by $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ the set of polynomials in n variables of degree ≤ 1, i. e. linear functions on $\mathbb{R}^n$. Let $x^{(1)}, \ldots, x^{(n+1)}$ be the vertices of n-dimensional nondegenerate simplex $S \subset B$. The interpolation projector $P : C(B) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ corresponding to S is defined by the equalities $Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right)$. Denote by $\|P\|_B$ the norm of P as an operator from $C(B)$ into $C(B)$. Let us define $\theta_n(B)$ as minimal value of $\|P\|_B$ under the condition $x^{(j)} \in B$. In the paper, we obtain the formula to compute $\|P\|_B$ making use of $x^{(0)}$, R, and coefficients of basic Lagrange polynomials of S. In more details we study the case when S is a regular simplex inscribed into B_n. In this situation, we prove that $\|P\|_{B_n} = \max\{\psi(a), \psi(a+1)\}$, where $\psi(t) = \frac{2\sqrt{n}}{n+1}\big(t(n+1-t)\big)^{1/2} + \left|1 - \frac{2t}{n+1}\right|$ $(0 \leq t \leq n+1)$ and integer a has the form $a = \left\lfloor \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} \right\rfloor$. For this projector, $\sqrt{n} \leq \|P\|_{B_n} \leq \sqrt{n+1}$. The equality $\|P\|_{B_n} = \sqrt{n+1}$ takes place if and only if $\sqrt{n+1}$ is an integer number. We give the precise values of $\theta_n(B_n)$ for $1 \leq n \leq 4$. To supplement theoretical results we present computational data. We also discuss some other questions concerning interpolation on a Euclidean ball.

Keywords: n-dimensional simplex, n-dimensional ball, linear interpolation, projector, norm

On the authors:
Mikhail V. Nevskii, orcid.org/0000-0002-6392-7618, Doctor of Science,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150003, Russian Federation, e-mail: mnevsk55@yandex.ru

Ukhalov Alexey Yurievich, orcid.org/0000-0001-6551-5118, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150003, Russian Federation, e-mail: alex-uhalov@yandex.ru