Моделирование и анализ информационных систем. Т. 26, № 3 (2019), с. 441–449
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 26, No 3 (2019), pp. 441–449

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-3-441-449

УДК 514.17+517.51+519.6

Геометрические оценки при интерполяции на n-мерном шаре

Невский М. В.

Поступила в редакцию 25 января 2019
После доработки 9 июня 2019
Принята к публикации 17 июня 2019

Аннотация. Пусть $n \in \mathbb{N}$, B_n — евклидов единичный шар в $\mathbb{R}^n$, задаваемый неравенством $\|x\| \leq 1$, $\|x\| := \left(\sum\limits_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Под $C(B_n)$ мы понимаем пространство непрерывных функций $f : B_n \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{C(B_n)} := \max\limits_{x \in B_n} |f(x)|$, под $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — совокупность многочленов от n переменных степени ≤ 1, т. е. линейных функций на $\mathbb{R}^n$. Пусть $x^{(1)}, \ldots, x^{(n+1)}$ — вершины n-мерного невырожденного симплекса $S \subset B_n$. Интерполяционный проектор $P : C(B_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, соответствующий симплексу S, определяется равенствами $Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right)$. Через $\|P\|_{B_n}$ обозначим норму P как оператора из $C(B_n)$ в $C(B_n)$. Определим $\theta_n(B_n)$ как минимальную величину $\|P\|_{B_n}$ при условии $x^{(j)} \in B_n$. Описывается подход, при котором норму проектора удаётся оценить снизу через объём симплекса. Пусть $\chi_n(t) := \frac{1}{2^n n!}\left[(t^2-1)^n\right]^{(n)}$ — стандартизованный многочлен Лежандра степени n. В статье доказывается неравенство $\|P\|_{B_n} \geq \chi_n^{-1}\left(\frac{\mathrm{vol}(B_n)}{\mathrm{vol}(S)}\right)$. Из этой оценки выводится эквивалентность $\theta_n(B_n) \asymp \sqrt{n}$. Даются оценки констант из неравенств отмеченного вида, а также сравнение с аналогичными соотношениями для линейной интерполяции на единичном n-мерном кубе $[0,1]^n$. Полученные результаты могут иметь приложения в полиномиальной интерполяции и вычислительной геометрии.

Ключевые слова: симплекс, шар, объём, линейная интерполяция, проектор, норма, оценка

Для цитирования: Невский М. В., "Геометрические оценки при интерполяции на n-мерном шаре", *Моделирование и анализ информационных систем*, **26**:3 (2019), 441–449.

Об авторах:
Невский Михаил Викторович, orcid.org/0000-0002-6392-7618, доктор физ.-мат. наук, доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: mnevsk55@yandex.ru

1. Основные определения и обозначения

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Элемент $x \in \mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Обозначим

$$\|x\| := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad B_n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}, \quad Q_n := [0,1]^n.$$

Запись $L(n) \asymp M(n)$ означает, что существуют $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от n, для которых верно $c_1 M(n) \le L(n) \le c_2 M(n)$. Под $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ будем понимать совокупность многочленов от n переменных степени ≤ 1, т. е. линейных функций на $\mathbb{R}^n$.

Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$ с вершинами $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)$, $1 \le j \le n+1$. Рассмотрим невырожденную *матрицу вершин (матрицу узлов)*

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Верно равенство $\mathrm{vol}(S) = \frac{|\det(\mathbf{A}|}{n!}$. Положим $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$. Определим λ_j как многочлены из $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$, коэффициенты которых составляют столбцы $\mathbf{A}^{-1}$, т. е. $\lambda_j(x) := l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$. Мы называем λ_j *базисными многочленами Лагранжа, соответствующими симплексу* S. Числа $\lambda_j(x)$ являются барицентрическими координатами точки $x \in \mathbb{R}^n$ относительно S.

Для выпуклого тела $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ через $C(\Omega)$ обозначим пространство непрерывных функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ с равномерной нормой

$$\|f\|_{C(\Omega)} := \max_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Будем говорить, что интерполяционный проектор $P : C(\Omega) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ соответствует симплексу $S \subset \Omega$, если узлы интерполяции совпадают с вершинами $x^{(j)}$ этого симплекса. Проектор P определяется равенствами $Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right)$. Справедлив аналог интерполяционной формулы Лагранжа

$$Pf(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f\left(x^{(j)}\right) \lambda_j(x). \tag{1}$$

Обозначим через $\|P\|_\Omega$ норму P как оператора из $C(\Omega)$ в $C(\Omega)$. Из (1) следует, что

$$\|P\|_\Omega = \max_{x \in \Omega} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|.$$

Если Ω — выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$ (например, $\Omega = Q_n$), то это равенство эквивалентно

$$\|P\|_\Omega = \max_{x \in \mathrm{ver}(\Omega)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|,$$

где $\mathrm{ver}(\Omega)$ — совокупность вершин Ω.

Через $\theta_n(\Omega)$ обозначим минимальную величину $\|P\|_\Omega$ при условии $x^{(j)} \in \Omega$. В случае $\Omega = Q_n$ различные соотношения для чисел $\theta_n(\Omega)$, в том числе эквивалентность $\theta_n(\Omega) \asymp \sqrt{n}$, были доказаны автором ранее (эти результаты систематизированы в [1]). В дальнейшем ряд оценок удалось улучшить (см. [2, 3] и ссылки в этих работах).

В настоящей статье рассматривается случай $\Omega = B_n$. Описывается подход, при котором норму интерполяционного проектора $P : C(B_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ удаётся оценить снизу через объём соответствующего симплекса. Существенной чертой этого подхода является применение классических многочленов Лежандра. Устанавливается, что $\theta_n(B_n) \asymp \sqrt{n}$. Иными словами, интерполяционный проектор, соответствующий правильному симплексу, вписанному в граничную сферу, имеет норму, эквивалентную минимальной.

2. Оценка нормы проектора через объём симплекса

Стандартизованным многочленом Лежандра степени n называется функция

$$\chi_n(t) := \frac{1}{2^n n!}\left[(t^2-1)^n\right]^{(n)}$$

(формула Родрига). По поводу свойств χ_n см., например, [5, 6]. Многочлены Лежандра ортогональны на $[-1,1]$ с весом $w(t) = 1$. Известно, что $\chi_n(1) = 1$; если $n \geq 1$, то $\chi_n(t)$ возрастает при $t \geq 1$. Обозначим через χ_n^{-1} функцию, обратную к χ_n на полуоси $[1, +\infty)$.

Появление многочленов Лежандра в круге наших вопросов связано с их следующим свойством. Для $\gamma \geq 1$ введём в рассмотрение множество

$$E_{n,\gamma} := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |x_j| + \left|1 - \sum_{j=1}^n x_j\right| \leq \gamma\right\}.$$

В 2003 г. автор установил, что

$$\mathrm{mes_n}(E_{n,\gamma}) = \frac{\chi_n(\gamma)}{n!} \tag{2}$$

(доказательство приводится и в [1]). С помощью этого равенства удалось получить нижние оценки для норм проекторов при линейной интерполяции на единичном кубе Q_n. Справедливы соотношения

$$\theta_n(Q_n) \geq \chi_n^{-1}\left(\frac{1}{\nu_n}\right) = \chi_n^{-1}\left(\frac{n!}{h_n}\right). \tag{3}$$

Здесь ν_n — максимальный объём симплекса, содержащегося в кубе Q_n, h_n — величина максимального определителя порядка n, состоящего из 0 и 1. С привлечением свойств χ_n из (3) был получен ряд более обозримых неравенств, например, $\theta_n(Q_n) > \frac{1}{e}\sqrt{n-1}$. Последняя оценка оказалась точной по порядку n, что привело к соотношению $\theta_n(Q_n) \asymp \sqrt{n}$.

Ниже мы распространим этот подход на линейную интерполяцию функций, заданных на единичном шаре B_n. Пусть $\varkappa_n := \mathrm{vol}(B_n)$. Через σ_n обозначим объём правильного симплекса, вписанного в B_n.

Теорема 1. *Для любого интерполяционного проектора* $P : C(B_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, *соответствующего симплекса* $S \subset B_n$ *и матрицы узлов* $\mathbf{A}$ *справедливы соотношения*

$$\|P\|_{B_n} \geq \chi_n^{-1}\left(\frac{\varkappa_n}{\mathrm{vol}(S)}\right) = \chi_n^{-1}\left(\frac{n!\varkappa_n}{|\det(\mathbf{A})|}\right). \tag{4}$$

Доказательство. Правильный симплекс, вписанный в шар, имеет максимальный объём из всех симплексов, содержащихся в этом шаре (см. [8–10]). Поэтому $\mathrm{vol}(S) = \frac{|\det(\mathbf{A})}{n!} \le \sigma_n$. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ вычтем из i-й строки матрицы $\mathbf{A}$ её $(n+1)$-ю строку. Обозначим через $\mathbf{B}$ подматрицу порядка n, которая будет располагаться в первых n строках и столбцах полученной матрицы. Тогда

$$|\det(\mathbf{B})| = |\det(\mathbf{A})| = n!\mathrm{vol}(S) \le n!\sigma_n.$$

Иначе говоря,

$$\frac{n!\sigma_n}{|\det(\mathbf{B})|} \ge 1. \tag{5}$$

Пусть $x^{(j)}$ — вершины, λ_j — базисные многочлены Лагранжа симплекса S. Поскольку $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_{n+1}(x)$ суть барицентрические координаты точки x, имеем

$$\|P\|_{B_n} = \max_{x\in B_n} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| = \max\Bigl\{\sum_{j=1}^{n+1} |\beta_j| : \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j = 1, \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j x^{(j)} \in B_n\Bigr\}.$$

Заменим β_{n+1} на равную величину $1 - \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j$. Условие $\sum\limits_{j=1}^{n+1} \beta_j x^{(j)} \in B_n$ эквивалентно $\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j (x^{(j)} - x^{(n+1)}) \in B' := B_n - x^{(n+1)}$. Таким образом,

$$\|P\|_{B_n} = \max\Bigl\{\sum_{j=1}^{n} \Bigl|\beta_j\Bigr| + \Bigl|1 - \sum_{j=1}^{n} \beta_j\Bigr|\Bigr\}. \tag{6}$$

Максимум в (6) берётся по числам β_j, для которых $\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j (x^{(j)} - x^{(n+1)}) \in B'$.

Рассмотрим невырожденный линейный оператор $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, сопоставляющий точке $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ точку $x = (x_1, \ldots, x_n)$ по правилу

$$x = F(\beta) := \sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(x^{(j)} - x^{(n+1)}\right).$$

Справедливо матричное равенство $F(\beta) = (\beta_1, \ldots, \beta_n)\mathbf{B}$, где $\mathbf{B}$ — введённая выше $(n \times n)$-матрица с элементами $b_{ij} = x_j^{(i)} - x_j^{(n+1)}$. Положим

$$\gamma^* := \chi_n^{-1} \left(\frac{n!\varkappa_n}{|\det(\mathbf{B})|}\right).$$

Так как $\varkappa_n \ge \sigma_n$, то в силу (5) число γ^* определено корректно. Заметим, что

$$\chi_n(\gamma^*) = \frac{n!\varkappa_n}{|\det(\mathbf{B})|}. \tag{7}$$

Пусть теперь $1 \le \gamma < \gamma^*$,

$$E_{n,\gamma} = \Bigl\{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} |\beta_j| + \Bigl|1 - \sum_{j=1}^{n} \beta_j\Bigr| \le \gamma\Bigr\}.$$

Покажем, что $B' \not\subset F(E_{n,\gamma})$. Достаточно проверить, что $\mathrm{mes_n}(F(E_{n,\gamma})) < \mathrm{mes_n}(B') = \varkappa_n$. Это действительно так:

$$\mathrm{mes_n}(F(E_{n,\gamma})) < \mathrm{mes_n}(F(E_{n,\gamma^*})) = |\det \mathbf{B}| \cdot \mathrm{mes_n}(E_{n,\gamma^*}) = |\det \mathbf{B}| \cdot \frac{\chi_n(\gamma^*)}{n!} = \varkappa_n.$$

Мы применили (2) и (7). Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $x^{(\varepsilon)}$ со свойствами

$$x^{(\varepsilon)} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j^{(\varepsilon)} \left(x^{(j)} - x^{(n+1)}\right) \in B', \qquad \sum_{j=1}^{n} \left|\beta_j^{(\varepsilon)}\right| + \left|1 - \sum_{j=1}^{n} \beta_j^{(\varepsilon)}\right| \geq \gamma^* - \varepsilon.$$

В силу (6) это даёт $\|P\|_{B_n} \geq \gamma^* - \varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ получаем

$$\|P\| \geq \gamma^* = \chi_n^{-1}\left(\frac{n!\varkappa_n}{|\det(\mathbf{B})|}\right) = \chi_n^{-1}\left(\frac{n!\varkappa_n}{|\det(\mathbf{A})|}\right) = \chi_n^{-1}\left(\frac{\varkappa_n}{\mathrm{vol}(S)}\right).$$

Теорема доказана. □

Следствие 1. *Для любого n*

$$\theta_n(B_n) \geq \chi_n^{-1}\left(\frac{\varkappa_n}{\sigma_n}\right). \tag{8}$$

Доказательство. Пусть P — произвольный интерполяционный проектор. Так как объём соответствующего симплекса не превышает σ_n, то в силу (4)

$$\|P\|_{B_n} \geq \chi_n^{-1}\left(\frac{\varkappa_n}{\mathrm{vol}(S)}\right) \geq \chi_n^{-1}\left(\frac{\varkappa_n}{\sigma_n}\right).$$

Отсюда следует (8). □

Как известно,

$$\varkappa_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}, \qquad \sigma_n = \frac{1}{n!}\sqrt{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}, \tag{9}$$

$$\varkappa_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}, \qquad \varkappa_{2k+1} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k+1)!!} = \frac{2(k!)(4\pi)^k}{(2k+1)!} \tag{10}$$

(см., например, [7], [1]). Поэтому оценку (8) можно конкретизировать.

Следствие 2. *При любом n*

$$\theta_n(B_n) \geq \chi_n^{-1}\left(\frac{\pi^{\frac{n}{2}} n!}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\sqrt{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}\right). \tag{11}$$

Если $n = 2k$, то (11) эквивалентно неравенству

$$\theta_{2k}(B_{2k}) \geq \chi_{2k}^{-1}\left(\frac{\pi^k (2k)!}{k!\sqrt{2k+1}\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^k}\right). \tag{12}$$

При $n = 2k+1$ выполняется

$$\theta_{2k+1}(B_{2k+1}) \geq \chi_{2k+1}^{-1}\left(\frac{2(k!)(4\pi)^k}{\sqrt{2k+2}\left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^{\frac{2k+1}{2}}}\right). \tag{13}$$

Доказательство. Достаточно применить (8), (9) и (10). □

Следствие 3. *Пусть P — минимальный интерполяционный проектор, т. е. такой, для которого $\|P\|_{B_n} = \theta_n(B_n)$. Тогда*

$$\mathrm{vol}(S) \geq \frac{\varkappa_n}{\chi_n\left(\sqrt{n+1}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\chi_n\left(\sqrt{n+1}\right)}. \tag{14}$$

Доказательство. Как доказано в [4], справедлива оценка $\theta_n(B_n) \leq \sqrt{n+1}$. Поэтому для минимального проектора выполняются неравенства

$$\sqrt{n+1} \geq \|P\|_{B_n} \geq \chi_n^{-1}\left(\frac{\varkappa_n}{\mathrm{vol}(S)}\right).$$

Мы применили (4). Остаётся сравнить крайние величины и привлечь (9). □

Так как $|\det(\mathbf{A})| = n!\mathrm{vol}(S)$, то из (14) получается и оценка для определителя матрицы узлов минимального проектора. Именно, $|\det(\mathbf{A})| \geq \varepsilon_n$, где ε_n в $n!$ раз превосходит правую часть (14). Без указания значения ε_n это ограничение использовалось в [4].

3. Соотношение $\theta_n(B_n) \asymp \sqrt{n}$

Из формулы Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\zeta_n}{12n}}$, $0 < \zeta_n < 1$, имеем

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}. \tag{15}$$

Нам потребуются также следующие оценки $\chi_n^{-1}(s)$ для чётных и для нечётных n, доказанные в [1, п. 3.4.2]:

$$\chi_{2k}^{-1}(s) > \left(\frac{(k!)^2 s}{(2k)!}\right)^{\frac{1}{2k}}, \qquad \chi_{2k+1}^{-1}(s) > \left(\frac{(k+1)!k!s}{(2k+1)!}\right)^{\frac{1}{2k+1}}. \tag{16}$$

Теорема 2. *Существует константа $c > 0$, не зависящая от n, такая что*

$$\theta_n(B_n) > c\sqrt{n}. \tag{17}$$

Неравенство (17) выполняется, например, при

$$c = \frac{\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt{12e}\cdot\sqrt[6]{3}} = 0.2135\ldots$$

Доказательство. Пусть сначала $n = 2k$ — чётное. Применяя (12) и (16), получим

$$\theta_{2k}(B_{2k}) \geq \chi_{2k}^{-1}\left(\frac{\pi^k(2k)!}{k!\sqrt{2k+1}\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^k}\right) > \left(\frac{\pi^k(2k)!(k!)^2}{k!\sqrt{2k+1}\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^k(2k)!}\right)^{\frac{1}{2k}} =$$

$$= \left(\frac{\pi^k k!}{\sqrt{2k+1}\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^k} \right)^{\frac{1}{2k}}.$$

Оценим $k!$ снизу с помощью (15):

$$\theta_{2k}(B_{2k}) > \left(\frac{\pi^k \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k}{\sqrt{2k+1}\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^k} \right)^{\frac{1}{2k}} = \sqrt{\frac{\pi}{e}} \left(\frac{2\pi k}{2k+1}\right)^{\frac{1}{4k}} \sqrt{\frac{2k}{2k+1}} \cdot \sqrt{k}.$$

Так как $n = 2k$, то при любом чётном n

$$\theta_n(B_n) > \sqrt{\frac{\pi}{2e}} \left(\frac{\pi n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2n}} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot \sqrt{n} > \sqrt{\frac{\pi}{3e}} \cdot \sqrt{n}. \tag{18}$$

Мы учли неравенства $\frac{\pi n}{n+1} > 1$, $\frac{n}{n+1} > \frac{2}{3}$. Заметим, что $\sqrt{\frac{\pi}{3e}} = 0.6206\ldots$

Пусть теперь n — нечётное, $n = 2k+1$. В этом случае оценки (13) и (16) дают

$$\theta_{2k+1}(B_{2k+1}) \geq \chi_{2k+1}^{-1} \left(\frac{2(k!)(4\pi)^k}{\sqrt{2k+2}\left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^{\frac{2k+1}{2}}} \right) >$$

$$> \left(\frac{2(k!)(4\pi)^k (k+1)!k!}{\sqrt{2k+2}\left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^{\frac{2k+1}{2}} (2k+1)!} \right)^{\frac{1}{2k+1}} = A^{\frac{1}{2k+1}} \cdot B^{\frac{1}{2k+1}};$$

$$A := \frac{(k!)^2(k+1)!}{(2k+1)!}, \quad B := \frac{\sqrt{2}(4\pi)^k}{\sqrt{k+1}\left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^{\frac{2k+1}{2}}}.$$

Из (15) следует, что

$$A > \frac{2\pi k \left(\frac{k}{e}\right)^{2k} \cdot \sqrt{2\pi(k+1)}\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}}{\sqrt{2\pi(2k+1)}\left(\frac{2k+1}{e}\right)^{2k+1} e^{\frac{1}{12(2k+1)}}} =$$

$$= 2\pi e^{-k-\frac{1}{12(2k+1)}} k^{2k+1} (k+1)^{k+1+\frac{1}{2}} (2k+1)^{-\frac{1}{2}-(2k+1)},$$

поэтому

$$A^{\frac{1}{2k+1}} > (2\pi)^{\frac{1}{2k+1}} e^{-\frac{k}{2k+1}-\frac{1}{12(2k+1)^2}} k(k+1)^{\frac{k+1+\frac{1}{2}}{2k+1}} (2k+1)^{-\frac{1}{2(2k+1)}-1}.$$

Справедливы соотношения

$$(2\pi)^{\frac{1}{2k+1}} > 1, \qquad \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{12(2k+1)^2} < \frac{1}{2},$$

$$k(2k+1)^{-\frac{1}{2(2k+1)}-1} = \frac{k}{2k+1}(2k+1)^{-\frac{1}{2(2k+1)}} > \frac{1}{3}(2k+1)^{-\frac{1}{2(2k+1)}} > \frac{1}{3\sqrt[6]{3}}.$$

Значит,

$$A^{\frac{1}{2k+1}} > \frac{1}{3\sqrt[6]{3}\sqrt{e}}(k+1)^{\frac{k+1+\frac{1}{2}}{2k+1}} > \frac{1}{3\sqrt[6]{3}\sqrt{e}}\sqrt{k+1}.$$

Теперь оценим $B^{\frac{1}{2k+1}}$:

$$B^{\frac{1}{2k+1}} = \left(\frac{\sqrt{2}(4\pi)^k}{\sqrt{k+1}\left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^{\frac{2k+1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2k+1}} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{2k+1}}(4\pi)^{\frac{k}{2k+1}}\sqrt{\frac{2k+1}{2k+2}}(k+1)^{-\frac{1}{2(2k+1)}} >$$

$$> \sqrt[3]{4\pi} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot 2^{-\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[3]{\pi}.$$

Следовательно,

$$\theta_{2k+1}(B_{2k+1}) > A^{\frac{1}{2k+1}} \cdot B^{\frac{1}{2k+1}} > \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{\pi}}{3\sqrt[6]{3}\sqrt{e}} \cdot \sqrt{k+1} = \frac{\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt{6e}\sqrt[6]{3}} \cdot \sqrt{k+1}.$$

Так как $n = 2k+1$, то $\sqrt{k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2k+2} > \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}$. Таким образом, при любом нечётном n справедливо неравенство

$$\theta_n(B_n) > \frac{\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt{12e} \cdot \sqrt[6]{3}} \cdot \sqrt{n}. \tag{19}$$

Константа 0.2135... из правой части этого неравенства меньше, чем константа из полученного выше неравенства (18) для чётных n. Таким образом, соотношение (19) верно для каждого натурального n. Теорема доказана. □

Следствие 4. *Справедливо соотношение* $\theta_n(B_n) \asymp \sqrt{n}$.

Доказательство. В [4] установлено, что $\theta_n(B_n) \le \sqrt{n+1}$. Таким образом, нижняя оценка $\theta_n(B_n) > c\sqrt{n}$ является точной по размерности n. □

Пусть $P : C(B_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — интерполяционный проектор, узлы которого находятся в вершинах правильного симплекса, вписанного в граничную сферу $\|x\| = 1$.

Следствие 5. *С константами, не зависящими от n, имеет место эквивалентность* $\|P\|_{B_n} \asymp \theta_n(B_n)$.

Доказательство. Как показано в [4], верны неравенства $\sqrt{n} \le \|P\|_{B_n} \le \sqrt{n+1}$. Остаётся принять во внимание предыдущее следствие. □

Итак, наши результаты означают, что норма интерполяционного проектора P, соответствующего вписанному правильному симплексу, эквивалентна минимальной. Равенство $\|P\|_{B_n} = \theta_n(B_n)$ пока остаётся доказанным для $1 \le n \le 4$.

Автор выражает благодарность А. Ю. Ухалову за полезные компьютерные вычисления.

Список литературы / References

[1] Невский М. В., *Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции*, Ярославль: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, 2012; [Nevskii M. V., *Geometricheskie ocenki v polinomialnoy interpolyacii*, Yaroslavl: P. G. Demidov Yaroslavl State University, 2012, (in Russian).]

[2] Невский М. В., Ухалов А. Ю., “Новые оценки числовых величин, связанных с симплексом”, *Модел. и анализ информ. систем*, **24**:1 (2017), 94–110; English transl.: Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., “New estimates of numerical values related to a simplex”, *Aut. Control Comp. Sci.*, **51**:7 (2017), 770–782.

[3] Невский М. В., Ухалов А. Ю., “Об оптимальной интерполяции линейными функциями на n-мерном кубе”, *Модел. и анализ информ. систем*, **25**:3 (2018), 291–311; English transl.: Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., “On optimal interpolation by linear functions on an n-dimensional cube”, *Aut. Control Comp. Sci.*, **52**:7 (2018), 828–842.

[4] Невский М. В., Ухалов А. Ю., “Линейная интерполяция на евклидовом шаре в $\mathbb{R}^n$”, *Модел. и анализ информ. систем*, **26**:2 (2019), 279–296; [Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., “Linear interpolation on a Euclidean ball in $\mathbb{R}^n$”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **26**:2 (2019), 279–296, (in Russian).]

[5] Сегё Г., *Ортогональные многочлены*, Москва: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1962; [Szegö G., *Orthogonal polynomials*, American Mathematical Society, New York, 1959, (in English).]

[6] Суетин П. К., *Классические ортогональные многочлены*, Москва: Наука, 1979; [Suetin P. K., *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny*, Moscow: Nauka, 1979, (in Russian).]

[7] Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 3*, Москва: Физматлит, 2001; [Fikhtengol'ts G. M., *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenia. Tom 3*, Moscow: Fizmatlit, 2001, (in Russian).]

[8] Fejes Tóth L., *Regular figures*, New York: Macmillan/Pergamon, 1964.

[9] Slepian D., “The content of some extreme simplices”, *Pacific J. Math*, **31** (1969), 795–808.

[10] Vandev D., “A minimal volume ellipsoid around a simplex”, *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **45**:6 (1992), 37–40.

Nevskii M. V., "Geometric Estimates in Interpolation on an n-Dimensional Ball", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **26**:3 (2019), 441–449.

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-3-441-449

Abstract. Suppose $n \in \mathbb{N}$. Let B_n be a Euclidean unit ball in $\mathbb{R}^n$ given by the inequality $\|x\| \le 1$, $\|x\| := \left(\sum\limits_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. By $C(B_n)$ we mean a set of continuous functions $f : B_n \to \mathbb{R}$ with the norm $\|f\|_{C(B_n)} := \max\limits_{x \in B_n} |f(x)|$. The symbol $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ denotes a set of polynomials in n variables of degree ≤ 1, i. e., linear functions upon $\mathbb{R}^n$. Assume that $x^{(1)}, \ldots, x^{(n+1)}$ are vertices of an n-dimensional nondegenerate simplex $S \subset B_n$. The interpolation projector $P : C(B_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ corresponding to S is defined by the equalities $Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right)$. Denote by $\|P\|_{B_n}$ the norm of P as an operator from $C(B_n)$ onto $C(B_n)$. Let us define $\theta_n(B_n)$ as the minimal value of $\|P\|_{B_n}$ under the condition $x^{(j)} \in B_n$. We describe the approach in which the norm of the projector can be estimated from the bottom through the volume of the simplex. Let $\chi_n(t) := \frac{1}{2^n n!}\left[(t^2-1)^n\right]^{(n)}$ be the standardized Legendre polynomial of degree n. We prove that $\|P\|_{B_n} \ge \chi_n^{-1}\left(\frac{\mathrm{vol}(B_n)}{\mathrm{vol}(S)}\right)$. From this, we obtain the equivalence $\theta_n(B_n) \asymp \sqrt{n}$. Also we estimate the constants from such inequalities and give the comparison with the similar relations for linear interpolation upon the n-dimensional unit cube. These results have applications in polynomial interpolation and computational geometry.

Keywords: simplex, ball, linear interpolation, projector, norm, estimate

On the authors:
Mikhail V. Nevskii, orcid.org/0000-0002-6392-7618, Doctor of Science,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150003, Russian Federation, e-mail: mnevsk55@yandex.ru