Моделирование и анализ информационных систем. Т. 26, № 3 (2019), с. 450–468
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 26, No 3 (2019), pp. 450–468

©Чуканов С. Н., 2019

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-3-450-468

УДК 004.932.2

Сравнение диффеоморфных изображений на основе формирования персистентных гомологий

Чуканов С. Н.[1,2]

Поступила в редакцию 11 мая 2019
После доработки 29 августа 2019
Принята к публикации 31 августа 2019

Аннотация. Анализ формы объекта – проблема, которая связана такими областями, как геометрия, топология, обработка изображений, машинное обучение или вычислительная анатомия. При анализе формы оценивается деформация между исходной и терминальной формой объекта. Наиболее используемой моделью анализа формы является модель диффеоморфного метрического отображения больших деформаций (Large Deformation Diffeomorphic Metric Mapping – LDDMM). Модель LDDMM может быть дополнена функциональной негеометрической информацией объектов (объем, цвет, момент времени формирования). В работе рассмотрены алгоритмы построения множеств баркодов для сравнения диффеоморфных изображений, которые являются вещественными значениями, принимаемыми персистентными гомологиями. Отличительной особенностью использования персистентных гомологий по отношению к методам алгебраической топологии является получение большего количества информации о форме объекта. Важным направлением применения персистентных гомологий является изучение инвариантов больших объемов данных. Предлагается метод, основанный на персистентных когомологиях, который объединяет технологии персистентных гомологий с внедренной негеометрической информацией, представленной в виде функций от симплициальных комплексов. Предлагаемая структура расширенных баркодов с использованием когомологий повышает эффективность методов персистентных гомологий. Предложена модификация метода Вассерштейна для нахождения расстояния между изображениями введением негеометрической информации. Рассмотрена возможность формирования баркодов изображений инвариантных к преобразованиям вращения, сдвига и подобия.

Ключевые слова: распознавание образов, диффеоморфные преобразования, персистентные (ко)гомологии, расстояние Вассерштейна

Для цитирования: Чуканов С. Н., "Сравнение диффеоморфных изображений на основе формирования персистентных гомологий", *Моделирование и анализ информационных систем*, **26**:3 (2019), 450–468.

Об авторах:
Чуканов Сергей Николаевич, orcid.org/0000-0002-8106-9813, д-р техн. наук, профессор,
ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал
ул. Певцова, д.13, г. Омск, 644043 Россия, e-mail: ch_sn@mail.ru

Благодарности:
[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 18–07–00526 и № 18–08–01284.
[2] Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.5.1., проект № 0314-2019-0020.

Введение

Существуют различные методы решения задачи сравнения форм исходного изображения и терминального (целевого) изображения [1, 2]. Для анализа деформаций изображения от исходного к целевому в [3] рассматривается группа диффеоморфизмов, а деформация рассматривается как геодезическая (кратчайший путь) между исходным и целевым изображениями. Задача сравнения исходного и целевого изображений решается на основе метода построения минимизируемого функционала [3], характеризующего эволюцию диффеоморфного преобразования изображения от начального до терминального, и штрафа за отклонение траектории изображения от требуемой траектории. Для решения задачи сравнения применяется метод частиц-ориентиров (наиболее важных точек на изображении) [4]. В работе приводится постановка задачи, основанная на построении и решении уравнений Гамильтона для группы диффеоморфизмов частиц – точечных ориентиров изображения.

В случае анализа формы объекта используются геометрические, спектральные, топологические характеристики объекта. Геометрические характеристики объекта могут изменяться при диффеоморфных деформациях. Характеристики формы, определяемые топологическими методами, не зависят от координатного представления рассматриваемой формы и являются инвариантными при диффеоморфных преобразованиях. Основные методы топологии заключаются в создании сжатых комбинаторных представлений форм (например, триангуляции) и измерении формы объекта с помощью гомологических сигнатур.

В работе применяются алгоритмы построения множеств персистентных баркодов [5] для сравнения диффеоморфных изображений, которые являются вещественными значениями, принимаемыми персистентными гомологиями. Нахождение персистентных баркодов форм объектов позволяет изучать как непрерывные, так и дискретные структуры, что делает их использование полезным в вычислительной топологии. Отличительной особенностью использования персистентных гомологий по отношению к методам алгебраической топологии [6] является получение большего количества информации о форме объекта. Важным направлением применения персистентных гомологий является изучение инвариантов больших объемов данных. В дополнение к геометрической информации, существует широкий спектр негеометрической информации, которая ассоциируется с симплексами, представляющими изображение (цвет, момент времени формирования, давление пера и т.д.), которая не описывается персистентной гомологией. Желательно иметь математическую основу для систематического внедрения как геометрической, так и негеометрической информации в единые топологические описания. Для этого предлагается метод, основанный на персистентных когомологиях, который объединяет технологии персистентных гомологий с внедренной негеометрической информацией, представленной в виде функций от симплициальных комплексов. Для это баркоды персистентных гомологий расширяются функциями от симплексов для представления разнородной информации. Предлагаемая структура расширенных баркодов с использованием когомологий повышает эффективность методов персистентных гомологий.

Для нахождения расстояния между изображениями при распознавании образов предлагается метод Леонида Вассерштейна модифицировать и в формулу для расстояния между изображениями, определяемого по баркодам персистентных гомо-

логий, ввести негеометрическую информацию о расстоянии между изображениями, обусловленную неравенствами функций исходного и терминального изображений соответствующих симплексов.

Гамильтонова механика точечных ориентиров изображения

Представление диффеоморфного отображения изображений можно рассмотреть как эволюцию точечных ориентиров (наиболее важных точек) изображения на основе гамильтоновой механики. Рассмотрим параметризацию формы изображения с помощью частиц – точечных ориентиров. Пусть $q_i(t), i = 1, \ldots, N$, используется для обозначения вектора положения i-й частицы и $p_i(t), i = 1, \ldots, N$, – для соответствующего вектора импульса в момент времени t. Если формально принять, что импульсы и скорости частиц связаны соотношением: $p_i = \mathcal{L} \cdot v_i$, где $\mathcal{L}$ – линейный обратимый оператор (в механике соответствует инертной массе), то обратное соотношение: $v_i = \mathcal{L}^{-1} \cdot p_i = \mathcal{K} p_i$. Скалярное произведение векторов p_i и v_i, соответствующее метрике С.Л. Соболева [7], можно представить в виде: $\langle p_i, v_i \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{L} v_i, v_i \rangle_{L^2}$. Для оператора $\mathcal{L} = \mathrm{id} - \alpha \nabla^2$ в пространстве $\Omega = \mathbb{R}^2$ обратным оператором формально является оператор $\mathcal{K} = \mathcal{L}^{-1}$, который можно аппроксимировать скалярной функцией Гаусса [2]:

$$K(q_i - q_j) = \beta e^{-\alpha^{-2}(q_i - q_j)^T (q_i - q_j)}.$$

Построим минимизируемый функционал, который соответствует деформации изображения, представленного совокупностью точечных ориентиров, в виде:

$$J_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \sum_{i,j=1}^{N} p_i^T K(q_i - q_j) p_j \right\} dt.$$

Минимизация J_0 должна осуществляется по значениям векторов q_i, q_j и p_i, p_j. Но значения векторов q_i, q_j определяются начальными значениями $q_i(0), q_j(0)$, поэтому минимизация осуществляется по начальным неизвестным значениям векторов $p_i(0), p_j(0)$. Задачу минимизации J_0 можно представить как задачу оптимального управления, связанную с гамильтонианом: $H_0(q, p) = \frac{1}{2} \sum\limits_{i,j=1}^{N} p_i^T K(q_i - q_j) p_j$.

Если минимизируемый функционал J_0 принять в виде (3), а гамильтониан системы в форме:

$$H(q, p) = H_0(q, p) + \sigma^{-2} \sum_{i=1}^{N} (\dot{q}_i - \nu_i(q))^2 = H_0(q, p) + \sigma^2 \sum_{i=1}^{N} p_i^2,$$

то уравнения Гамильтона для производных компонент $\dot{p} = (\dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_N), \dot{q} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N)$ примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^{N} p_i^T \nabla_{q_i} K(q_i - q_j) p_j; \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^{N} K(q_i - q_j) p_j + \sigma^2 p_i. \end{aligned} \tag{1}$$

В функции Гамильтона $H(q,p)$ вводится штраф $\sigma^{-2}\sum\limits_{i=1}^{N}(\dot{q}_i-\nu_i(q))^2$ при наличии рассогласования $(\dot{q}_i-\nu_i(q))$.

Построение комплекса Вьеториса-Рипса

На основе оценивания функционала (см. (3)) можно построить алгоритм распознавания изображений [7], но этот алгоритм требует проведения предварительной нормализации изображения и не является инвариантным по отношению преобразованиям координат. Поэтому алгоритмы распознавания, инвариантные по отношению к преобразованиям координат (coordinate-free), являются актуальными [8–10]; к таким алгоритмам относятся алгоритмы вычислительной топологии [11,12] (см. Приложение 1).

Для сравнения изображений, представленных множеством точечных ориентиров, в настоящей работе предлагается построение комплекса Вьеториса-Рипса из точечных облаков этих ориентиров, построенных вокруг этих ориентиров. Рассмотрим построение симплициальных комплексов из точечных облаков вложенных в $\mathbb{R}^d$. Пусть задано множество точечных ориентиров $S=\{q_1,...,q_k\}, q_i\in\mathbb{R}^2$. Комплекс Вьеториса-Рипса $R(r)$ представляет собой симплициальный комплекс, построенный на множестве точек S; комплекс Вьеториса-Рипса имеет симплекс тогда, когда все пары точек находятся на расстоянии, не превышающем $2r$ (см. Приложение 1):

$$R(r)=\{\sigma=S|\,\|q_i-q_j\|\le 2r,\forall i,j\}$$

.

При $r=0$, числа Бетти множества k точек равны $\beta_0=k,\beta_i=0,i\ge 1$; характеристика Эйлера $\chi=\beta_0$. При диффеоморфных преобразованиях множества k точек эти топологические характеристики не изменяются. При изменении $r\in\mathbb{R}^+$ значения чисел Бетти и характеристик Эйлера сформированного комплекса Вьеториса-Рипса изменяются при соответствующих диффеоморфных преобразованиях. Существуют точки появления r_b (birth) и точки исчезновения r_d (death) нетривиальных классов гомологии (см. Приложение 1) и соответствующих чисел Бетти и характеристик Эйлера. Горизонтальные полуинтервалы в 2D полуплоскости называются баркодами $\{[b_i\ldots d_i)|\,d_i\ge b_i\ge 0\}$ (здесь i – номер баркода). Баркоды, числа Бетти и характеристики Эйлера для точечных облаков можно определить с помощью пакета JavaPlex [13].

Персистентная гомология сохраняет следы появления b_i и исчезновения d_i классов гомологии вдоль фильтрации симплициального комплекса, обусловленной сортировкой $\{x_1<x_2<\ldots<x_l\}$, которая включает в себя информацию о гомологии каждого фиксированного симплициального комплекса при фильтрации $\{X(x_i)\}$. Группы гомологий $H_k(X(x_i))$ могут быть представлены в виде векторных пространств. Карта включения, связывающая группы, индуцирует последовательность линейных преобразований на векторных пространствах:

$$H_k(X(x_0))\to H_k(X(x_1))\to\ldots\to H_k(X(x_l)).$$

Если существует функционал $\mathcal{Y}(\mathcal{X})$, который принимает значения на цепи $\mathcal{X}$, что можно записать в виде $\mathcal{Y}(\mathcal{X})=\langle\mathcal{Y},\mathcal{X}\rangle$, то определение кограничного оператора

$d_n : C^{n-1} \to C^n$ принимает форму определения сопряженного линейного оператора:

$$\langle d_n \mathcal{Y}, \mathcal{X} \rangle = \langle \mathcal{Y}, \partial_n \mathcal{X} \rangle, \mathcal{X} \in C_n, \mathcal{Y} \in C^{n-1}; d_{n+1} d_n = 0.$$

Определим группы n-мерных коциклов $Z^n = \mathrm{Ker}\,(d_n)$ и n-мерных кограниц $B^n = \mathrm{Im}\,(d_{n-1})$. Факторгруппа $H^n = Z^n/B^n$ называется n-мерной группой когомологий коцепного комплекса. Для персистентных когомологий можно построить диаграмму (см. Приложение 2):

$$H^k\left(X(x_0), \mathbb{R}\right) \leftarrow H^k\left(X(x_1), \mathbb{R}\right) \leftarrow \ldots \leftarrow H^k\left(X(x_l), \mathbb{R}\right).$$

Из теоремы универсальности коэффициентов [6] для когомологий следует, что существует изоморфизм между группой гомологий $H_k(X)$ и группой когомологий $H^k(X, \mathbb{R})$. Это свойство означает, что персистентные гомологии и персистентные когомологии имеют одинаковые баркоды.

Пример 1. В таблице 1 приведен пример построения комплекса Вьеториса-Рипса для четырех облаков точек с центрами в вершинах $q_1 = (0, 1)$, $q_2 = (-1, 0)$, $q_3 = (0, -1)$, $q_4 = (1, 0)$, при $r = 1.0$, $r = 1.5$ и $r = 2.5$ с указанием чисел Бетти и характеристик Эйлера.

Для полученного комплекса Вьеториса-Рипса можно получить следующие баркоды: в размерности 0: 3[0 ... 1.414); [0 ... ∞); в размерности 1: [1.414 ... 2).

Модифицированное расстояние Вассерштейна

С учетом когомологий на симплексах (точках, отрезках, треугольниках ...) в работе предлагается расширить баркоды соответствующими значениями коцепей. Расширенный баркод может быть представлен тремя элементами: значением появления баркода b (birth), значением исчезновения баркода d (death) и значением функции на заданной цепи симплекса f. Для заданных расширенных баркодов одинаковой размерности $B = \{\{b_i, d_i, f_i\}\}_{i \in I}$; $B' = \left\{\left\{b'_j, d'_j, f'_j\right\}\right\}_{j \in J}$, где $j \in J$ – номер симплекса, полученный отображением симплекса с номером $i \in I$: $j = \phi\,(i)$, можно вычислить расстояние между B и B', аналогичное расстоянию Вассерштейна. Определяем расстояния между двумя соответствующими баркодами:

$$\Delta_b\left([b, d), [b', d')\right) = \max\left\{|b - b'|, |d - d'|\right\},$$

и расстояние между функциями f_j и f'_j:

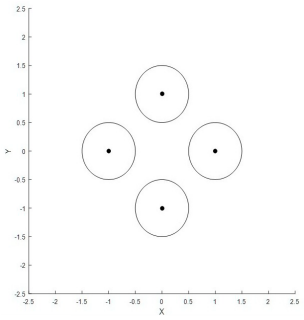
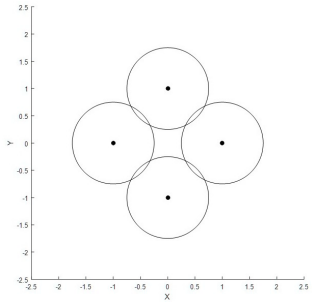
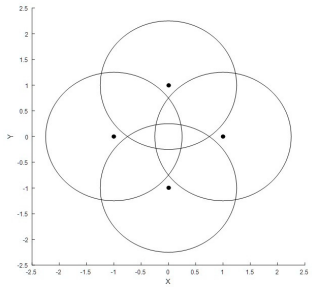
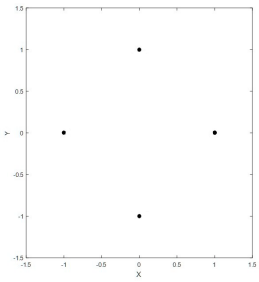
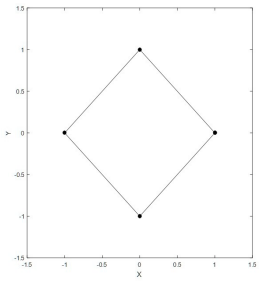
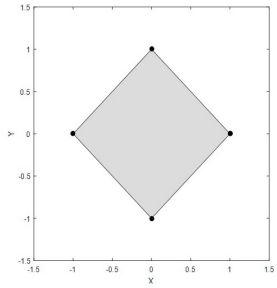
$$\Delta_f\left(f, f'\right) = \left|(d-b)^{-1} \int\limits_b^d f\,(x)\,dx - (d'-b')^{-1} \int\limits_{b''}^{d'} f'\,(x)\,dx\right|.$$

При $f\,(x) = \mathrm{const}, f'\,(x) = \mathrm{const}$ можно записать:

$$\Delta_f\left(f_i, f'_j\right) = \left|f_i - f'_j\right|. \tag{2}$$

Определим расстояние между изображениями, обусловленное неравенствами границ баркодов исходного и терминального изображений (расстояние Вассерштейна):

Таблица 1. Пример построения комплекса Вьеториса-Рипса
Table 1: An example of building a Vietoris-Rips complex

	$r = 1,0$	$r = 1,5$	$r = 2,5$
Точечные облака			
Комплекс Вьеториса-Рипса			
Числа Бетти	$\beta_0 = 4; \beta_1 = 0$	$\beta_0 = 1; \beta_1 = 1$	$\beta_0 = 1; \beta_1 = 0$
Характеристика Эйлера	$\chi = 4$	$\chi = 0$	$\chi = 1$

$d_{W,2}\left(B, B'\right) = \left(\sum\limits_{i \in I}\left(\Delta_b\left(\left[b_i, d_i\right), \left[b'_{\phi(i)}, d'_{\phi(i)}\right]\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Расстояние между изображениями, обусловленное неравенствами функций исходного и терминального изображений соответствующих симплексов:

$$d_f(B, B') = (\sum_{i \in I}(\Delta_f(f_i, f'_{\phi(i)}))^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Модифицированное расстояние Вассерштейна можно определить из соотношения для евклидовой метрики:

$$d_{MW}(\mu_b, \mu_f, B, B') = (\mu_b \cdot d_{W,2}(B, B')^2 + \mu_f \cdot d_f(B, B')^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

где μ_b – весовой параметр для $d_{W,2}(B, B')$ и μ_f – весовой параметр для $d_f(B, B')$.

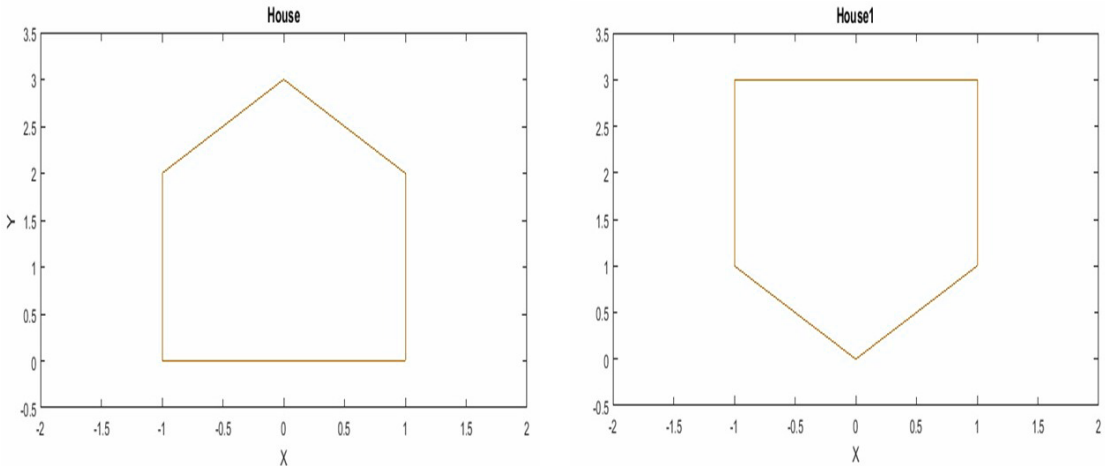
Пример 2. Рассмотрим (в нотации JavaPlex) объект из 5 точек:

$$\text{points_House} = [-1,0;\ 1,0;\ 1,2;\ 0,3;\ -1,2],$$

аналогичный примеру «House example» из [13], и объект из 5 точек:

$$\text{points_House1} = [1,3;\ -1,3;\ -1,1;\ 0,0;\ 1,1],$$

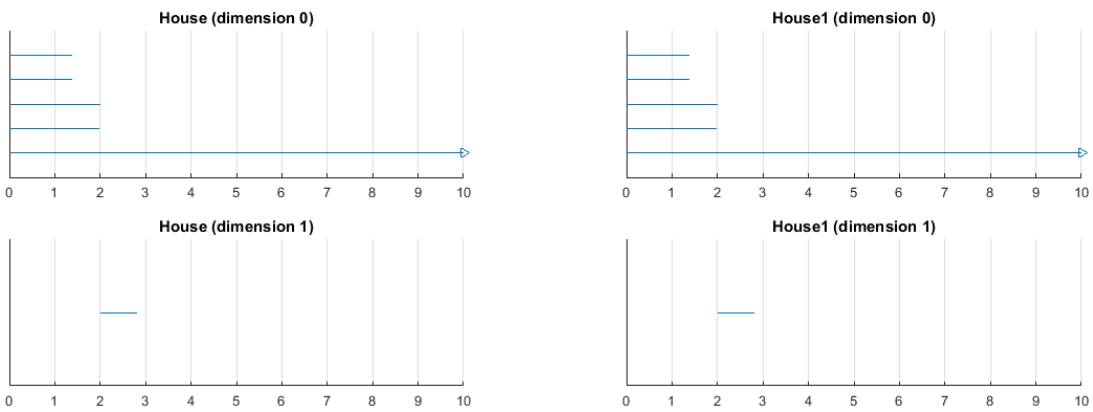
полученный вращением относительно точки $[0;\ 0]$ на угол π с переносом на вектор $[0;\ 3]$. На рисунках 1.a и 1.b представлены изображения объектов House и House1.



a) House b) House1

Рис. 1. Изображения объектов House и House1
Fig. 1. Images of House and House1 objects

На рисунках 2.a и 2.b представлены баркоды персистентных гомологий изображений объектов House и House1.



a) House b) House1

Рис. 2. Баркоды персистентных гомологий изображений House и House1
Fig. 2. Barcodes of persistent homologies of images of House and House1

Расстояние между изображениями, обусловленное неравенствами границ баркодов исходного и терминального изображений House и House1, равно $d_{W,2}(B, B') = 0$, то есть гомологические характеристики объектов House и House1 совпадают.

Поставим в соответствие каждому симплексу нулевой размерности (точке) значение функции в соответствии с таблицей 2. Значение функции для объекта House возрастает при обходе против часовой стрелки, для объекта House1 – возрастает при обходе по часовой стрелке.

Модифицированное расстояние Вассерштейна между объектами House и House1 в этом случае равно расстоянию, обусловленному неравенствами функций исходного и терминального изображений:

$$d_{MW}(\mu_b, \mu_f, B, B') = d_f(B, B') = 4,47; \mu_b = 1, \mu_f = 1.$$

Таблица 2. Сопоставление значения функции каждой точке объектов House и House1
Table 2. Matching the function value to each point of House and House1 objects

№ точки	Координаты точки $\mathcal{X}$ объекта House	Значение функции f	Координаты точки $\phi(\mathcal{X})$ объекта House1	Значение функции f'
1	$[-1\ 0]^T$	$f(1) = 1$	$[1\ 3]^T$	1
2	$[1\ 0]^T$	$f(2) = 2$	$[-1\ 3]^T$	5
3	$[1\ 2]^T$	$f(3) = 3$	$[-1\ 1]^T$	4
4	$[0\ 3]^T$	$f(4) = 4$	$[0\ 0]^T$	3
5	$[-1\ 2]^T$	$f(5) = 5$	$[1\ 1]^T$	2

Инвариантность по отношению к преобразованию подобия

Построение баркодов инвариантно по отношению действию евклидовой группы на точки симплициального комплекса, но по отношению к преобразованиям подобия инвариантность отсутствует.

Значение функции подобия $S(p, q)$ больше, когда две точки p, q находятся ближе друг к другу. Свойства подобия: 1) положительная определенность $S(p, q) \geq 0, \forall (p, q)$; 2) $S(p, q) = S(p, p) \Leftrightarrow p = q, \forall (p, q)$; 3) $S(p, q) = S(q, p), \forall (p, q)$. Расстояние между точками $p = (p_1, ..., p_n), q = (q_1, ..., q_n)$ в евклидовом n-мерном пространстве определяется по формуле Пифагора: $d(p, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (p_i - q_i)^2}$. Функция

расстояния между точками обладает свойствами подобия, но дополнительно инвариантна по отношению действию евклидовой группы (сдвиг, вращение, отражение).

Обеспечим инвариантность баркодов по отношению к преобразованиям группы изотропного подобия $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : d\left(f(p), f(q)\right) = r \cdot d\left(p, q\right); r \in \mathbb{R}^+$. Будем считать, что отображение можно представить в виде:

$$f\left(p\right) = r \cdot A \cdot p + t, \tag{5}$$

где $A \in O^n\left(\mathbb{R}\right)$ – ортогональная матрица ($A^T = A^{-1}$); $t \in \mathbb{R}^n$ – вектор сдвига. Так как баркоды инвариантны по отношению к действию группы вращений и группы сдвигов, то модифицируем симплициальные комплексы с целью обеспечения инвариантности по отношению к преобразованию подобия в виде: $f\left(p\right) = r \cdot p$.

Рассмотрим симплициальный комплекс m точек с координатами $x_1, \ldots, x_m; x_i \in \mathbb{R}^n; i \in [1 \ldots m]$, для которого найдем максимальное расстояние $d_{\max} = \max\left(d\left(x_i, x_j\right)\right); i, j \in [1 \ldots m]$. Центр этого комплекса определим из соотношения $x_c = m^{-1} \sum\limits_{i=1}^{m} x_i$. Модифицируем точки комплекса: $x_i^m = \left(x_i - x_c\right) \cdot d_{\max}^{-1}; i \in [1 \ldots m]$. Тогда баркоды модифицированного комплекса будут инварианты не только по отношению действию евклидовой группы, но и к преобразованию подобия [14].

Для точек points_House = [-1,0; / 1,0; / 1,2; / 0,3; / -1,2] из примера 2 получим $d_{\max} = \sqrt{10}$, $x_c = [0, 1.4]$ и модифицированные точки:

points_House_modified = [-0.32,-0.44; 0.32,-0.0.44; 0.32,0.19; 0,0.51; -0.32,0.19].

Сформируем другой комплекс, преобразованный из points_House, отображением с $r = 2$, $A = I$, $t = 0$: points_House2 = [-2,0; 2,0; 2,4; 0,6; -2,4] с $d_{\max} = 2\sqrt{10}$, $x_c = [0, 2.4]$. Тогда

points_House2_modified = [-0.32,-0.44; 0.32,-0.0.44; 0.32,0.19; 0,0.51; -0.32,0.19]

и баркоды комплекса points_House2_modified совпадают с баркодами points_House_modified, то есть инвариантны по отношению к преобразованию подобия.

Пример 3. Рассмотрим

- эллипс с полуосями $a = 1, b = 0.866$, который может быть аппроксимирован 16 точками:

  points = [1,0; 0.92,0.33; 0.71,0.61; 0.38,0.8; 0,0.87; -0.71,0.61; -0.92,0.33; -1,0; -0.92,-0.33; -0.71,-0.61; -0.38,-0.80; 0,-0.87; 0.38,-0.80; 0.71,-0.61; 0.92,-0.33; 1,0];

- окружность с радиусом $r = a = b = 1$, которая может быть аппроксимирована 16 точками с координатами:

  points = [1,0; 0.92,0.38; 0.71,0.71; 0.38,0.92; 0,1; -0.71,0.71; -0.92,0.38; -1,0; -0.92,-0.38; -0.71,-0.71; -0.38,-0.92; 0,-1; 0.38,-0.92; 0.71,-0.71; 0.92,-0.38; 1,0];

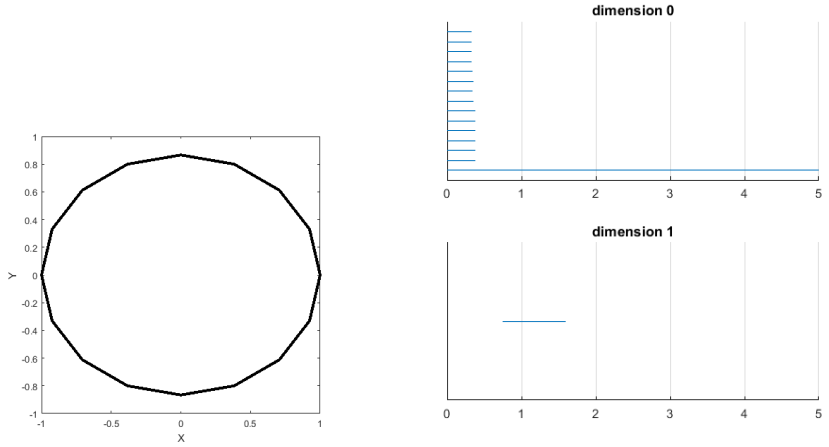


Рис. 3. Изображения эллипса с полуосями и их баркоды
Fig. 3. Images of an ellipse with semi-axes and their barcodes

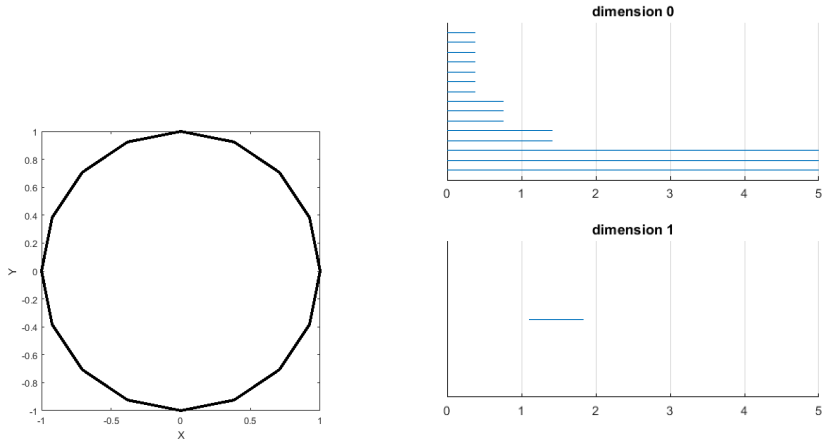


Рис. 4. Изображения эллипса с полуосями и их баркоды
Fig. 4. Images of an ellipse with semi-axes and their barcodes

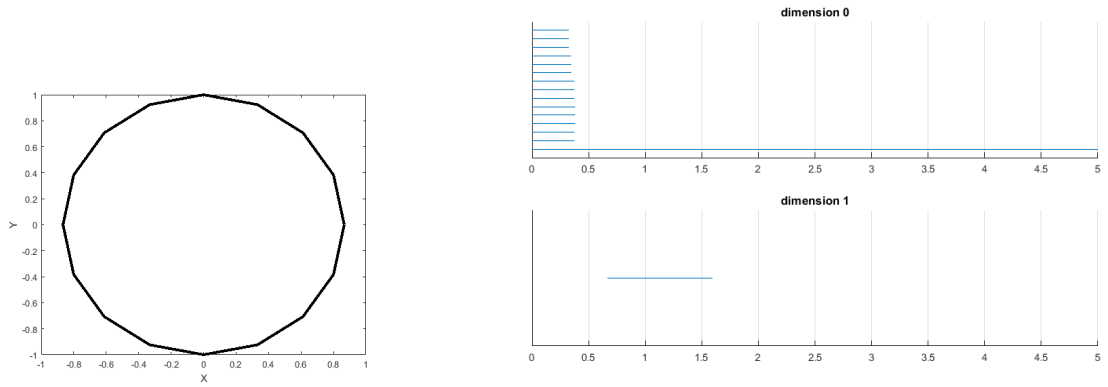


Рис. 5. Изображения эллипса с полуосями и их баркоды
Fig. 5. Images of an ellipse with semi-axes and their barcodes

- эллипс с полуосями $a = 1, b = 1.155$, который может быть аппроксимирован 16 точками с координатами:

  points = [1,0; 0.92,0.44; 0.71,0.82; 0.38,1.07; 0,1.16; -0.38,1.07; -0.71,0.82; -0.92,0.44; -1,0; -0.92,-0.44; -0.71,-0.82; -0.38,-1.07; 0,-1.16; 0.38,-1.07; 0.71,-0.82; 0.92,-0.44; 1,0].

Модифицированные координаты точек для эллипса $a = 1, b = 1.155$ при $d_{\max} = 1.155$:

points=[0.87,0; 0.8,0.38; 0.61,0.71; 0.33,0.92; 0,1; -0.61,0.71; -0.8,0.38; -0.87,0; -0.8,-0.38; -0.61,-0.71; - 0.33,-0.92; 0,-1; 0.33,-0.92; 0.61,-0.71; 0.8,-0.38; 0.87,0].

Изображения эллипсов и их баркоды представлены на рисунках 3-5.

Расстояние Вассерштейна между эллипсом с полуосями $a = 1, b = 0.866$ и эллипсом с полуосями $a = 1, b = 1.155$ после модификации координат точек комплекса $d = 0,047$, то есть пренебрежимо мало.

Эллипс $a = 1, b = 1.155$ может быть получен из эллипса $a = 1, b = 0.866$ преобразованием подобия с $r = 1.115$ и поворотом на угол $\pi/2$. Таким образом, баркоды персистентных гомологий модифицированных комплексов инвариантны по отношению к преобразованиям вращения, сдвига и подобия. Расстояния Вассерштейна между исходным комплексом и терминальным определяется без учета действия преобразований вращения, сдвига и подобия.

Пример 4. Рассмотрим пример сравнения подписей Наполеона, сформированных в 1809 и 1814 годах [7], на основе определения модифицированного расстояния Вассерштейна между ними при различных динамических темпах написания подписи. Сформируем объекты из 32 точек (в нотации JavaPlex [13]):

- points_1809 = [5.5,9.5; 7,0; 8,10; 6.5,8; 4,5.5; 8.2,9.5; 10.5,10; 9,9; 7,7; 7,6.2; 8.2,6.6; 8.5,5; 8.2,5; 8.1,4.7; 8.1,4.6; 8,4.3; 8,4.1; 7.9,3.9; 7.9,3.7; 7.8,3.4; 7.8,3.2; 7.7,3; 7,1.8; 11,7; 14,8; 16,8; 16,6; 11,3; 1,0; 10,0.8; 19,1.6; 27,2];

- points_1814 = [2,5.3; 4,8; 7.5,10; 5.5,7.2; 3.5,4.3; 7,7.7; 9.5,10; 9,8.7; 8.7,7.5; 8.5,7; 8.6,6.7; 8.7,6.4; 8.7,6.1; 8.8,5.9; 8.9,5.5; 9,5.3; 9,5; 9.1,4.8; 9.2,4.5; 9.3,4.2; 9.4,3.9; 9.4,3.6; 9.5,3.3; 12.5,6.7; 14,7.7; 18,8.7; 18,7.3; 9.5,3.3; 4,0; 14,3.3; 18,4.3; 27,5].

На рисунке 6 представлены изображения подписей Наполеона 1809 и 1814 годов. На рисунках 7.a и 7.b представлены баркоды персистентных гомологий изображений подписей Наполеона 1809 и 1814 годов.

Расстояние между изображениями, обусловленное неравенствами границ баркодов нулевой размерности подписей 1809 и 1814 годов: $d_{W,2}(B, B') = 8,17$.

Поставим в соответствие каждому симплексу нулевой размерности (точке) значение функции – момент времени написания этой точки. Если обе подписи формировались равномерно (с нулевым ускорением) в течение 2 секунд, то расстояние между изображениями, обусловленное неравенствами функций исходного и терминального изображений: $d_f(B, B') = 0$. Модифицированное расстояние Вассерштейна между изображениями подписей 1809 и 1814 годов при $\mu_b = 1, \mu_f = 1$ в этом случае равно

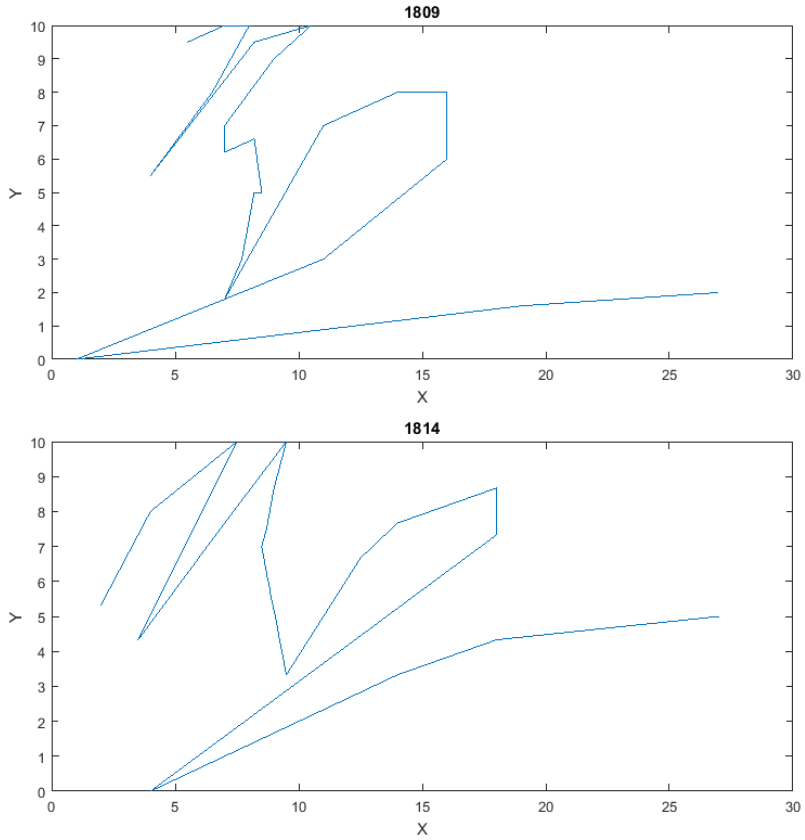
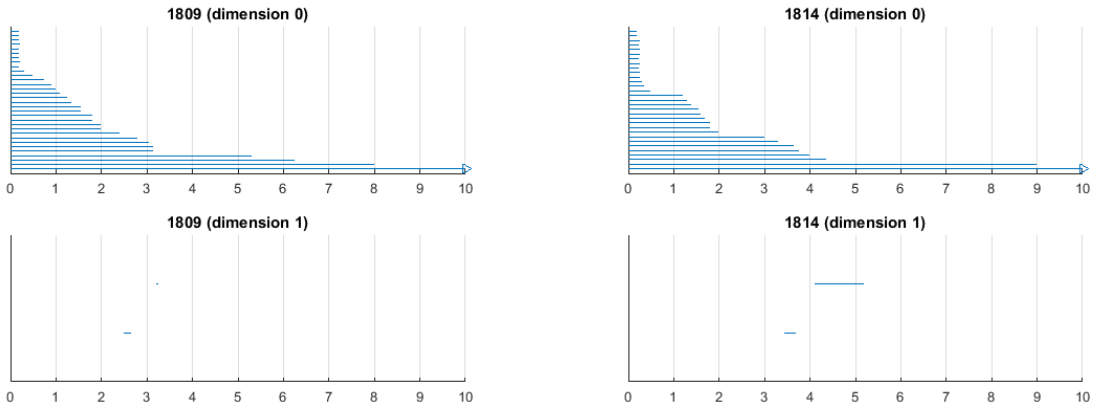


Рис. 6. Изображения подписей Наполеона 1809 и 1814 годов
Fig. 6. Images of Napoleon's signatures 1809 and 1814



a) House b) House1

Рис. 7. Баркоды персистентных гомологий изображений подписей Наполеона 1809 и 1814 годов
Fig. 7. Barcodes of persistent homology of images of Napoleon's signatures of 1809 and 1814

расстоянию между изображениями, обусловленному неравенствами границ баркодов: $d_{MW}(\mu_b, \mu_f, B, B') = d_{W,2}(B, B') = 8,17$. Если подпись 1809 года формировалась равномерно (с нулевым ускорением) в течение 2 секунд (скорость 0,0645 точек/с), а подпись 1814 года формировалась ускоренно (с ускорением 0,004162 точек/с^2) в течение 2 секунд (начальная скорость 0,002 точек/с), то расстояние между изображениями, обусловленное неравенствами функций исходного и терминального изображений составляет: $d_f(B, B') = 2,03$. Модифицированное расстояние Вассерштейна между изображениями подписей 1809 и 1814 годов при $\mu_b = 1, \mu_f = 1$ в этом случае равно: $d_{MW}(\mu_b, \mu_f, B, B') = (\mu_b \cdot d_{W,2}(B, B') + \mu_f \cdot d_f(B, B'))^{\frac{1}{2}} = 8,42$.

Формирование сглаженного коцикла

Гладкость функций от симплексов может быть измерена лапласианом. Рассмотрим граф, ассоциированный с X_k, где каждый k-симплекс представлен узлом и существует ребро, если два k-симплекса имеют непустое пересечение. Определим элементы весовой матрицы $W = (w_{ij})$ как

$$w_{ij} = \begin{cases} \nu(\sigma_i)\nu(\sigma_j), & \sigma_i \cap \sigma_j \neq \emptyset, \\ 0, & \text{else}, \end{cases}$$

где $\nu(\sigma_i)$ – размер σ_i, например, площадь 2-симплекса. Размер 0-симплекса определяется как 1. Взвешенный граф лапласиана графа $\mathcal{L}_W$ определяется [17] как

$$\mathcal{L}_{W_{i,j}} = \begin{cases} 1 - \frac{w_{ij}}{w_i}, & \text{if } \ i = j, w_i \neq 0, \\ -\frac{w_{ij}}{\sqrt{w_i w_j}}, & \text{if } \ \sigma_i \cap \sigma_j \neq \emptyset, i \neq j, \\ 0, & \text{else}, \end{cases} \tag{6}$$

где $w_i = \sum\limits_j w_{ij}$. Гладкий коцикл $\bar{\omega}$ может быть получен решением задачи:

$$\bar{\alpha} = \underset{\alpha \in C^{k-1}(X,\mathbb{R})}{\arg\min} \left\| \mathcal{L}_W \left(\hat{\omega} + d\alpha\right) \right\|^2. \tag{7}$$

Коцикл $\hat{\omega} \in C^k(X, \mathbb{R})$ не всегда является точным. На основе построения гладкого точного коцикла $\bar{\omega} = \hat{\omega} + d\alpha \in C^k(X, \mathbb{R})$ симплициального комплекса решением задачи (7) можно построить такой коцикл $\bar{\alpha} \in C^{k-1}(X, \mathbb{R})$, что действие кограничного оператора d_{k-1} на $\bar{\alpha}$ приводит к $\bar{\omega}$: $d_{k-1}\bar{\alpha} = \bar{\omega}$.

Пример 5. Рассмотрим симплициальный комплекс X с пятью вершинами $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)$ и пятью ребрами $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$ единичной длины. 1-коцепь $\omega_1 = [1, 0, 0, 0, 0]^T \in C^1(X, \mathbb{R})$ является вещественным коциклом; значения функций на ребрах: $\hat{\omega}(e_0) = 1, \hat{\omega}(e_1) = \hat{\omega}(e_2) = \hat{\omega}(e_3) = \hat{\omega}(e_4) = 0$. Так как $\omega_1 = [1, 0, 0, 0, 0]^T$ не является точной ($\omega \neq d_0\alpha; \forall \alpha \in C^0(X, \mathbb{R})$), то найдем такую 0-коцепь $\bar{\alpha} \in C^0(X, \mathbb{R})$, которая решает задачу минимизации (7). Весовая матрица

$$w_{ij} = \nu(\sigma_i)\nu(\sigma_j) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \ w_0 = w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 3,$$

при $\nu(\sigma_i) = 1, \forall i = 0, \ldots, 4$.
Матрица Лапласа, определенная из соотношения (6),

$$\mathcal{L}_W = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решая задачу (7), получим сглаженный коцикл

$$\bar{\omega}_1 = \hat{\omega}_1 + d\bar{\alpha}_1 = [\ 0,2 \quad 0,2 \quad 0,2 \quad 0,2 \quad 0,2\ ]^T$$

с 0-коцепью $\bar{\alpha}_1 = [\ 1 \quad 0,2 \quad 0,4 \quad 0,6 \quad 0,8\ ]^T$; $d\bar{\alpha}_1 = [\ -0,8 \quad 0,2 \quad 0,2 \quad 0,2 \quad 0,2\ ]^T$, который минимизирует $\|\mathcal{L}_W(\hat{\omega}_1 + d\bar{\alpha}_1)\|_2^2$, так как $\mathcal{L}_W(\hat{\omega}_1 + d\bar{\alpha}_1) = \left[\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\ \right]^T$ и $\|\mathcal{L}_W(\hat{\omega}_1 + d\bar{\alpha}_1)\|_2^2 = 0$. Аналогично для 1-коцепи $\omega_2 = [0,0,0,0,1]^T \in C^1(X, \mathbb{R})$ получим 0-коцепь $\bar{\alpha}_2 = [\ 0,2 \quad 0,4 \quad 0,6 \quad 0,8\ ]^T$. Расстояние между ω_1 и ω_2 (см. (3)): $d_{f1} = \sqrt{2}$; между $\bar{\alpha}_1$ и $\bar{\alpha}_2$: $d_{f0} = \sqrt{0,8}$.

Заключение

В работе рассмотрена задача сравнения начального и терминального изображений, которая решается на основе построения минимизируемого функционала, характеризующего эволюцию диффеоморфного преобразования изображения от начального до терминального, и штрафа за отклонение траектории изображения от требуемой траектории.

В работе применяются алгоритмы построения множеств полуинтервалов вещественных баркодов персистентных гомологий для сравнения диффеоморфных изображений объектов. Использование персистентных гомологий позволяет получить дополнительную информацию об объекте: объем, цвет, момент времени формирования.

Для внедрения как геометрической, так и негеометрической информации в единые топологические описания предлагается метод, основанный на персистентных когомологиях. Баркоды персистентных гомологий расширяются функциями от симплексов для представления разнородной информации.

Для нахождения расстояния между изображениями при распознавании образов предлагается модифицировать метод Вассерштейна и в формулу для расстояния между изображениями, определяемую по баркодам персистентных гомологий, ввести негеометрическую информацию о расстояниях между изображениями.

Важным направлением применения персистентных (ко)гомологий является изучение инвариантов больших объемов данных.

Приложение 1. Топологический анализ данных [5,11]

Топологические пространства могут быть аппроксимированы симплициальными комплексами. Симплициальным комплексом является конечный набор множеств

$K = \{\sigma_i\}$, где каждое σ_i является подмножеством некоторого конечного множества вершин K^0. Этот набор удовлетворяет следующему условию: если $\sigma_i \in K$ и τ – грань σ_i (т.е. если $\tau \subseteq \sigma_i$), то $\tau \in K$. Если σ_i имеет $k+1$ вершин, $\{\nu_0, \nu_1, ..., \nu_k\}$, где каждая пара вершин неэквивалентна, σ_i называется k-симплексом. k-скелет симплициального комплекса K является подкомплексом K, состоящим из симплексов размерности k и ниже. Геометрический k-симплекс можно рассматривать как выпуклую оболочку $k+1$ аффинно независимых точек в $\mathbb{R}^d$. Из-за этого точку называют 0-симплексом, ребро – 1-симплексом, треугольник – 2-симплексом, тетраэдр – 3-симплексом.

Рассмотрим построение симплициальных комплексов из точечных облаков, вложенных в $\mathbb{R}^d$. Пусть $S = \{v_0, v_1, ..., v_k\}, v_i \in \mathbb{R}^d$, – заданное множество точек. Комплекс Вьеториса-Рипса $R(r)$ представляет собой симплициальный комплекс, построенный на множестве точек; комплекс Вьеториса-Рипса имеет симплекс тогда, когда все пары точек находятся на расстоянии, не превышающем $2r$:

$$R(r) = \sigma = S|\, \|\nu_i - \nu_j\| \leq 2r, \forall i, j \tag{8}$$

Группы гомологии строятся с использованием линейных преобразований, называемых граничными операторами. k-цепь конечного симплициального комплекса K является конечной формальной суммой ориентированных k-симплексов в K, $\alpha = \sum\limits_i a_i \sigma_i$. Группа всех k-цепей $C_k(K)$ является векторным пространством. Граничный оператор $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$ – линейное преобразование, порожденное отображением любого k-симплекса в сумму его $k-1$ граней, а именно:

$$\partial_k(\{\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_k\}) = \sum_{i=0}^{k} \{\nu_0, \ldots, \hat{\nu}_i, \ldots, \nu_k\},$$

где $\hat{\nu}_i$ означает, что ν_i отсутствует. Группа k-го цикла $Z_k(K)$ является ядром граничного оператора ∂_k с элементами, называемыми k-циклами:

$$\mathrm{Ker}(\partial_k) = \{c \in C_k|\, \partial_k(c) = \emptyset\}.$$

k-я граничная группа $B_k(K)$ – образ граничного оператора ∂_{k+1}, а его элементы называются k-границами: $\mathrm{Im}(\partial_{k+1}) = \{d \in C_k|\, \exists c \in C_{k+1} : d = \partial_{k+1}(c)\}$. Так как $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$, то $B_k(K)$ является подгруппой в $Z_k(K)$. Таким образом, можно определить k-ю группу гомологий $H_k(K)$ как факторгруппу $Z_k(K)/B_k(K)$. Два k-цикла называются гомологичными, если они отличаются границей или если они находятся в одном классе эквивалентности $H_k(K)$. k-е число Бетти комплекса K: $\beta_k = \mathrm{rank} H_k(K)$, характеристика Эйлера: $\chi = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (-1)^i \beta_i$.

Рассмотрим конечный симплициальный комплекс K и f – вещественнозначную функцию на симплексах K, которая удовлетворяет соотношению $f(\tau) \leq f(\sigma)$ для всех $\tau \leq \sigma$ симплексов в K. Для любого $x \in \mathbb{R}$ подпоследовательность K, связанная с x, определяется как $K(x) = \{\sigma \in K|\, f(\sigma) \leq x\}$. Из предположений о функции f, $K(x)$ всегда является симплициальным комплексом и $K(x) \subseteq K(y); \forall x \leq y$. Пусть $\{x_1 < x_2 < \ldots < x_l\}$ – отсортированный диапазон f. Фильтрация K по f является упорядоченной последовательностью его подкомплексов: $\emptyset \subset K(x_1) \subset K(x_2) \subset \ldots \subset K(x_l) \subset K$. Последовательность включений

K индуцирует линейные преобразования на последовательности векторных пространств

$$H_k\left(K\left(x_1\right)\right) \to H_k\left(K\left(x_2\right)\right) \to \ldots \to H_k\left(K\left(x_n\right)\right).$$

Персистентная гомология отслеживает точку появления b (birth) и точку исчезновения d (death) нетривиальных классов гомологии по мере прохождения фильтрации. Набор векторных пространств $\{V_i\}$ и линейных преобразований f_i: $V_i \to V_{i+1}$ называется модулем персистентности. Интервальный модуль $I_{[b,d)}$ является модулем персистентности, для которого $f_i = 1$, если $i \in [b, d) \in B$ и 0 – в противном случае, где B – множество интервалов (баркодов) $[b, d)$. Интервальные модули можно разложить в форме $\oplus_{[b,d)\in B} I_{[b,d)}$. Эти интервалы точно кодируются, когда классы гомологии появляются и исчезают в модуле персистентности.

Приложение 2. Когомологии [15, 16]

По заданному цепному комплексу $\ldots \to C_{n+1} \overset{\partial_{n+1}}{\to} C_n \overset{\partial_n}{\to} C_{n-1} \to \ldots$ можно определить группу коцепей C^n как группу всех гомоморфизмов, действующих из C_n в $\mathbb{Z}$ (или $\mathbb{R}$). Каждая n-мерная коцепь является функционалом, заданным на цепи C_n. Если функционал $\mathcal{Y}\left(\mathcal{X}\right)$ принимает значения коцепи $\mathcal{Y}$ на цепи $\mathcal{X}$, что можно записать в виде $\mathcal{Y}\left(\mathcal{X}\right) = \langle \mathcal{Y}, \mathcal{X} \rangle$, то определение кограничного оператора $d_n : C^{n-1} \to C^n$ принимает форму определения сопряженного линейного оператора:

$$\langle d_n \mathcal{Y}, \mathcal{X} \rangle = \langle \mathcal{Y}, \partial_n \mathcal{X} \rangle, \mathcal{X} \in C_n, \mathcal{Y} \in C^{n-1}; d_{n+1} \circ d_n = 0.$$

Определим группы n-мерных коциклов: $Z^n = \operatorname{Ker}\left(d_n\right)$ и n-мерных кограниц: $B^n = \operatorname{Im}\left(d_{n-1}\right)$. Факторгруппа $H^n = Z^n / B^n$ называется n-мерной группой когомологий коцепного комплекса.

Граничный оператор $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$ – линейное преобразование, порожденное отображением любого k-симплекса в сумму его $k-1$ граней: $\partial_k\left(\{\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_k\}\right) = \sum\limits_{i=0}^{k} \{\nu_0, \ldots, \hat{\nu}_i, \ldots, \nu_k\}$, где $\hat{\nu}_i$ означает, что ν_i отсутствует. Кограничный оператор $d_k : C^k\left(X, \mathbb{R}\right) \to C^{k+1}\left(X, \mathbb{R}\right)$ является аналогом граничных операторов для k-коцепи α:

$$d_k(\alpha)([\nu_0, \ldots, \nu_k]) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \alpha([\nu_0, \ldots, \hat{\nu}_i, \ldots, \nu_k]). \tag{9}$$

Для персистентных когомологий можно построить диаграмму линейных преобразований последовательности векторных пространств

$$H^k\left(X\left(x_0\right),\right) \leftarrow H^k\left(X\left(x_1\right),\right) \leftarrow \ldots \leftarrow H^k\left(X\left(x_l\right),\right),$$

аналогичную диаграмме для персистентных гомологий

$$H_k\left(X\left(x_0\right)\right) \to H_k\left(X\left(x_1\right)\right) \to \ldots \to H_k\left(X\left(x_n\right)\right).$$

Пусть X – конечный симплициальный комплекс и X^0, X^1, X^2 обозначают множества вершин, ребер и треугольников комплекса X соответственно. Предположим,

что вершины упорядочены. Пусть $\mathbb{A}$ – коммутативное кольцо (например, $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{R}$). Определим 0-коцепи, 1-коцепи и 2-коцепи (модули над $\mathbb{A}$): $C^0 = C^0(X;\mathbb{A}) = \{f : X^0 \to \mathbb{A}\}$, $C^1 = C^1(X;\mathbb{A}) = \{\alpha : X^1 \to \mathbb{A}\}$, $C^2 = C^2(X;\mathbb{A}) = \{A : X^2 \to \mathbb{A}\}$. Примеры кограничных отображений:

$$d_0 : C^0 \to C^1; \quad d_1 : C^1 \to C^2 :(d_0 f)(ab) = f(b) - f(a);$$

$(d_1\alpha)(abc) = \alpha(bc) - \alpha(ac) + \alpha(ab)$.

Пусть $\alpha \in C^1$. Если $d_1\alpha = 0$, то α – коцикл. Если $d_1 f = \alpha$ допускает решение $f \in C^0$, то α – кограница. Решение f, если оно существует, можно рассматривать как дискретный интеграл от α. Оно уникальное вплоть до добавления констант на каждый связный компонент X.

Легко проверить, что $d_1 d_0 f = 0; \forall f \in C^0$. Таким образом, кограницами всегда являются коциклы: $\mathrm{Im}(d_0) \subseteq \mathrm{Ker}(d_1)$. Мы можем измерить разницу между кограницами и коциклами, определив 1-когомологию как фактор-модуль $H^1(X;\mathbb{A}) = \mathrm{Ker}(d_1)/\mathrm{Im}(d_0)$. Два коцикла α, β когомологичны, если $\alpha - \beta$ кограница: $\alpha - \beta = d_1 f$.

Приложение 3. Лапласиан на симплициальном комплексе [17]

Лапласиан на симплициальном комплексе для коцепей можно определить, сначала определяя скалярное произведение и используя сопряженный оператор. Предполагая случай действительных чисел для $\alpha_1, \alpha_2 \in C^k(X,\mathbb{R})$, скалярное произведение можно определить как $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle_k = \sum\limits_{\sigma \in X^k} \alpha_1(\sigma)\alpha_2(\sigma)$.

Тогда сопряженный оператор $d_k^* : C^{k+1}(X,\mathbb{R}) \to C^k(X,\mathbb{R})$, относительно этого скалярного произведения, может быть определен из соотношения: $\langle d_k\alpha, \beta \rangle_{k+1} = \langle \alpha, d_k^*\beta \rangle_k, \alpha \in C^k(X,\mathbb{R}), \beta \in C^{k+1}(X,\mathbb{R})$.

Веса, отражающие размер симплексов, могут быть использованы для отражения геометрии путем определения взвешенного внутреннего произведения: $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle_k = \sum\limits_{\sigma \in X^k} s_\sigma \alpha_1(\sigma)\alpha_2(\sigma)$, где s_σ – размер σ, такой как площадь, если σ является 2-симплексом. Лапласиан на X_k можно определить формулой: $\mathcal{L} = d_k^* d_k + d_{k-1} d_{k-1}^*$.

Список литературы / References

[1] Trouve A., Younes L., “Metamorphoses through lie group action”, *Foundations of Computational Mathematics*, **5**:2 (2005), 173–198.

[2] Younes L., Arrate F., Miller M. I., “Evolutions equations in computational anatomy”, *NeuroImage*, **45**:1 (2009), 540–550.

[3] Beg M., Miller M., Trouve A., Younes L., “Computing large deformation metric mappings via geodesic flows of diffeomorphisms”, *Int. Journal of Computer Vision*, **61**:2 (2005), 139–157.

[4] Marsland S., McLachlan R. I., “A Hamiltonian particle method for diffeomorphic image registration”, *Biennial International Conference on Information Processing in Medical Imaging*, 2006, 396–407.

[5] Carlsson G., "Topological pattern recognition for point cloud data", *Acta Numerica*, 2014, № 23, 289–368.

[6] Hatcher A., *Algebraic topology*, Cambridge UP, 2002, 544 pp.

[7] Лейхтер С. В., Чуканов С. Н., "Сравнение изображений на основе их диффеоморфного преобразования", *Компьютерная оптика*, **42**:1 (2018), 96–104; [English transl.: Leichter S. V., Chukanov S. N., "Matching of images based on their diffeomorphic mapping", *Computer Optics*, **42**:1 (2018), 96–104,]

[8] Chukanov S. N., "Definitions of invariants for n-dimensional traced vector fields of dynamic systems", *Pattern Recognition and Image Analysis*, **19**:2 (2009), 303–305.

[9] Чуканов С. Н., Ульянов Д. В., "Формирование инвариантов при визуализации векторных полей на основе построения оператора гомотопии", *Компьютерная оптика*, **36**:4 (2012), 622–626; [English transl.: Chukanov S. N., Ulianov D. V., "Formation of invariants in the visualization of vector fields based on the construction of the homotopy operator", *Computer Optics*, **36**:4 (2012), 622–626,]

[10] Чуканов С. Н., "Формирование инвариантов при визуализации векторных полей, определяемых интегральными кривыми динамических систем", *Автометрия*, **47**:2 (2011), 58–63; [English transl.: Chukanov S. N., "Constructing invariants for visualization of vector fields defined by integral curves of dynamic systems", *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing,*, **47**:2 (2011), 58-63, .]

[11] Edelsbrunner H.,Harer J. L., *Computational topology: an introduction.*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010, 282 pp.

[12] Гарбер А., Эдельсбруннер Г., Иванов А., Мусин О., Невский М., "Международная конференция «Геометрия, топология и приложения»", *Моделирование и анализ информационных систем*, **20**:6 (2013), 95–102; [English transl.: Garber A., Edelsbrunner H., Ivanov A., Musin O., Nevskii M., "International Conference "Geometry, Topology, and Applications"", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **20**:6 (2013), 95–102, .]

[13] Adams H., Tausz A., *JavaPlex Tutorial*, 2011, 20 pp.

[14] Duzhin S. V., Chebotarevskii B. D W., *Transformation groups for beginners*, **25**, American Mathematical Society, 2004, 192 pp.

[15] Cang Z., Wei G., "Persistent cohomology for data with multicomponent heterogeneous information", 2018 http://gis-lab.info/qa/srtm.html.

[16] De Silva V., Morozov D., Vejdemo-Johansson M., "Persistent cohomology and circular coordinates", *Discrete and Computational Geometry*, **45**:4 (2011), 737–759.

[17] Chung F. R. K., Graham F. C., *Spectral graph theory*, American Mathematical Society, 1997, 207 pp.

Chukanov S. N., "The Comparison of Diffeomorphic Images Based on the Construction of Persistent Homology", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **26**:3 (2019), 450–468.

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-3-450-468

Abstract. An object shape analysis is a problem that is related to such areas as geometry, topology, image processing and machine learning. For analyzing the form, the deformation between the source and terminal form of the object is estimated. The most used form analysis model is the Large Deformation Diffeomorphic Metric Mapping (LDDMM) model. The LDDMM model can be supplemented with functional non-geometric information about objects (volume, color, formation time). The paper considers algorithms for constructing sets of barcodes for comparing diffeomorphic images, which are real values taken by persistent homology. A distinctive feature of the use of persistent homology with respect to methods of algebraic topology is to obtain more information about the shape of the object. An important direction of the application of persistent homology is the study invariants of big data. A method based on persistent cohomology is proposed that combines persistent homology

technologies with embedded non-geometric information presented as functions of simplicial complexes. The proposed structure of extended barcodes using cohomology increases the effectiveness of persistent homology methods. A modification of the Wasserstein method for finding the distance between images by introducing non-geometric information was proposed. The possibility of the formation of barcodes of images invariant to transformations of rotation, shift and similarity is considered.

Keywords: pattern recognition, diffeomorphic transformations, persistent (co)homology, Wasserstein distance

On the authors:
Sergey N. Chukanov, orcid.org/0000-0002-8106-9813, PhD,
Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Omsk Branch
13 Pevtsova str., Omsk 644043, Russia, e-mail: ch_sn@mail.ru

Acknowledgments:
[1] The work was funded by RFBR according to the research projects № 18–07–00526 and № 18–08-01284.
[2] The work was funded by the program of fundamental scientific researches of the SB RAS № I.5.1., project № 0314-2019-0020.