Моделирование и анализ информационных систем. Т. 26, №3 (2019), с. 405–419
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 26, No 3 (2019), pp. 405–419

Algorithms

©Медведева Н. С., Смирнов А. В., 2019

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-3-405-419

УДК 519.174.7

NP-полнота и один полиномиальный подкласс задачи о двухшаговой раскраске графа

Медведева Н. С., Смирнов А. В.[1]

Поступила в редакцию 14 августа 2019
После доработки 11 сентября 2019
Принята к публикации 13 сентября 2019

Аннотация. В данной статье рассматривается задача о двухшаговой раскраске произвольного неориентированного связного графа. Она состоит в нахождении такой раскраски в заданное число цветов, при которой ни одна пара вершин на расстоянии 1 или 2 друг от друга не будет окрашена в одинаковый цвет. Также в работе ставится соответствующая задача распознавания.

Данная задача тесно связана с классической задачей о раскраске графа. В статье рассматривается и обосновывается полиномиальное сведение задач друг к другу. В частности, это позволяет доказать NP-полноту задачи о двухшаговой раскраске. Кроме того, определяются некоторые ее свойства.

Отдельно исследуется задача о двухшаговой раскраске в приложении к прямоугольным графам решетки. Максимальная степень вершины таких графов может принимать значение от 0 до 4, и для каждого возможного случая была определена и обоснована функция двухшаговой раскраски в минимальное число цветов. Полученные функции строятся таким образом, что каждая вершина графа может быть раскрашена независимо от остальных, а время раскраски прямоугольного графа решетки полиномиально при последовательном переборе вершин.

Ключевые слова: двухшаговая раскраска графа, NP-полнота, граф решетки, прямоугольный граф решетки

Для цитирования: Медведева Н. С., Смирнов А. В., "NP-полнота и один полиномиальный подкласс задачи о двухшаговой раскраске графа", *Моделирование и анализ информационных систем*, **26**:3 (2019), 405–419.

Об авторах:
Медведева Наталья Сергеевна, orcid.org/0000-0002-1632-5411, студент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: medvedeva270598@mail.ru

Смирнов Александр Валерьевич, orcid.org/0000-0002-0980-2507, канд. физ.-мат. наук., доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: alexander_sm@mail.ru

Благодарности:
[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №17-07-00823 А.

Введение

В данной статье рассматривается задача о двухшаговой раскраске графа, то есть такой раскраске, при которой все вершины, находящиеся на расстоянии 1 или 2 друг от друга должны быть окрашены в разные цвета.

Подобная задача возникает при распределении временных слотов (тайм-слотов) в сетях, использующих принцип множественного доступа с временным разделением (см. [1]). В частности, при таком распределении возникает проблема скрытых узлов. Два узла сети могут находится в зоне видимости третьего узла, но быть при этом невидимыми друг другу. Если эти два узла получат одинаковый номер тайм-слота, они будут передавать данные одновременно, что приведет к проблемам на третьем узле. По сути, каждые три узла сети, для которых возникает описанная проблема, должны получить разные номера тайм-слотов, что в точности соответствует условию двухшаговой раскраски вершин графа.

Очевидно, что рассматриваемая задача обобщает классическую задачу о раскраске графа (см., например, [2]). Связь между двумя задачами представляет определенный интерес и освещается в статье.

1. Постановка задачи

Рассмотрим произвольный связный неориентированный граф $G(V, E)$. Перед тем как формулировать основную задачу, введем необходимые определения.

Определение 1. *Будем называть вершину $v_2 \in V$* соседом первого порядка *для некоторой вершины $v_1 \in V$, если v_1 и v_2 – смежные вершины, то есть существует ребро $\{v_1, v_2\} \in E$. Множество всех соседей первого порядка для вершины $v \in V$ будем обозначать через N_v^1.*

Определение 2. Соседом второго порядка *для $v_1 \in V$ назовем такую вершину $v_2 \in V$, что кратчайшее растояние между v_1 и v_2 равно двум. Иначе говоря, v_1 и v_2 – соседи второго порядка, если $\{v_1, v_2\} \notin E$ и найдется такая вершина $v_3 \in V$, что $\{v_1, v_3\} \in E$ и $\{v_2, v_3\} \in E$. Множество соседей второго порядка для $v \in V$ обозначим через N_v^2.*

Определение 3. *Множество соседей первого и второго порядка для некоторой вершины $v \in V$ будем называть* соседями *v и обозначать через $N_v = N_v^1 \cup N_v^2$.*

Теперь может быть сформулирована задача о двухшаговой раскраске графа в общем виде.

Задача 1. *Пусть заданы связный неориентированный граф $G(V, E)$ и натуральное число K – количество цветов. Требуется получить раскраску G в K цветов таким образом, чтобы для каждой вершины $v \in V$ ни один из ее соседей первого или второго порядка не был окрашен в тот же цвет.*

Иными словами, требуется определить функцию $f : V \to \{1, \ldots, K\}$ так, что для любой вершины $v \in V$ и для любой вершины $v' \in N_v$ выполнено

$$f(v) \neq f(v').$$

В такой постановке задача требует существование алгоритма, который для любой пары (G, K) либо находит раскраску G в K цветов, либо определяет, что раскраски не существует. Мы заведомо предполагаем, что для данной задачи не существует алгоритма с полиномиальной трудоемкостью. Для доказательства этого факта рассмотрим соответствующую задачу распознавания.

Задача 2.

УСЛОВИЕ. Задан произвольный связный неориентированный граф $G(V, E)$ и положительное число K.

ВОПРОС. Можно ли раскрасить граф G в k цветов, $k \leqslant K$, таким образом, чтобы для каждой вершины $v \in V$ ни один из ее соседей первого или второго порядка не был окрашен в тот же цвет?

Задачу о двухшаговой раскраске графа будем обозначать как *РАСКРАСКА-2*.

2. Сведение задачи РАСКРАСКА-2 к классической задаче о раскраске графа

Для начала напомним постановку классической задачи о раскрашиваемости графа (см., например, [2]). Далее будем обозначать данную задачу как *РАСКРАСКА*. Отметим, что задача РАСКРАСКА NP-полна (см. [3]).

Задача 3. *Задан произвольный неориентированный граф $G(V, E)$ и натуральное число K. Требуется найти раскраску (для задачи распознавания определить, существует ли раскраска) графа G в K цветов так, чтобы любые две смежные вершины имели различные цвета.*

Несложно заметить, что ограничения задачи РАСКРАСКА слабее, чем задачи РАСКРАСКА-2, то есть любая двухшаговая раскраска является и обычной раскраской, но не всякая раскраска является двухшаговой. Следовательно, с помощью наложения дополнительных ограничений на параметры любая индивидуальная задача о двухшаговой раскраске может быть сведена к классической задаче, то есть любой граф может быть модифицирован таким образом, что задача о двухшаговой раскраске для него может быть решена с помощью алгоритма обычной раскраски.

Пусть заданы граф $G(V, E)$ и натуральное число K – параметры индивидуальной задачи РАСКРАСКА-2. Будем строить по графу G новый граф $G'(V, E \cup E')$ так, чтобы решение задачи РАСКРАСКА с параметрами (G', K) было в точности решением исходной задачи.

Пусть в G найдутся три вершины $v_1, v_2, v_3 \in V$ такие, что $\{v_1, v_2\} \in E$ и $\{v_1, v_3\} \in E$ (рис. 1). По условиям задачи о двухшаговой раскраске данные вершины должны иметь различные цвета, однако ограничения классической задачи допускают для вершин v_2 и v_3 одинаковые цвета. Чтобы это исправить, добавим в G' ребро $\{v_2, v_3\}$ (рис. 2).

Заметим, что никакие другие ограничения на раскраску в графе G' после введения нового ребра не добавляются. Можно гарантировать, что после добавления новых ребер во все подграфы вышеописанного вида, любые две вершины являются смежными в графе G' тогда и только тогда, когда они являются соседями первого или второго порядка в графе G.

Теорема 1. *Раскраска графа G', полученного путем добавления ребер в G по вышеописанным правилам, в K цветов в точности есть двухшаговая раскраска графа G в K цветов.*

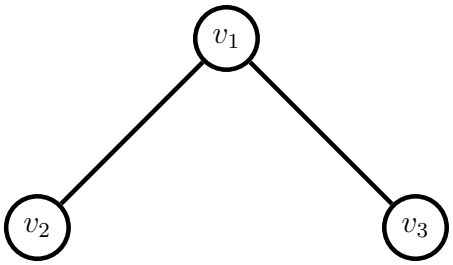

Рис. 1. Некоторый подграф S графа G
Fig. 1. Some subgraph S of the graph G

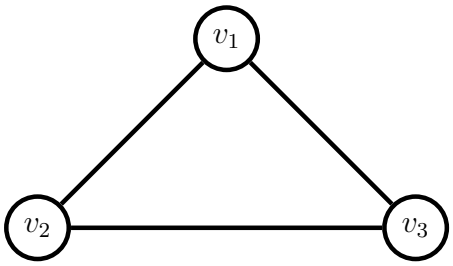

Рис. 2. Соответствующий ему подграф S' графа G'
Fig. 2. Corresponding subgraph S' of the graph G'

Справедливость теоремы следует непосредственно из предшествующих рассуждений.

Пример 1. Пусть задан некоторый граф G (рис. 3) и $K = 4$.

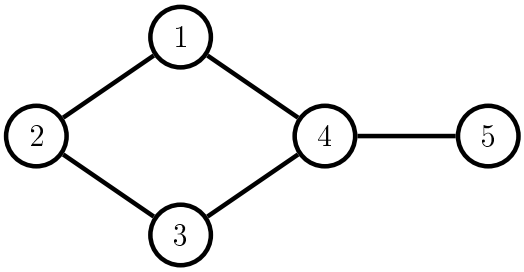

Рис. 3. Исходный граф G
Fig. 3. The initial graph G

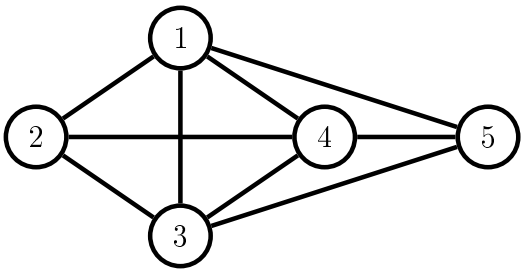

Рис. 4. Построенный по G граф G'
Fig. 4. Graph G' constructed from the graph G.

Построим по нему граф G'. Для этого найдем в G все тройки вершин, индуцирующие подграфы, которые могут быть достроены до клики размерности 3 с помощью одного ребра, и добавим эти ребра в граф. В результате получим новый граф G' (рис. 4) с множеством ребер $E \cup E'$, где $E' = \{\{1,3\},\{2,4\},\{1,5\},\{3,5\}\}$.

Определим для вершин графа G' цвета по правилам классической задачи о раскраске (рис. 5, номера цветов указаны рядом с соответствующими вершинами), а затем наложим полученную раскраску на исходный граф (рис. 6). Несложно убедиться, что в результате получена корректная двухшаговая раскраска графа G.

3. Свойства задачи

Свойство 1 (необходимое условие двухшаговой раскраски)**.** *Пусть заданы граф G и натуральное число цветов K. Если граф содержит хотя бы одну вершину, степень которой не менее K, задача о двухшаговой раскраске для него не имеет решения. Иначе говоря, если максимальная степень вершины в графе равна M, то для раскраски данного графа понадобится не менее $M+1$ цвета.*

Edited with the demo version of Infix Pro PDF Editor
To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

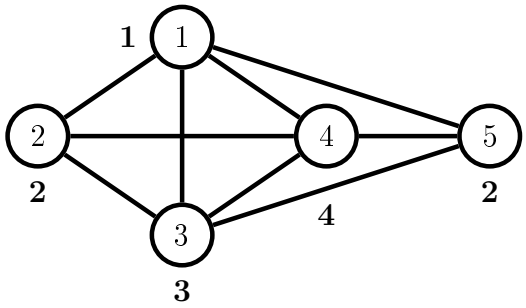

Рис. 5. Раскраска графа G'
Fig. 5. Colouring of the graph G'

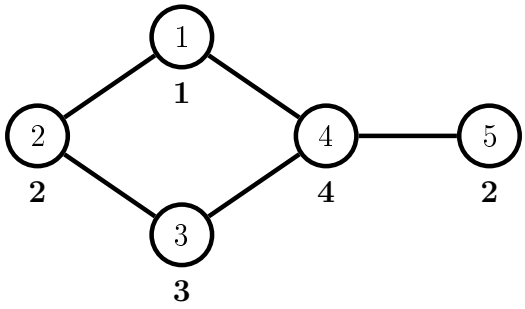

Рис. 6. Двухшаговая раскраска графа G
Fig. 6. Two-step colouring of the graph G

В этом несложно убедиться. Рассмотрим подграф G, содержащий вершину v степени не менее K. Для определенности будем считать, что $\deg(v) = K + n$, $n \geq 0$. На рис. 7 изображен такой подграф. Для удобства соседи первого порядка вершины v пронумерованы.

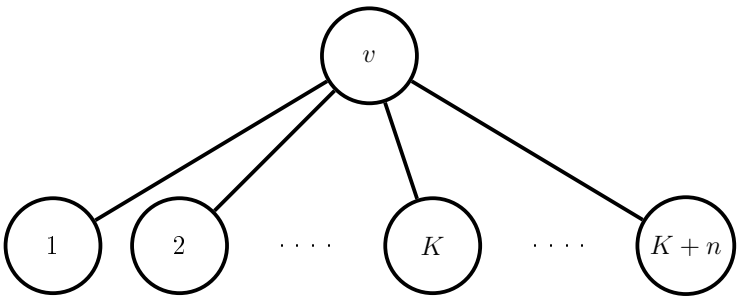

Рис. 7. Подграф графа G, индуцированный вершиной v и ее соседями первого порядка
Fig. 7. A subgraph of the graph G induced by the vertex v and its first-order neighbors

Определим для вершины v цвет, пусть это будет цвет 0. Далее для каждого из ее соседей, начиная с 1, будем определять цвет. Заметим, что цвет очередной вершины не должен совпадать ни с одним из ранее использованных цветов, так как для каждой вершины данного подграфа любая другая является соседом. Тогда при рассмотрении вершины K окажется, что не осталось неиспользованных цветов, поэтому вершина не может быть раскрашена без нарушения условий задачи. Это справедливо для всех нераскрашенных вершин данного подграфа. Таким образом, решения задачи для графа G и заданного K не существует.

Данное условие является необходимым для двухшаговой раскраски графа, но не достаточным. Зачастую для графов с наибольшей степенью вершины, равной M, не удается найти двухшаговую раскраску в $M + 1$ цвет. В ряде случаев происходит это в силу следующего свойства.

Свойство 2. *Пусть имеется граф G. По нему с помощью преобразований, описанных в разделе 2, строится граф G'. Если максимальная размерность клики,*

Edited with the demo version of Infix Pro PDF Editor
To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

содержащейся в G', равна K, то для двухшаговой раскраски графа G потребуется не менее K цветов.

Справедливость данного утверждения следует из теоремы 1 и того факта, что для раскраски клики потребуется число цветов, равное ее размерности (см. [2]).

В отличие от первого свойства, которое может быть проверено для заданного графа за полиномиальное время, проверить данное свойство в общем случае не удастся, так как задача поиска в графе клики заданной размерности является NP-полной (см. [3]). На рис. 8 приведены примеры графов, для двухшаговой раскраски которых потребуется больше цветов чем $\max\limits_{v \in V}(\deg v) + 1$.

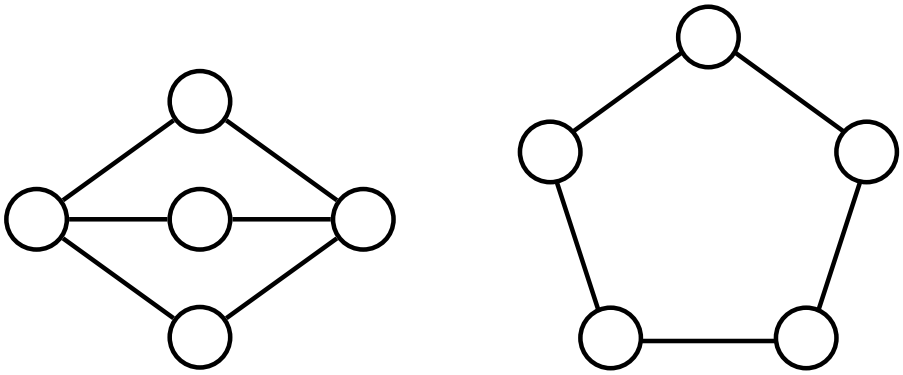

Рис. 8. Графы, для двухшаговой раскраски которых потребуется 5 цветов
Fig. 8. Graphs that require 5 colours for two-step colouring

4. NP-полнота задачи

Для доказательства NP-полноты задачи РАСКРАСКА-2 мы построим полиномиальное сведение NP-полной задачи РАСКРАСКА к задаче РАСКРАСКА-2. Обе задачи в данном разделе мы будем рассматривать в постановке задачи распознавания. Сначала введем следующую операцию на графе.

Определение 4 (см., например, [4])**.** *Операцией* подразбиения ребра $\{v_i, v_j\}$ *произвольного графа G на n вершинах назовем такую операцию, в результате которой в множество вершин добавляется новая вершина v_{n+1}, а ребро $\{v_i, v_j\}$ заменяется ребрами $\{v_i, v_{n+1}\}$ и $\{v_{n+1}, v_j\}$.*

Теорема 2. *Задача РАСКРАСКА-2 является NP-полной.*

Доказательство. Пусть дан произвольный граф $G(V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$, для которого требуется получить раскраску не более чем в K цветов. Решением данной задачи будем считать набор пар вида (v, c), где $v \in V$, $c \in \{1, \ldots, K\}$ – номер цвета, определенный для вершины v так, что $c_1 \neq c_2$ для любых двух пар (v_1, c_1), (v_2, c_2) таких, что $\{v_1, v_2\} \in E$. Построим по графу G граф $G'(V \cup V', E')$ следующим образом.

1. Добавим в граф все вершины из V.

2. Пусть ребра в графе G пронумерованы, то есть каждому ребру $\{v_i, v_j\} \in E$ поставлен во взаимно-однозначное соответствие номер $t \in \{1, \ldots, m\}$. Выполним для каждого ребра операцию подразбиения, добавив в граф G' m новых вершин и $2m$ новых ребер следующим образом:

$$V' = \big\{v'_t \;\big|\; t \in \{1, \ldots, m\}\big\};$$
$$E' = \big\{\{v_i, v'_t\},\ \{v'_t, v_j\} \;\big|\; \{v_i, v_j\}_t \in E\big\}.$$

3. Каждую вершину $v' \in V'$ соединим с каждой другой вершиной из множества V', добавив в E' набор ребер

$$\big\{\{v'_i, v'_j\} \;\big|\; i \in \{1, \ldots, m\},\ j \in \{1, \ldots, m\},\ i \neq j\big\}.$$

Для полученного графа G' можно выделить следующие свойства:
- степени вершин из V при переходе в G' не изменились;
- все вершины из V' имеют степень $m + 1$ (каждая вершина смежна с $m - 1$ вершиной из V' и с двумя некоторыми вершинами из V);
- вершины из множества V' индуцируют клику размерности m;
- для каждой вершины из V все вершины из V' являются соседями первого или второго порядка, а также соседями второго порядка являются те вершины из V, которые были смежны в графе G;
- для каждой вершины из V' соседями первого или второго порядка являются все остальные вершины в графе.

Следовательно, при двухшаговой раскраске полученного графа должны выполняться такие условия:
- каждая вершина из V' должна иметь цвет, отличный от цвета любой другой вершины в графе;
- цвет каждой вершины из V должен отличаться от цвета любой вершины из V' и вершин-соседей второго порядка из V.

Таким образом, получена новая задача о двухшаговой раскраске для графа G' с параметром $m + K$. Заметим, что решение этой задачи существует тогда и только тогда, когда существует решение исходной задачи о раскраске графа G с параметром K.

Предположим, что для задачи РАСКРАСКА-2 данного вида найдено решение и каждой вершине $v \in V \cup V'$ поставлен в соответствие номер цвета из множества $C = \{1, \ldots, m + K\}$:

$$R' = \{(v, c) \mid c \in C,\ v \in V \cup V'\}.$$

Тогда решением исходной задачи РАСКРАСКА является множество

$$R = \{(v, c) \in R' \mid v \in V\}.$$

Так как каждая вершина из V' имеет уникальный цвет, а $|V'| = m$, то для раскраски множества V может быть использовано не более K цветов, потому полученное решение не противоречит условиям.

Наоборот, если получено решение задачи РАСКРАСКА и каждой вершине $v \in V$ поставлен в соответствие номер цвета из множества $C = \{1, \ldots, K\}$:

$$R = \{(v, c) \mid c \in C,\ v \in V \cup V'\},$$

то решением задачи РАСКРАСКА-2 будет

$$R' = R \cup \{(v_i, K+i) \mid i \in \{1, \ldots, m\},\ v_i \in V'\}.$$

Таким образом, построена функция f сведения задачи РАСКРАСКА с параметрами $(G(V,E), K)$ к задаче РАСКРАСКА-2 с параметрами $(G'(V \cup V', E'), |E| + K)$.

Оценим трудоемкость данной функции.

1. Операция подразбиения ребер требует перебор всех ребер, поэтому трудоемкость данного шага равна $O(m)$. Число ребер m не превосходит $n(n-1)/2$, тогда трудоемкость шага равна $O(n^2)$.
2. Введение новых ребер потребует перебор всех возможных пар из множества V', то есть C_m^2 операций. $\mathrm{C}_m^2 = (m-1)m/2$, тогда трудоемкость шага равна $O(m^2) = O(n^4)$.

Следовательно, трудоемкость функции f есть $O(n^4)$.

Таким образом, задача РАСКРАСКА с произвольными параметрами $(G(V,E), K)$ полиномиально сводится к задаче РАСКРАСКА-2 с параметрами $(G'(V \cup V', E'), |E| + K)$. Значит, задача РАСКРАСКА-2 с параметрами $(G'(V \cup V', E'), |E| + K)$ является NP-полной. Отсюда следует, что задача РАСКРАСКА-2 с произвольными параметрами также является NP-полной.

Теорема 2 доказана.

Пример 2. Рассмотрим пример сведения индивидуальной задачи раскраски графа к задаче о двухшаговой раскраске. Пусть задан граф G (рис. 9) и число $K = 3$.

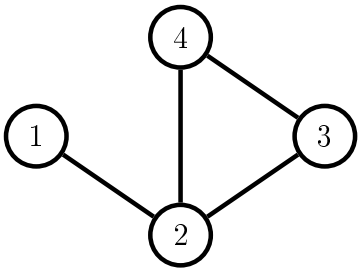

Рис. 9. Исходный граф G
Fig. 9. The initial graph G

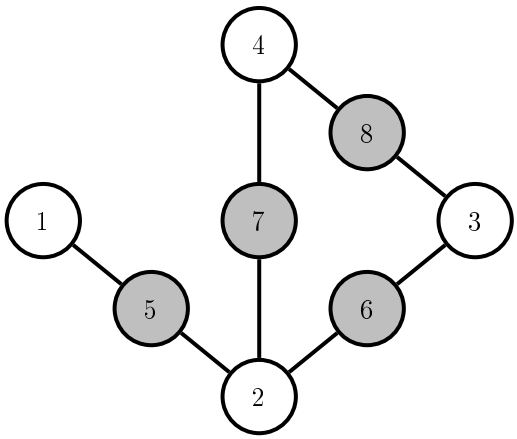

Рис. 10. Граф G после выполнения операции подразбиения для всех его ребер
Fig. 10. Graph G after subdivision of all its edges

Будем строить по нему граф G'. На первом шаге преобразования выполним операцию подразбиения для всех ребер исходного графа. На рис. 10 изображен результат выполнения этого шага. Добавленные вершины выделены цветом.

Далее соединим все новые вершины между собой так, чтобы они образовали клику размерности 4. Результат представлен на рис. 11. Таким образом, получен граф G'.

Теперь найдем двухшаговую раскраску для графа G' (рис. 11) в 7 цветов. Заметим, что для каждой из вершин 5–8 определяется уникальный цвет, а остальные вершины раскрашиваются в три цвета по правилам двухшаговой раскраски.

На последнем шаге найдем раскраску исходного графа. Для этого определим каждой вершине графа G цвет, который получила соответствующая вершина в G' (рис. 12).

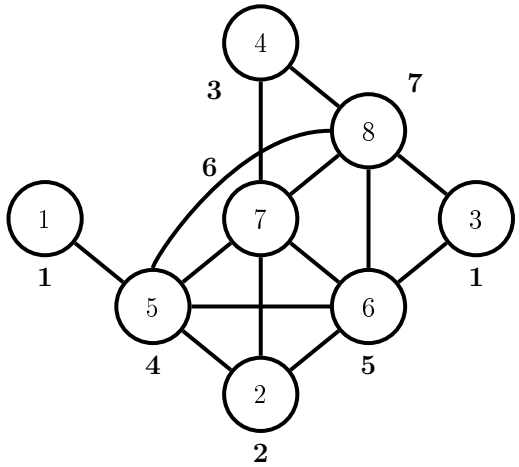

Рис. 11. Двухшаговая раскраска графа G'
Fig. 11. Two-step colouring of the graph G'

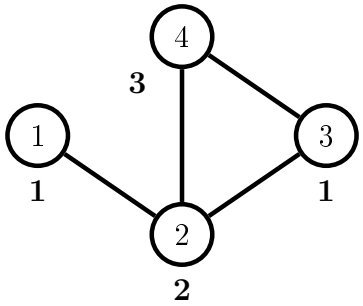

Рис. 12. Раскраска графа G
Fig. 12. Colouring of the graph G

5. Двухшаговая раскраска прямоугольного графа решетки

Определение 5 (см. [5]). Графы решетки – *графы, которые могут быть нарисованы так, что их вершины лежат на узлах целочисленной решетки, а ребра соединяют все возможные пары вершин, расположенных на единичном расстоянии друг от друга.*

Графы решетки бывают произвольными и прямоугольными, с дырами и без.

Определение 6 (см. [6]). Прямоугольный граф $R(n, m)$ – *подграф бесконечного графа решетки, индуцированный множеством вершин* $V(n, m) = \{v \mid 1 \leqslant v_x \leqslant n, 1 \leqslant v_y \leqslant m\}$, *где* v_x *и* v_y *соответствуют координатам вершины на плоскости. Граница такого графа представляет собой прямоугольник. По определению прямоугольный граф не может иметь дыр.*

Для начала отметим важные для двухшаговой раскраски особенности графов решетки.

1. Степень любой вершины графа не превосходит 4 (см. [5]). Тогда по свойству 1 для раскраски графа решетки в общем случае требуется не менее 5 цветов.

Edited with the demo version of Infix Pro PDF Editor
To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

2. Понятия соседей первого и второго порядка для графов решетки могут быть переопределены. Пусть граф решетки G задается множеством вершин V. Соседями первого порядка для $v(v_x, v_y) \in V$ являются такие вершины $v'(v'_x, v'_y)$, что
$$|v_x - v'_x| + |v_y - v'_y| = 1.$$
Соседями второго порядка для $v(v_x, v_y) \in V$ являются такие вершины $v'(v'_x, v'_y)$, что
$$|v_x - v'_x| + |v_y - v'_y| = 2.$$

Пусть $R(n, m)$ – произвольный прямоугольный граф решетки, и каждой вершине v соответствует пара целых чисел (v_x, v_y). Количество цветов, в которые может быть раскрашен граф R зависит от его размерности. Рассмотрим все возможные ситуации.

Наиболее простой является ситуация $\min\{n, m\} = 1$. Возможны следующие варианты.

1. $\max\{n, m\} = 1$. Граф состоит из одной вершины, для раскраски которой достаточно одного цвета.
2. $\max\{n, m\} = 2$. Граф состоит из двух соединенных ребром вершин, которые могут быть раскрашены в два цвета.
3. $\max\{n, m\} > 2$. Граф представляет собой цепь. Степень любой из вершин не превосходит 2, поэтому R может быть раскрашен в три цвета. Пусть имеются цвета с номерами 0, 1 и 2. Тогда определим цвет c_v для каждой вершины по формуле
$$c(v_x, v_y) = (v_x + v_y) \mod 3.$$
В данном графе одна из координат фиксирована, а последовательный перебор значений второй координаты приведет к циклическому присвоению цветов 0, 1, 2 в раскраске.

Второй случай возникает при $\min\{n, m\} = 2$. Здесь максимальная степень вершины равна 3, поэтому предположим, что граф может быть раскрашен в 4 цвета. Возможны два варианта.

1. $n = 2$, то есть координата x вершины может принимать только значение 1 или 2. На рис. 13 представлен пример двухшаговой раскраски графа решетки такого вида.
Пусть заданы четыре цвета с номерами от 0 до 3. Тогда цвет c_v для каждой вершины может быть определен по формуле
$$c(v_x, v_y) = (2 \cdot v_x + v_y) \mod 4. \tag{1}$$
Геометрический смысл данной формулы заключается в том, что вершины одинакового цвета лежат на прямых
$$v_y = -2 \cdot v_x + c + 4 \cdot k,\ k \in \mathbb{Z},$$
где c – цвет вершины (рис. 14).
Пусть вершина v определяется парой (v_x, v_y). Убедимся, что ее цвет не совпадает с цветами соседей первого и второго порядка. Пусть $v'(v'_x, v'_y)$ – некоторый сосед вершины v.

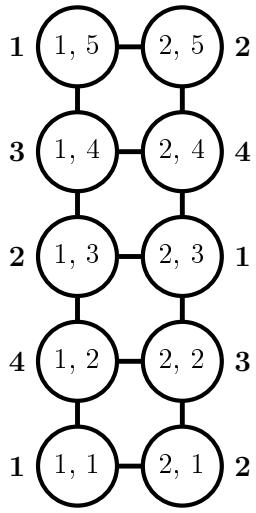

Рис. 13. Двухшаговая раскраска графа $R(2,5)$
Fig. 13. Two-step colouring of the graph $R(2,5)$

- Если v' – сосед первого порядка, расположенный слева или справа от v, то $(v_x = v'_x \pm 1)$ и $(v_y = v'_y)$. Цвет v':

$$c(v'_x, v'_y) = (2 \cdot (v_x \pm 1) + v_y) \mod 4 = (c(v_x, v_y)v \pm 2) \mod 4.$$

- Если v' – сосед первого порядка, расположенный сверху или снизу от v, то $(v_x = v'_x)$ и $(v_y \pm 1 = v'_y)$. Цвет v':

$$c(v'_x, v'_y) = (2 \cdot v_x + v_y \pm 1) \mod 4 = (c_v \pm 1) \mod 4.$$

- Если v' – сосед второго порядка, расположенный по диагонали от v, то $(v_x \pm 1 = v'_x)$ и $(v_y \pm 1 = v'_y)$. Цвет v':

$$c(v'_x, v'_y) = (2 \cdot (v_x \pm 1) + v_y \pm 1) \mod 4 = (c_v \pm 2 \pm 1) \mod 4.$$

  Поскольку $0 < |\pm 2 \pm 1| < 4$, то $(c_v \pm 2 \pm 1) \mod 4 \neq c_v$.
- Если v' – сосед второго порядка, расположенный сверху или снизу от v, то $(v_x = v'_x)$ и $(v_y \pm 2 = v'_y)$. Цвет v':

$$c(v'_x, v'_y) = (2 \cdot v_x + v_y \pm 2) \mod 4 = (c_v \pm 2) \mod 4.$$

Во всех рассмотренных случаях цвета вершин v и v' различны, значит, для графов данного вида найдена корректная функция двухшаговой раскраски в 4 цвета.

2. $n \neq 2, m = 2$, то есть координата y каждой вершины принимает значение 1 или 2. На рис. 15 изображен пример двухшаговой раскраски графа такого вида.
   Пусть заданы четыре цвета с номерами от 0 до 3. Тогда цвет c_v для каждой вершины может быть определен по формуле

$$c(v_x, v_y) = (v_x + 2 \cdot v_y) \mod 4. \tag{2}$$

Edited with the demo version of Infix Pro PDF Editor
To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

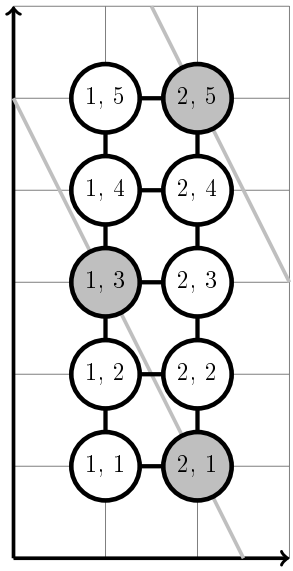

Рис. 14. Геометрический смысл формулы (1)
Fig. 14. Geometric sense of formula (1)

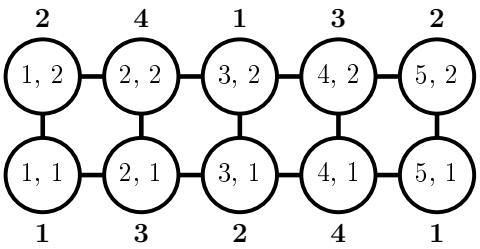

Рис. 15. Двухшаговая раскраска графа $R(5, 2)$
Fig. 15. Two-step colouring of the graph $R(5, 2)$

Геометрический смысл данной формулы заключается в том, что вершины одинакового цвета лежат на прямых

$$v_y = -\frac{1}{2} \cdot v_x + \frac{1}{2} \cdot c + 2 \cdot k, \;\; k \in \mathbb{Z},$$

где c – цвет вершины (рис. 16).

Доказательство корректности полученной функции раскраски можно выполнить по аналогии с предыдущим случаем.

Таким образом, мы получили функции раскраски в 4 цвета для графов решетки с наибольшей степенью вершины равной 3.

В общем случае $\min\{n, m\} > 3$, значит, хотя бы одна вершина графа имеет степень 4. Следовательно, такой граф может быть раскрашен не менее чем в 5 цветов. Пусть имеется 5 цветов с номерами от 0 до 4. Тогда граф можно раскрасить любым из двух способов:

$$c_v = c(v_x, v_y) = (-2 \cdot v_x + v_y) \mod 5; \tag{3}$$

$$c_v = c(v_x, v_y) = (2 \cdot v_x + v_y) \mod 5. \tag{4}$$

Edited with the demo version of Infix Pro PDF Editor
To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

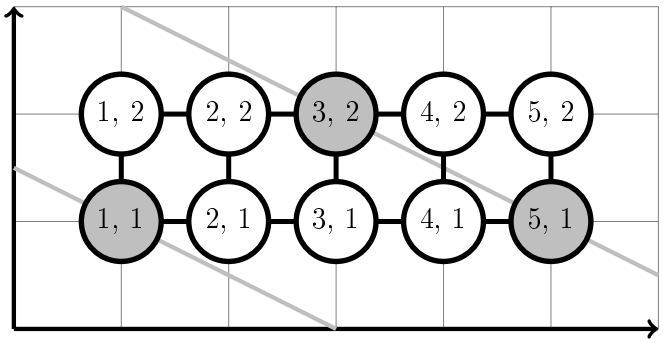

Рис. 16. Геометрический смысл формулы (2)
Fig. 16. Geometric sense of formula (2)

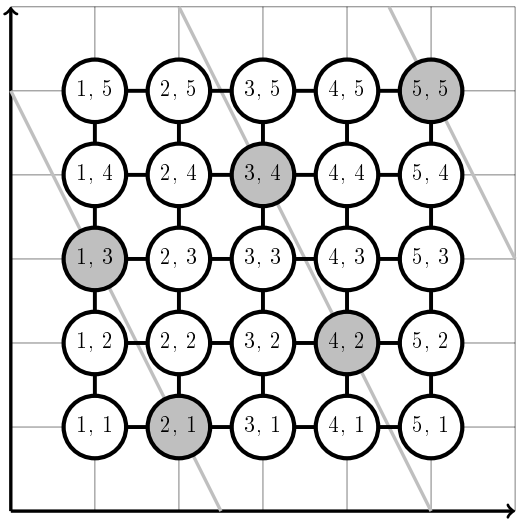

Рис. 17. Геометрический смысл формулы (3)
Fig. 17. Geometric sense of formula (3)

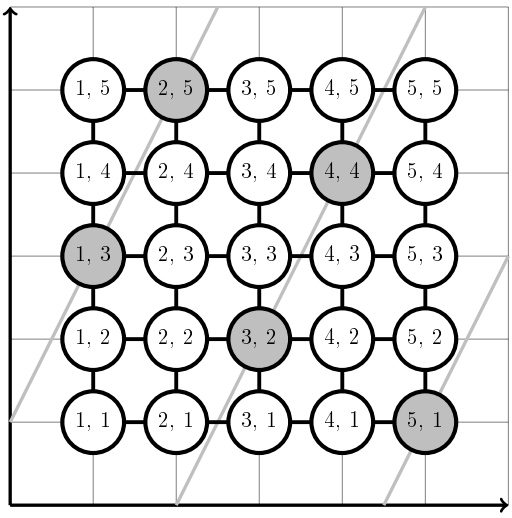

Рис. 18. Геометрический смысл формулы (4)
Fig. 18. Geometric sense of formula (4)

Рис. 17 и 18 иллюстрируют геометрический смысл данных формул.

Докажем корректность формулы (3). Пусть вершина v определяется парой (v_x, v_y). Убедимся, что ее цвет не совпадает с цветами соседей первого и второго порядка. Пусть $v'(v'_x, v'_y)$ – некоторый сосед вершины v.

- Если v' – сосед первого порядка, находящийся слева или справа от v, то $v_x = v'_x \pm 1,\ v_y = v'_y$. Найдем номер цвета для v':

$$c(v'_x, v'_y) = (-2 \cdot (v_x \pm 1) + v_y) \mod 5 = (c_v \pm 2) \mod 5.$$

- Если v' – сосед первого порядка, находящийся снизу или сверху от v, то $v_x = v'_x,\ v_y \pm 1 = v'_y$. Определим цвет v':

$$c(v'_x, v'_y) = (-2 \cdot v_x + v_y \pm 1) \mod 5 = (c_v \pm 1) \mod 5.$$

- Если v' – сосед второго порядка, расположенный по диагонали от v,

Edited with the demo version of Infix Pro PDF Editor
To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

то $v_x \pm 1 = v'_x,\ v_y \pm 1 = v'_y$. Цвет v':

$$c(v'_x, v'_y) = (-2 \cdot (v_x \pm 1) + v_y \pm 1) \mod 5 = (c_v \pm 2 \pm 1) \mod 5.$$

Поскольку $0 < |\pm 2 \pm 1| < 4$, то $(c_v \pm 2 \pm 1) \mod 5 \neq c_v$.

- Если v' – сосед второго порядка, расположенный слева или справа от v, то $v_x \pm 2 = v'_x,\ v_y = v'_y$. Цвет v':

$$c(v'_x, v'_y) = (-2 \cdot (v_x \pm 2) + v_y) \mod 5 = (c_v \pm 4) \mod 5.$$

- Если v' – сосед второго порядка, расположенный сверху или снизу от v, то $v_x = v'_x,\ v_y \pm 2 = v'_y$. Цвет v':

$$c(v'_x, v'_y) = (-2 \cdot v_x + v_y \pm 2) \mod 5 = (c_v \pm 2) \mod 5.$$

Во всех рассмотренных случаях цвета вершин v и v' различны, значит, формула (3) задает корректную функцию раскраски графа решетки в 5 цветов. Формула (4) обосновывается аналогично.

Отметим, что полученный набор формул позволяет раскрасить прямоугольный граф решетки в минимальное число цветов за полиномиальное время (порядка $O(n \cdot m)$ при последовательном присвоении цвета каждой вершине). При этом цвет каждой вершины определяется независимо от остальных вершин.

Для произвольного графа решетки G задача РАСКРАСКА-2 может быть решена следующим образом. Нужно взять минимальный прямоугольный граф решетки $R(n, m)$ такой, что $G \subseteq R(n, m)$, и раскрасить его в минимально возможное количество цветов. После этого полученную раскраску наложить на граф G. Однако решение будет не всегда оптимальным по количеству использованных цветов. В частности, можно построить такой граф решетки G, что максимальная степень вершины в нем равна 3, $n \geq 3$ и $m \geq 3$ в соответствующем графе $R(n, m)$, а задача РАСКРАСКА-2 имеет решение с параметром $K = 4$, но предложенный метод с наложением раскраски прямоугольного графа находит решение с пятью цветами.

Выше мы рассмотрели случай, когда граф решетки представляет собой цепь. Тогда он может быть раскрашен в 3 цвета. Заметим, что, кроме цепей, существует только один класс графов, которые могут быть раскрашены в 3 цвета методом двухшаговой раскраски. Эти графы представляют собой простые циклы (степени всех вершин равны 2), причем количество вершин $|V|$ в графе кратно трем.

Заключение

В данной статье были исследованы некоторые свойства задачи о двухшаговой раскраске графа, рассмотрена связь с классической задачей о раскраске, доказана NP-полнота исследуемой задачи.

Для прямоугольных графов решетки были найдены функции раскраски, позволяющие за полиномиальное время раскрашивать вершины графа на основе их координат (безотносительно положения остальных вершин).

Список литературы / References

[1] Korsakov S. V., Smirnov A. V., Sokolov V. A., "Principles of Organizing the Interoperability of Equipollent Nodes in a Wireless Mesh-Network with Time Division Multiple Access", *Automatic Control and Computer Sciences*, **50**:6 (2016), 415–422.

[2] Harary F., *Graph theory*, Addison-Wesley Pub. Co., 1969.

[3] Garey M. R., Johnson D. S., *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman and Company, 1979.

[4] Рублев В. С., *Элементы теории графов. Изоморфизм, планарность, маршруты в графах*, Ярославль: ЯрГУ, 2010; [Rublev V. S., *Elementy teorii grafov. Izomorfizm, planarnost', marshruty v grafakh*, Yaroslavl: YSU, 2010, (in Russian).]

[5] Umans C., Lenhart W., "Hamiltonian Cycles in Solid Grid Graphs", *Proceedings of the 38th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, 1997, 496–505.

[6] Keshavarz-Kohjerdi F., Bagheri A., "An efficient parallel algorithm for the longest path problem in meshes", *The Journal of Supercomputing*, **65**:2 (2013), 723–741.

Medvedeva N. S., Smirnov A. V., "NP-completeness and One Polynomial Subclass of the Two-Step Graph Colouring Problem", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **26**:3 (2019), 405–419.

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-3-405-419

Abstract. In this paper, we study the two-step colouring problem for an undirected connected graph. It is required to colour the graph in a given number of colours in a way, when no pair of vertices has the same colour, if these vertices are at a distance of 1 or 2 between each other. Also the corresponding recognition problem is set. The problem is closely related to the classical graph colouring problem. In the article, we study and prove the polynomial reduction of the problems to each other. So it allows us to prove NP-completeness of the problem of two-step colouring. Also we specify some of its properties. Special interest is paid to the problem of two-step colouring in application to rectangular grid graphs. The maximum vertex degree in such a graph is between 0 and 4. For each case, we elaborate and prove the function of two-vertex colouring in the minimum possible number of colours. The functions allow each vertex to be coloured independently from others. If vertices are examined in a sequence, colouring time is polynomial for a rectangular grid graph.

Keywords: two-step graph colouring, NP-completeness, grid graph, rectangular grid graph

On the authors:
Medvedeva Natalya Sergeevna, orcid.org/0000-0002-1632-5411, Student,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150003, Russia, e-mail: medvedeva270598@mail.ru

Smirnov Alexander Valeryevich, orcid.org/0000-0002-0980-2507, PhD, Associate Professor
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150003, Russia, e-mail: alexander_sm@mail.ru

Acknowledgments:
[1] The reported study was funded by RFBR according to the research project № 17-07-00823 A.