Моделирование и анализ информационных систем. Т. 26, №2 (2019), с. 306–311
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 26, No 2 (2019), pp. 306–311

Algorithms

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-2-306-311

УДК 510.5

eT-сводимость множеств

Ярулллин Р. Р.

Поступила в редакцию 20 декабря 2018
После доработки 15 мая 2019
Принята к публикации 17 мая 2019

Аннотация. Статья посвящена eT-сводимости – самой общей в интуитивном смысле алгоритмической сводимости, являющейся одновременно сводимостью по перечислимости и сводимостью по разрешимости. Рассматривается соответственная степенная структура – верхняя полурешётка eT-степеней. Показано, что на ней можно корректным образом определить операцию скачка, используя T-скачок или e-скачок множеств. Рассмотрены локальные свойства eT-степеней: тотальность и перечислимость. Доказано, что все степени между наименьшим элементом и первым скачком в $\mathbf{D_{eT}}$ являются вычислимо перечислимыми, более того, эти степени содержат вычислимо перечислимые множества и только их. Установлено существование нетотальных eT-степеней. На основе этого получены некоторые результаты о соотношениях между степенями, в частности, из того, что всякая eT-степень или содержится полностью в некоторой T- или e-степени, или полностью совпадает с ней, следует, что нетотальные e-степени, содержащиеся в T-степенях, расположенных выше второго T-скачка, совпадают с соответствующими нетотальными eT-степенями.

Ключевые слова: eT-сводимость, eT-степени, eT-скачок

Для цитирования: Ярулллин Р. Р., "eT-сводимость множеств", *Моделирование и анализ информационных систем*, **26**:2 (2019), 306–311.

Об авторах:
Ярулллин Роман Ревович, orcid.org/0000-0003-1604-5599, аспирант,
Ивановский государственный университет,
ул.Ермака, 99, г. Иваново, 153025 Россия, e-mail: iarul1402@yandex.ru

1. Определение eT-сводимости и eT-степеней

Будем придерживаться терминологии и обозначений, используемых в монографиях [1] и [2].

Пусть $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ – множество натуральных чисел; A, B, $C \subseteq \mathbb{N}$; $\overline{A} = \mathbb{N} - A$; u, x, y, $z \in \mathbb{N}$; φ – частичная функция $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\operatorname{dom}\varphi$ – её область определения, $\operatorname{ran}\varphi$ – область значений, $\operatorname{graph}\varphi = \{\langle x, y\rangle : \varphi(x) = y\}$ – её график, где $\langle x, y\rangle$ – канторов номер упорядоченной пары (x, y); f – тотальная функция, т. е. $\operatorname{dom}\varphi = \mathbb{N}$; φ_z – частично вычислимая (всюду далее – ч. в.) функция с гёделевым номером z; φ_z^A – функция, ч. в. с использованием оракула для множества A, имеющая гёделев номер z; W_z – вычислимо перечислимое (всюду далее – в. п.) множество с индексом z;

D_u – конечное множество с каноничным индексом u; c_A и χ_A – характеристическая функция и частичная характеристическая функция множества A.

Под сводимостью будем понимать всякое рефлексивное и транзитивное бинарное отношение на $2^{\mathbb{N}}$. Пусть r – некоторая сводимость. Тот факт, что A r-сводится к B будет обозначаться через $A \leqslant_r B$. Приведем ряд связанных определений:

$A \equiv_r B \Longleftarrow A \leqslant_r B \wedge B \leqslant_r A$;

$A <_r B \Longleftrightarrow A \leqslant_r B \wedge B \nleqslant_r A$;

$\deg_r A := \{X : X \equiv_r A\}$ – r-степень множества A;

$\mathbf{a_r}$, $\mathbf{b_r}$ – произвольные r-степени;

$\mathbf{D_r}$ – класс всех r-степеней.

На $\mathbf{D_r}$ естественным образом вводится частичный порядок. Пусть $A \in \mathbf{a_r}$, $B \in \mathbf{b_r}$, тогда

$$\mathbf{a_r} \leqslant \mathbf{b_r} \Longleftrightarrow \deg_r A \leqslant \deg_r B \Longleftrightarrow A \leqslant_r B.$$

Наибольший интерес представляют сводимости, у которых есть понятная интуитивная подоплека. Среди таковых выделяют T-сводимость и e-сводимость.

Интуитивно, A e-сводится к B, если существует алгоритм, который по любому перечислению множества B даёт некоторое перечисление A, и A T-сводится к B, если существует алгоритм, сводящий проблему разрешения множества A к проблеме разрешения для множества B.

Приведем формальные определения в том виде, в каком они даны в [1].

$$A \leqslant_e B \Longleftrightarrow \exists z \forall x [x \in A \Rightarrow \exists u [\langle x, u\rangle \in W_z \wedge D_u \subseteq B]],$$
$$A \leqslant_T B \Longleftrightarrow \exists z [c_A = \varphi_z^B].$$

Если фиксировать z в определении e-сводимости, то можно определить некоторый оператор Φ_z, такой что

$$\Phi_z(X) = \{x : \exists u [\langle x, u\rangle \in W_z \wedge D_u \subseteq X]\} \quad \text{и} \quad A = \Phi_z(B),$$

который будем называть оператором перечисления.

Про две сводимости $\leqslant_{r_1}$ и $\leqslant_{r_2}$ говорят, что $\leqslant_{r_1}$ сильнее $\leqslant_{r_2}$, а $\leqslant_{r_2}$ слабее $\leqslant_{r_1}$, если имеет место следующая импликация

$$\forall A, B \quad [A \leqslant_{r_1} B \Rightarrow A \leqslant_{r_2} B].$$

Если некоторая сводимость сильнее T-сводимости, то она называется сводимостью по разрешимости, а если она сильнее e-сводимости, то сводимостью по перечислимости. T-сводимость и e-сводимость несравнимы друг с другом в отношении сильнее/слабее. Тем самым, T-сводимость – самая слабая из сводимостей по разрешимости, а e-сводимость – самая слабая из сводимостей по перечислимости, а обе они – самые «широкие» в интуитивном смысле сводимости.

Далее будем рассматривать конъюнкцию этих двух сводимостей – eT-сводимость. Впервые эта сводимость была рассмотрена Ходжаянцем М. Ю. в [3]. Очевидно, что эта сводимость является сводимостью и по разрешимости, и по перечислимости, более того, эта самая слабая из сводимостей, являющихся сводимостями и по разрешимости, и по перечислимости одновременно.

Хорошо изучены 1-, m- и pm-сводимости также являющиеся одновременно сводимостями по перечислимости и по разрешимости (см. [4]). Легко убедиться в следующем

$$\forall A, B \quad [A \leqslant_1 B \Rightarrow A \leqslant_m B \Rightarrow A \leqslant_{pm} B \Rightarrow A \leqslant_{eT} B].$$

Определение 1. $A \leqslant_{eT} B \Longleftrightarrow A \leqslant_e B \wedge A \leqslant_T B$.

Очевидно, что отношение $\leqslant_{eT}$ рефлексивно и транзитивно, и в этом смысле приведённое определение eT-сводимости является корректным.

Теорема 1. $\deg_{eT} A = \deg_e A \cap \deg_T A$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\deg_{eT} A = \{X : X \equiv_{eT} A\} = \{X : X \equiv_e A \wedge X \equiv_T A\} = \\ = \{X : X \equiv_e A\} \cap \{X : X \equiv_T A\} = \deg_e A \cap \deg_T A.\end{aligned}$$ □

Таким образом, всякая eT-степень – это пересечение некоторых e- и T–степеней. Как известно, существуют несравнимые множества относительно e- и T-сводимости (см. например [5]), откуда сразу по определению 1 получается следующее предложение.

Предложение 2. $\exists A, B \quad [A \nleqslant_{eT} B \wedge B \nleqslant_{eT} A]$.

2. О структуре класса eT-степени. В. п. и тотальные eT-степени

Предложение 3. $\mathbf{D_{eT}}$ – верхняя полурешётка с наименьшим элементом $\mathbf{0_{eT}}$, состоящим из всех вычислимых множеств.

Доказательство. Как известно, $A \oplus B = \{2x : x \in A\} \cup \{2x + 1 : x \in B\}$ – наименьшая верхняя грань для любых A и B как по e-сводимости, так и по T-сводимости (см. например [4, с. 38; с. 67]. Из этого следует, что $A \oplus B$ будет также наименьшей верхней гранью для любых A и B по eT-сводимости, т. е. $\mathbf{D_{eT}}$ есть верхняя полурешётка.

Пусть $\mathbf{0_e}$ и $\mathbf{0_T}$ – наименьшие элементы в $\mathbf{D_e}$ и $\mathbf{D_T}$ соответственно. Как известно, $\mathbf{0_e}$ состоит точно из всех в. п. множеств, а $\mathbf{0_T}$ точно из всех вычислимых множеств, т. е. $\mathbf{0_T} \subset \mathbf{0_e}$. Отсюда, в силу теоремы 1, следует, что $\mathbf{0_{eT}} = \mathbf{0_T} \cap \mathbf{0_e} = \mathbf{0_T}$. Таким образом, $\mathbf{0_{eT}}$ состоит из всех вычислимых множеств. □

Определение 2. r-степень называется в. п., если она содержит в. п. множество.

Основные результаты по изучению в. п. T-степеней изложены в [2]. В $\mathbf{D_e}$ существует всего одна в. п. степень – это $\mathbf{0_e}$. Довольно интересные результаты о в. п. степенях в $\mathbf{D_{eT}}$ даёт следующая теорема.

Теорема 4.

(i) Если eT-степень содержит в. п. множество, то она вся состоит из в. п. множеств.

(ii) Существует счётная возрастающая цепь в. п. eT-степеней.

(iii) Существует счётная антицепь в. п. eT-степеней.

Доказательство. (i) $\deg_{eT} W_z = \deg_e W_z \cap \deg_T W_z$, а $\deg_e W_z$ состоит точно из всех в. п. множеств.

(ii), (iii) Следует из аналогичных результатов для T-степеней (см. [1, с. 216]), достаточно лишь взять eT-степени соответствующих в. п. множеств. □

Для получения дальнейших результатов о $\mathbf{D_{eT}}$ введем определение скачка на степенях.

Определение 3. r-скачком множества A называется унарная операция J_r такая, что

(a) $A <_r J_r(A)$;

(b) $A \equiv_r B \Rightarrow J_r(A) \equiv_r J_r(B)$.

Из определения r-скачка для множеств видно, что для каждой $\mathbf{a_r}$ r-степень множества $J_r(A)$ не зависит от выбора множества $A \in \mathbf{a_r}$, что естественным образом позволяет перенести определение скачка для множеств на r-степени. Скачком $\mathbf{a_r}$ будем называть r-степень $\mathbf{j}(\mathbf{a_r}) = \deg_r J_r(A)$.

В качестве определений для T-скачка и e-скачка множеств будем использовать следующие:

$$J_T(A) := K_A = \{x : \varphi_x^A \downarrow\}, \qquad J_e(A) := (A^e \oplus \overline{A^e})^e.$$

Здесь $A^e = \{\langle x, y\rangle : x \in \Phi_y(A)\}$ – e-цилиндр множества A. Данное определение e-скачка было дано Розинасом в [7].

Напомним, что $A \leqslant_1 B$, если $\exists f$ – вычислимая биективная функция такая, что $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$.

Приведем несколько важных нам свойств, определённых выше e-скачка и T-скачка множеств. $\forall A, B$

(i) $A <_1 J_e(A)$, см. в [4, с. 55];

(ii) $A \equiv_e B \Leftrightarrow J_e(A) \equiv_1 J_e(B)$, см. в [4, с. 55];

(iii) $A \leqslant_T B \Rightarrow A \leqslant_1 J_T(B), \overline{A} \leqslant_1 J_T(B)$, см. в [1, с. 327–328];

(iv) $A \leqslant_1 J_T(A), \overline{A} \leqslant_1 J_T(\overline{A})$;

(v) $A \equiv_T B \Leftrightarrow J_T(A) \equiv_1 J_T(B)$, см. в [1, с. 327–328].

Из перечисленных свойств в силу импликации $A \leqslant_1 B \Rightarrow A \leqslant_{eT} B$ получается следующая теорема.

Теорема 5. e-скачок и T-скачок множеств являются корректными определениями для eT-скачка множеств. Иными словами:

$$\forall A, B \quad A <_{eT} J_T(A), \quad A <_{eT} J_e(A),$$
$$A \equiv_{eT} B \Rightarrow J_T(A) \equiv_{eT} J_T(B), \quad A \equiv_{eT} B \Rightarrow J_e(A) \equiv_{eT} J_e(B).$$

Теорема 6. Пусть $\mathbf{j_T}(\mathbf{a_{eT}})$ – T-скачок eT-степени $\mathbf{a_{eT}}$. Всякая eT-степень $\mathbf{a_{eT}}$ такая, что $\mathbf{0_{eT}} \leqslant \mathbf{a_{eT}} \leqslant \mathbf{j_T}(\mathbf{a_{eT}})$ является в. п. степенью. Таким образом, в силу теоремы 4 все множества, расположенные между $\mathbf{0_{eT}}$ и $\mathbf{j_T}(\mathbf{0_{eT}})$, в. п.

Доказательство. Предположим, что в указанном промежутке существует степень $\mathbf{a_{eT}}$, которая не является в. п, и пусть $A_1 \in \mathbf{a_{eT}}$. Пусть $A \in \mathbf{j_T}(\mathbf{0_{eT}})$, тогда $A_1 \leqslant_{eT} A$, откуда $A_1 \leqslant_e A$, но A – в. п. множество в силу теоремы 4 и того факта, что $K \in \mathbf{j_T}(\mathbf{0_{eT}})$, что следует из определения T-скачка. Таким образом, получаем противоречие, т. к. степень $\mathbf{0_e}$ наименьшая и состоит из всех в. п. множеств. □

Определение 4. r-степень называется тотальной, если она содержит график тотальной функции.

Для T-степеней вопрос об их тотальности решается тривиально: всякая T-степень $\mathbf{a_T}$ тотальна, т. к. вместе с некоторым множеством A содержит график функции c_A. Для e-степеней всё не так однозначно: Медведевым Ю. Т. в [8] было построено такое множество A, что для всякой тотальной функции f, если $\operatorname{graph} f \leqslant_e A$, то f – вычислимое множество. Степень такого множества A называется квазиминимальной. Очевидно, что e-степень такого множества нетотальна. Таким образом, переходим к следующей теореме.

Теорема 7. Существуют нетотальные eT-степени.

В [9] было показано, что внутри каждой T-степени $\geqslant \mathbf{j_T}(\mathbf{j_T}(\mathbf{0_T}))$ содержится некоторая e-степень, а для такой e-степени существует подходящая eT-степень такая, что имеет место $\mathbf{a_e} = \mathbf{a_{eT}}$. А если использовать результат, полученный в [10], то имеем, что все нетотальные e-степени, содержащиеся в T-степенях $\geqslant \mathbf{j}(\mathbf{j}(\mathbf{0_T}))$, полностью совпадают с соответствующими нетотальными eT-степенями.

В [10] был получен результат, что никакая тотальная e-степень не содержится ни в какой T-степени. В силу теоремы 1 для eT-степеней это не так, т. к. всякая eT-степень содержится внутри некоторой T-степени.

Список литературы / References

[1] Роджерс Х., *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость*, М.: Мир, 1972; [Rogers H., *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, The MIT Press, 1987, (in Russian).]

[2] Соар Р. И., *Вычислимо перечислимые множества и степени*, Казань: Казанское математическое общество, 2000; [Soare Robert I., *Recursively Enumerable Sets and Degrees*, Springer, 1999].

[3] Ходжаянц М. Ю., “О структуре e-степеней”, *Известия АН АрССР «Математика»*, **XV**:№ 3 (1980), 165–175; [Hodzhayanc M. YU., “O strukture e-stepenej”, *Izvestiya AN ArSSR “Matematika”*, **XV**:3 (1980), 165–175].

[4] Поляков Е. А., Розинас М. Г., *Теория алгоритмов*, Иваново: Из-во ИВГУ, 1976; [Polyakov E. A., Rozinas M. G., *Teoriya algoritmov*, Ivanovo: IVGU, 1976].

[5] Kleene S. C., Post E. L., "The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability", *Annals of Mathematics*, **59** (1954), 379–407.

[6] Case J., "Enumeration reducibility and partial degrees", *Annals of Mathematical Logic*, **2**:4 (1971), 419–439.

[7] Розинас М. Г., "Операция скачка для некоторых видов сводимости", *ВИНИТИ Деп. 3185-76*; [Rozinas M. G., "Operaciya skachka dlya nekotoryh vidov svodimosti", *VINITI Dep. 3185-76].*

[8] Медведев Ю. Т., "Степени трудности массовых проблем", *Докл. АН СССР*, **104** (1955), 501–504; [Medvedev YU. T., "Stepeni trudnosti massovyh problem", *Dokl. AN SSSR*, **104** (1955), 501–504].

[9] Ходжаянц М. Ю., "e-степени, T-степени и аксиоматические теории", *ДАН АрмССР*, **73**:2 (1981), 73–77; [Hodzhayanc M. Yu., "e-stepeni, T-stepeni i aksiomaticheskie teorii", *DAN ArSSR*, **73**:2 (1981), 73–77].

[10] Солон Б. Я., "Соотношения между e-степенями и T-степенями", *Известия высших учебных заведений, "Математика"*, **3** (1995), 51–61; [Solon B. YA., "O sootnoshenie mezhdu e-stepenyami i T-stepenyami", *Izvestiya vuzov, "Matematika"*, **3** (1995), 51–61].

Iarullin R. R., "eT-reducibility of Sets", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **26**:2 (2019), 306–311.

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-2-306-311

Abstract. This paper is dedicated to the study of eT-reducibility — the most common in the intuitive sense of algorithmic reducibility, which is both enumeration reducibility and decidable one. The corresponding structure of degrees — upper semilattice of eT-degrees is considered. It is shown that it is possible to correctly define the jump operation on it by using the T-jump or e-jump of sets. The local properties of eT-degrees are considered: totality and computably enumerable. It is proved that all degrees between the smallest element and the first jump in $\mathbf{D_{eT}}$ are computably enumerable, moreover, these degrees contain computably enumerable sets and only them. The existence of non-total eT-degrees is established. On the basis of it, some results have been obtained on the relations between, in particular, from the fact that every eT-degree is either completely contained in some T- or e-degrees, or completely coincides with it, it follows that non-total e-degrees contained in the T-degrees, located above the second T-jump, coincide with the corresponding non-total eT-degrees.

Keywords: eT-reducibility, eT-degrees, eT-jump

On the authors:
Roman R. Iarullin, orcid.org/0000-0003-1604-5599, graduate student,
Ivanovo State University,
99 Ermaka str., Ivanovo, 153025 Russia, e-mail: iarul1402@yandex.ru