Модел. и анализ информ. систем. Т. **21**, № **1** (2014) 7–31

УДК 519.632

Угловой пограничный слой в нелинейных эллиптических задачах, содержащих производные первого порядка

Бутузов В. Ф.*, Денисов И. В.**

* *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*
119991, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 2, физический факультет
** *Тульский государственный педагогический унивеситет им. Л.Н. Толстого*
300026, Тула, пр-т Ленина, 125

e-mail: butuzov@phys.msu.ru, den_ tspu@mail.ru

получена 7 января 2014

Ключевые слова: пограничный слой, сингулярно возмущенное уравнение, асимптотическое разложение решения

В прямоугольной области рассмотрена первая краевая задача для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения

$$\varepsilon^2\Delta u - \varepsilon^\alpha A(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = F(u,x,y,\varepsilon)$$

с нелинейной по u функцией F. Для $\alpha > 1$ построено полное асимптотическое разложение решения, равномерное в замкнутом прямоугольнике. Если $0 < \alpha < 1$, то равномерное асимптотическое приближение строится в нулевом и первом приближении. Отмечены особенности асимптотики в случае $\alpha = 1$.

Введение

Данная статья является обобщением работ [1–8] по исследованию асимптотик решений сингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа в прямоугольной области $\Omega := \{(x,y)\,|\,0 < x < a,\ 0 < y < b\}$. В [1–3] изучалась линейная задача

$$\varepsilon^2\Delta u - \varepsilon^\alpha A(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial y} - k^2(x,y)u = f(x,y,\varepsilon), \quad (x,y)\in\Omega, \tag{1}$$

$$u(x,y,\varepsilon) = \phi(x,y), \quad (x,y)\in\partial\Omega, \tag{2}$$

где $\partial\Omega$ – граница прямоугольника Ω, ε – малый положительный параметр, Δ – оператор Лапласа.

В [1] был рассмотрен случай $A(x,y)\equiv 0$, для которого показано, что асимптотическое разложение решения состоит из регулярной и погранслойной частей. Члены регулярной части асимптотики

$$\bar u_0(x,y) + \varepsilon\bar u_1(x,y) + \ldots + \varepsilon^k\bar u_k(x,y) + \ldots$$

определяются последовательно с помощью линейных алгебраических уравнений вида

$$k^2(x,y)\bar{u}_k = f_k(x,y),$$

где $f_k(x,y)$ – функции, выражающиеся рекуррентно через $\bar{u}_i$ с номерами $i<k$.

Регулярная часть асимптотики дает при $\varepsilon \to 0$ приближение для решения задачи (1), (2) внутри прямоугольника Ω, но на границе $\partial\Omega$ это приближение, вообще говоря, не совпадает с заданной граничной функцией $\phi(x,y)$. Для устранения невязок в граничном условии (2) вводится погранслойная часть асимптотики. В окрестности каждой стороны прямоугольника Ω погранслой описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Например, в окрестности стороны $y=0$ пограничные функции

$$\Pi_0(x,\eta)+\varepsilon\Pi_1(x,\eta)+\ldots+\varepsilon^k\Pi_k(x,\eta)+\ldots,\quad \eta=\frac{y}{\varepsilon}, \tag{3}$$

определяются последовательно с помощью уравнений

$$\frac{\partial^2\Pi_k}{\partial\eta^2}-k^2(x,0)\Pi_k=\pi_k(x,\eta),\quad \eta\ge 0, \tag{4}$$

где $\pi_k(x,\eta)$ – функции, выражающиеся рекуррентно через Π_i с номерами $i<k$. В окрестностях других сторон прямоугольника пограничные функции определяются из аналогичных уравнений.

Погранслойная часть асимптотики устраняет невязки в граничном условии на сторонах прямоугольника Ω, внесенные регулярной частью, но одновременно вносит свои невязки в граничное условие. Эти невязки существенны лишь вблизи угловых точек границы. С целью устранения этих невязок вводится угловая часть асимптотики. Например, в окрестности точки $(0,0)$ угловые погранфункции

$$P_0(\xi,\eta)+\varepsilon P_1(\xi,\eta)+\ldots+\varepsilon^k P_k(\xi,\eta)+\ldots,\quad \xi=\frac{x}{\varepsilon},\quad \eta=\frac{y}{\varepsilon}, \tag{5}$$

определяются последовательно с помощью уравнений

$$\frac{\partial^2 P_k}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 P_k}{\partial\eta^2}-k^2(0,0)P_k=p_k(\xi,\eta),\quad \xi\ge 0,\quad \eta\ge 0, \tag{6}$$

где $p_k(\xi,\eta)$ – функции, выражающиеся рекуррентно через P_i с номерами $i<k$. В окрестностях других вершин прямоугольника угловые погранфункции определяются из аналогичных уравнений.

Полное асимптотическое разложение решения, равномерное в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$, состоит из регулярной части, четырех погранслойных частей вида (3) и четырех угловых погранслойных частей вида (5) (в соответствии с четырьмя сторонами и четырьмя вершинами прямоугольника).

В [2] рассмотрен более сложный случай $A(x,y)>0$ в $\bar{\Omega}$ и $\alpha=0$, для которого также показано, что асимптотическое разложение решения состоит из регулярной и погранслойной частей. Однако появляется существенное обстоятельство, связанное с построением асимптотики произвольного порядка. Именно, для описания пограничного слоя в окрестностях вертикальных сторон прямоугольника $x=0$ и $x=b$

приходится рассматривать уравнения параболического типа (параболический погранслой). Например, в окрестности стороны $x = 0$ погранслойный оператор имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - A(0,y)\frac{\partial u}{\partial y} - k^2(0,y), \quad \xi = \frac{x}{\varepsilon}.$$

Возникновение параболического погранслоя связано с тем, что вертикальные стороны прямоугольника являются характеристиками вырожденного оператора

$$-A(x,y)\frac{\partial}{\partial y} - k^2(x,y),$$

т. е. линиями $x = const$. При определении параболических пограничных функций порядка ε^2 и выше в правых частях уравнений появляются неограниченные члены. Для построения равномерной в $\bar{\Omega}$ асимптотики решения приходится накладывать некоторые ограничительные условия на функции f и ϕ.

В [3] рассмотрен еще более сложный случай $A(x,y) > 0$ в $\bar{\Omega}$ и $\alpha > 0$. В зависимости от порядка малости множителя ε^α погранслойная часть асимптотики решения строится по-разному. Если $\alpha \geq 1$, то погранслойная структура решения будет такой же, как в работе [1]. Если $0 < \alpha < 1$, то погранслойная структура решения существенно изменяется. Равномерное асимптотическое приближение в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ удается получить лишь в нулевом и первом приближении.

Разработанный в [4–8] метод позволил обосновать равномерную асимптотику решения задачи (1), (2) в случае, когда в отличие от [1] функция f нелинейна по u. В [4] была рассмотрена первая краевая задача для уравнения

$$\varepsilon^2 \Delta u = F(u,x,y,\varepsilon), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{7}$$

с квадратичной по u функцией $F(u,x,y,\varepsilon)$:

$$F(u,x,y,\varepsilon) = a(u^2 + pu + q),$$

где коэффициенты a, p, q зависят от x, y, ε. Построение регулярной и погранслойной частей асимптотики решения не вызвало дополнительных трудностей по сравнению с линейным случаем. Однако при построении угловой погранслойной части пришлось рассматривать нелинейные эллиптические уравнения того же типа, что и (7). Например, в окрестности вершины $(0,0)$ задача для главного члена $P_0(\xi,\eta)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 P_0}{\partial \eta^2} = P_0 F, \quad \xi \geq 0, \quad \eta \geq 0, \tag{8}$$

$$P_0(0,\eta) = -\overset{(1)}{\Pi}_0(0,\eta), \quad P_0(\xi,0) = -\overset{(2)}{\Pi}_0(\xi,0), \tag{9}$$

$$P_0(\xi,\eta) \to 0 \quad \text{при} \quad (\xi+\eta) \to \infty, \tag{10}$$

где

$$P_0 F = F\left(\bar{u}_0(0,0) + \overset{(1)}{\Pi}_0(0,\eta) + \overset{(2)}{\Pi}_0(\xi,0) + P_0, 0, 0, 0\right) -$$

$$-F\left(\bar{u}_0(0,0)+\overset{(1)}{\Pi}_0(0,\eta),0,0,0\right)-F\left(\bar{u}_0(0,0)+\overset{(2)}{\Pi}_0(\xi,0),0,0,0\right),$$

$\bar{u}_0(x,y)$ – главный член регулярной части асимптотики, $\overset{(1)}{\Pi}_0(x,\eta)$ – главный член погранслойной части асимптотики в окрестности стороны $y=0$, $\overset{(2)}{\Pi}_0(\xi,y)$ – главный член погранслойной части асимптотики в окрестности стороны $x=0$. Для доказательства существования решения задачи (8) – (10) с экспоненциальной оценкой убывания при $(\xi+\eta)\to\infty$ был использован метод верхних и нижних решений. В предположении, что производная $F_u(u,0,0,0)>0$ на промежутке $u\in[\bar{u}_0(0,0),\phi(0,0)]$, для решения задачи (8) – (10) были построены необходимые барьеры. Уравнения для последующих членов угловой части асимптотики получаются линейными:

$$\frac{\partial^2 P_k}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 P_k}{\partial\eta^2}=F_u\left(\bar{u}_0(0,0)+\overset{(1)}{\Pi}_0(0,\eta)+\overset{(2)}{\Pi}_0(\xi,0)+P_0(\xi,\eta),0,0,0\right)P_k+$$

$$+p_k(\xi,\eta),\quad k\geq 1,\tag{11}$$

где $p_k(\xi,\eta)$ – функции, выражающиеся рекуррентно через P_i с номерами $i<k$. Барьеры, построенные для $P_0(\xi,\eta)$, позволили доказать, что производная $F_u\left(\bar{u}_0(0,0)+\overset{(1)}{\Pi}_0(0,\eta)+\overset{(2)}{\Pi}_0(\xi,0)+P_0(\xi,\eta),0,0,0\right)$ сохраняет положительный знак в квадранте $\mathbb{R}^2_+=\{(\xi,\eta)|\ \xi\geq 0,\ \eta\geq 0\}$. Это гарантирует существование экспоненциально убывающих при $(\xi+\eta)\to\infty$ решений уравнений (11) с граничными условиями, аналогичными условиям для $P_0(\xi,\eta)$. В окрестностях других вершин прямоугольника $\bar{\Omega}$ получаются уравнения, аналогичные (8) и (11).

В [5] было сохранено условие положительности производной $F_u(u,x,y,0)$ на промежутках $u\in[\bar{u}_0(x,y),\phi(x,y)]$, когда точки (x,y) принадлежат вершинам прямоугольника $\bar{\Omega}$. Однако уже не требовалась квадратичность по u функции $F(u,x,y,\varepsilon)$. Рассмотрены более широкие допустимые классы F-функций.

В [6] еще более расширен класс допустимых F-функций.

В [7] для квадратичной по u функции $F(u,x,y,\varepsilon)$ было снято условие положительности производной $F_u(u,x,y,0)$. В этом случае барьеры для задачи (8) – (10) не удается построить сразу во всем квадранте $\mathbb{R}^2_+$, приходится разбивать его на части и строить кусочно–гладкие барьеры. Далее эти барьеры специальным образом сглаживаются.

Существование главного члена угловой части асимптотики не гарантирует для уравнений (11) положительности производной F_u на полном нулевом приближении. Вопросу разрешимости краевых задач для уравнений (11) посвящена работа [8], в которой в предположении существования главного члена угловой части асимптотики построена полная асимптотика решения задачи (7), (2) и проведена оценка остаточного члена.

В настоящей статье методы работ [1–8] применяются к уравнению

$$\varepsilon^2\Delta u-\varepsilon^\alpha A(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=F(u,x,y,\varepsilon)\tag{12}$$

с краевым условием (2), нелинейной по u функцией $F(u,x,y,\varepsilon)$ и рациональным числом $\alpha = \gamma/\beta$. Решение задачи (12), (2) ищется в виде ряда по степеням $\varepsilon^{1/\beta}$, состоящего из трех частей:

$$u(x,y,\varepsilon) = \bar{u} + \Pi + P, \tag{13}$$

где $\bar{u}$ – регулярная часть, Π – пограничные функции, играющие роль вблизи сторон прямоугольника Ω, P – угловые пограничные функции, играющие роль вблизи вершин прямоугольника Ω (в работе используются обозначения, принятые в [10]). В разделе 1 для случая $\alpha > 1$ построено полное асимптотическое разложение решения, равномерное в прямоугольнике $\bar{\Omega}$. В разделе 2 для случая $0 < \alpha < 1$ построено равномерное в $\bar{\Omega}$ асимптотическоев приближение первого порядка. В конце статьи отмечены особенности асимптотики в случае $\alpha = 1$. Во всех случаях качественный характер асимптотики такой же, как и в случаях, когда функция $F(u,x,y,\varepsilon)$ линейна по u.

1. Случай $\alpha > 1$

Пусть выполнены следующие условия.

Условие I. *Функции $A(x,y)$, $F(u,x,y,\varepsilon)$ и $\phi(x,y)$ являются достаточно гладкими.*

Как обычно, требуемый порядок гладкости зависит от порядка асимптотики, которую мы хотим построить. Поскольку речь пойдет об асимптотике произвольного порядка, будем считать эти функции бесконечно дифференцируемыми.

Условие II. *Уравнение $F(u,x,y,0) = 0$, получающееся из (12) при $\varepsilon = 0$, в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$ имеет решение $u = \bar{u}_0(x,y)$.*

Условие III. *Производная $\bar{F}_u(x,y) := F_u(\bar{u}_0(x,y),x,y,0) > 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$.*

Условие IV. *Для системы*

$$\frac{dz_1}{dt} = z_2, \quad \frac{dz_2}{dt} = F\left(\bar{u}_0(x,y) + z_1, x, y, 0\right), \quad t \geq 0,$$

где x, y – параметры, (x,y) – произвольная точка границы $\partial\Omega$, прямая $z_1 = \phi(x,y) - \bar{u}_0(x,y)$ пересекает сепаратрису, входящую в точку покоя $(z_1,z_2) = (0,0)$ этой системы при $t \to \infty$.

Для определенности будем считать, что в задаче (12), (2) параметр $\alpha = 3/2$. Сделаем замену $\varepsilon^{1/2} = \mu$. Получим уравнение

$$\mu^4 \Delta u - \mu^3 A(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = F(u,x,y,\mu^2), \tag{14}$$

с краевым условием

$$u(x,y,\mu) = \phi(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega. \tag{15}$$

В соответствии с видом (13) искомой асимптотики функцию F заменим выражением, аналогичным (13) (см. [10]):

$$F = \bar{F} + \Pi F + PF. \tag{16}$$

Выражения (13) и (16) подставляются в уравнение (14), которое разделяется на части: регулярную

$$\mu^4 \Delta \bar{u} - \mu^3 A(x,y) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \bar{F}, \tag{17}$$

погранслойную

$$\mu^4 \Delta \Pi - \mu^3 A(x,y) \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \Pi F \tag{18}$$

и угловую погранслойную

$$\mu^4 \Delta P - \mu^3 A(x,y) \frac{\partial P}{\partial y} = PF, \tag{19}$$

вид правых частей уравнений указан ниже. Приведем схему построения асимптотики.

Регулярная часть асимптотики находится из уравнения (17), в котором $\bar{F} = F(\bar{u}, x, y, \mu^2)$, а $\bar{u}$ ищется в виде ряда по степеням μ

$$\bar{u}(x,y,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \, \bar{u}_k(x,y). \tag{20}$$

Для нахождения коэффициентов ряда (20) получается система уравнений

$$F\left(\bar{u}_0(x,y), x, y, 0\right) = 0, \quad \bar{F}_u(x,y)\bar{u}_k = f_k(x,y), \quad k \geq 1,$$

где функции $f_k(x,y)$ рекуррентно выражаются через $\bar{u}_i(x,y)$ с номерами $i < k$. Корень первого уравнения $\bar{u}_0 = \bar{u}_0(x,y)$ выбирается в соответствии с условием II. Из последующих уравнений в силу условия III однозначно определяются функции $\bar{u}_k = \bar{u}_k(x,y), \quad k \geq 1$.

Регулярная часть асимптотики, как будет видно в дальнейшем, дает при $\mu \to 0$ приближение для решения задачи (14), (15) внутри прямоугольника Ω, но на границе $\partial\Omega$ функция $\bar{u}(x,y,\varepsilon)$, вообще говоря, не совпадает с заданной граничной функцией $\phi(x,y)$. Для устранения невязок в граничном условии (15) вводится погранслойная часть асимптотики, которая в соответствии с числом сторон прямоугольника Ω разделяется на четыре слагаемых:

$$\Pi = \overset{(1)}{\Pi} + \overset{(2)}{\Pi} + \overset{(3)}{\Pi} + \overset{(4)}{\Pi}. \tag{21}$$

Каждое слагаемое играет роль вблизи соответствующей стороны прямоугольника Ω. Для построения погранфункций вводятся растянутые (погранслойные) переменные

$$\xi = \frac{x}{\mu^2}, \qquad \eta = \frac{y}{\mu^2}, \qquad \xi_* = \frac{a-x}{\mu^2}, \qquad \eta_* = \frac{b-y}{\mu^2},$$

и на четыре слагаемых, аналогичных (21), разделяется правая часть в (18).

Погранслойная часть асимптотики в окрестности стороны $y = 0$ находится из задачи

$$\mu^4 \frac{\partial^2 \overset{(1)}{\Pi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overset{(1)}{\Pi}}{\partial \eta^2} - \mu A\left(x, \mu^2\eta\right) \frac{\partial \overset{(1)}{\Pi}}{\partial \eta} = \overset{(1)}{\Pi} F, \quad 0 \le x \le a, \quad \eta \ge 0, \tag{22}$$

$$\overset{(1)}{\Pi}(x, 0, \mu) = \phi(x, 0) - \bar{u}(x, 0, \mu), \quad \overset{(1)}{\Pi}(x, \infty, \mu) = 0, \tag{23}$$

где

$$\overset{(1)}{\Pi} F = F\left(\bar{u}\left(x, \mu^2\eta, \mu\right) + \overset{(1)}{\Pi}(x, \eta, \mu), x, \mu^2\eta, \mu^2\right) - F\left(\bar{u}\left(x, \mu^2\eta, \mu\right), x, \mu^2\eta, \mu^2\right).$$

Функция $\overset{(1)}{\Pi}$ ищется в виде ряда по степеням μ

$$\overset{(1)}{\Pi}(x, \eta, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \overset{(1)}{\Pi}_k(x, \eta). \tag{24}$$

Для главного члена $\overset{(1)}{\Pi}_0(x, \eta)$ из (22), (23) получается задача (переменная x играет роль параметра, $0 \le x \le a$):

$$\frac{\partial^2 \overset{(1)}{\Pi}_0}{\partial \eta^2} = F\left(\bar{u}_0(x, 0) + \overset{(1)}{\Pi}_0, x, 0, 0\right), \quad \eta \ge 0,$$

$$\overset{(1)}{\Pi}_0(x, 0) = \phi(x, 0) - \bar{u}_0(x, 0), \quad \overset{(1)}{\Pi}_0(x, \infty) = 0.$$

В силу условия IV эта задача имеет решение, уравнение интегрируется в квадратурах, и для решения в силу условия III справедлива экспоненциальная оценка (см. [10])

$$\left|\overset{(1)}{\Pi}_0(x, \eta)\right| \le C \exp(-\kappa\eta), \tag{25}$$

где $C > 0$ и $\kappa > 0$ – здесь и далее подходящие положительные числа, не зависящие от ε. Такая же оценка оказывается справедливой и для производных

$$\frac{\partial \overset{(1)}{\Pi}_0}{\partial \eta} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \overset{(1)}{\Pi}_0}{\partial x^2}$$

(см. [3]).

Для коэффициентов $\overset{(1)}{\Pi}_k(x, \eta)$, $k \ge 1$, ряда (24) получаются линейные задачи

$$\frac{\partial^2 \overset{(1)}{\Pi}_k}{\partial \eta^2} = F_u\left(\bar{u}_0(x, 0) + \overset{(1)}{\Pi}_0(x, \eta), x, 0, 0\right) \overset{(1)}{\Pi}_k + \overset{(1)}{\pi}_k(x, \eta), \quad \eta \ge 0, \tag{26}$$

$$\overset{(1)}{\Pi}_k(x,0) = -\bar{u}_k(x,\,0), \quad \overset{(1)}{\Pi}_k(x,\infty) = 0, \tag{27}$$

где функции $\overset{(1)}{\pi}_k(x,\eta)$ рекуррентно выражаются через $\overset{(1)}{\Pi}_i(x,\eta)$ с номерами $i<k$ и имеют экспоненциальные оценки вида (25), если таким же оценкам удовлетворяют функции $\overset{(1)}{\Pi}_i(x,\eta)$ при $i<k$. Решения задач (26), (27) выписываются в явном виде (см. [3]) и для них вместе с производными

$$\frac{\partial \overset{(1)}{\Pi}_k}{\partial\eta} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \overset{(1)}{\Pi}_k}{\partial x^2}$$

получаются экспоненциальные оценки вида (25).

Погранслойные ряды $\overset{(2)}{\Pi}(\xi,y,\mu)$, $\overset{(3)}{\Pi}(x,\eta_*,\mu)$ и $\overset{(4)}{\Pi}(\xi_*,y,\mu)$, играющие роль в окрестностях сторон $x=0$, $y=b$ и $x=a$, строятся аналогично ряду $\overset{(1)}{\Pi}(x,\eta,\mu)$, и их члены имеют экспоненциальные оценки типа (25).

Погранслойная часть асимптотики устраняет невязки в граничном условии на сторонах прямоугольника Ω, внесенные регулярной частью. В то же время она вносит свои невязки в граничное условие. Эти невязки существенны лишь вблизи угловых точек границы. Так, пограничные функции $\overset{(1)}{\Pi}_k(x,\,\eta)$, устраняя невязки в граничном условии на стороне $y=0$, в свою очередь вносят невязки в граничное условие на сторонах $x=0$ и $x=a$. Эти невязки существенны лишь вблизи угловых точек $(0,\,0)$ и $(a,\,0)$, а далее, с ростом y, они экспоненциально затухают в силу оценки (25). Аналогичные невязки вносят члены погранслойного ряда $\overset{(2)}{\Pi}(\xi,\,y,\,\mu)$ на стороны $y=0$ и $y=b$, члены ряда $\overset{(3)}{\Pi}(x,\,\eta_*,\,\mu)$ – на стороны $x=0$ и $x=a$, члены ряда $\overset{(4)}{\Pi}(\xi_*,\,y,\,\mu)$ – на стороны $y=0$ и $y=b$. С целью устранения этих невязок вводится угловая часть асимптотики, она обозначается буквой P. В соответствии с числом вершин прямоугольника Ω эта часть асимптотики разделяется на четыре слагаемых:

$$P = \overset{(1)}{P} + \overset{(2)}{P} + \overset{(3)}{P} + \overset{(4)}{P}, \tag{28}$$

и на четыре аналогичных слагаемых разделяется правая часть в (19). Каждое слагаемое играет роль только вблизи соответствующей вершины прямоугольника Ω.

Угловая погранслойная часть асимптотики в окрестности точки $(0,0)$ находится из задачи

$$\frac{\partial^2 \overset{(1)}{P}}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 \overset{(1)}{P}}{\partial\eta^2} - \mu A(\mu^2\xi,\mu^2\eta)\,\frac{\partial \overset{(1)}{P}}{\partial\eta} = \overset{(1)}{P} F, \quad \xi\ge 0, \quad \eta\ge 0,$$

$$\overset{(1)}{P}(0,\eta,\mu) = -\overset{(1)}{\Pi}(0,\eta,\mu), \quad \overset{(1)}{P}(\xi,0,\mu) = -\overset{(2)}{\Pi}(\xi,0,\mu),$$

$$\overset{(1)}{P}(\xi,\eta,\mu)\to 0 \quad \text{при} \quad (\xi+\eta)\to\infty,$$

где

$$\overset{(1)}{P} F =$$

$$= F\left(\bar{u}\left(\mu^2\xi, \mu^2\eta, \mu\right) + \overset{(1)}{\Pi}\left(\mu^2\xi, \eta, \mu\right) + \overset{(2)}{\Pi}\left(\xi, \mu^2\eta, \mu\right) + \overset{(1)}{P}\left(\xi, \eta, \mu\right), \mu^2\xi, \mu^2\eta, \mu^2\right) -$$

$$-\left(\overset{(1)}{\Pi} F + \overset{(2)}{\Pi} F + \bar{F}\right)\bigg|_{x=\mu^2\xi,\ y=\mu^2\eta}.$$

Функция $\overset{(1)}{P}$ ищется в виде ряда по степеням μ

$$\overset{(1)}{P}\left(\xi, \eta, \mu\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \overset{(1)}{P}_k\left(\xi, \eta\right). \tag{29}$$

Для нахождения коэффициентов ряда (29) получаются эллиптические задачи, исследование которых представляет основную трудность. Задача для определения главного члена $\overset{(1)}{P}_0\left(\xi, \eta\right)$ угловой части асимптотики ставится в квадранте $\mathbb{R}^2_+$ и имеет вид, аналогичный задаче (8) – (10):

$$\frac{\partial^2 \overset{(1)}{P}_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \overset{(1)}{P}_0}{\partial \eta^2} = \overset{(1)}{P}_0 F, \quad \xi \geq 0, \quad \eta \geq 0, \tag{30}$$

$$\overset{(1)}{P}_0\left(0, \eta\right) = -\overset{(1)}{\Pi}_0\left(0, \eta\right), \qquad \overset{(1)}{P}_0\left(\xi, 0\right) = -\overset{(2)}{\Pi}_0\left(\xi, 0\right), \tag{31}$$

$$\overset{(1)}{P}_0\left(\xi, \eta\right) \to 0 \quad \text{при} \quad (\xi + \eta) \to \infty, \tag{32}$$

где

$$\overset{(1)}{P}_0 F = F\left(\bar{u}_0(0,0) + \overset{(1)}{\Pi}_0\left(0, \eta\right) + \overset{(2)}{\Pi}_0\left(\xi, 0\right) + \overset{(1)}{P}_0\left(\xi, \eta\right), 0, 0, 0\right) -$$

$$-F\left(\bar{u}_0(0,0) + \overset{(1)}{\Pi}_0\left(0, \eta\right), 0, 0, 0\right) - F\left(\bar{u}_0(0,0) + \overset{(2)}{\Pi}_0\left(\xi, 0\right), 0, 0, 0\right). \tag{33}$$

Для функций $\overset{(1)}{P}_k\left(\xi, \eta\right)$, $k \geq 1$, получаются линейные задачи

$$\frac{\partial^2 \overset{(1)}{P}_k}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \overset{(1)}{P}_k}{\partial \eta^2} - F'_u\left(\bar{u}_0 + \overset{(1)}{\Pi}_0\left(0, \eta\right) + \overset{(2)}{\Pi}_0\left(\xi, 0\right) + \overset{(1)}{P}_0\left(\xi, \eta\right), 0, 0, 0\right) \overset{(1)}{P}_k =$$

$$= \overset{(1)}{p}_k\left(\xi, \eta\right), \quad \xi \geq 0, \quad \eta \geq 0, \tag{34}$$

$$\overset{(1)}{P}_k\left(0, \eta\right) = -\overset{(1)}{\Pi}_k\left(0, \eta\right), \qquad \overset{(1)}{P}_k\left(\xi, 0\right) = -\overset{(2)}{\Pi}_k\left(\xi, 0\right), \tag{35}$$

$$\overset{(1)}{P}_k(\xi,\eta) \to 0 \quad \text{при} \quad (\xi+\eta)\to\infty, \tag{36}$$

где функции $\overset{(1)}{p}_k(\xi,\eta)$ имеют экспоненциальные оценки

$$\left|\overset{(1)}{p}_k(\xi,\eta)\right| \le C\exp(-\kappa(\xi+\eta)), \tag{37}$$

если таким же оценкам удовлетворяют функции $\overset{(1)}{P}_i(\xi,\eta)$ с номерами $i<k$.

Для исследования задач (30) – (32) и (34) – (36) на предмет их разрешимости и экспоненциальных оценок решения используется метод верхних и нижних решений (барьеров), разработанный для подобной ситуации в [4–8]. Рассмотрим возможные случаи, в зависимости от которых наряду с условиями I – IV будем требовать выполнения тех или иных дополнительных условий.

Случай (*A*). Сначала будем предполагать, что задача (30) – (32) имеет решение $\overset{(1)}{P}_0(\xi,\eta)$ с экспоненциальной оценкой вида (37). В этом случае в силу условия III и экспоненциальных оценок пограничных функций найдется положительное число ρ такое, что в области

$$\Omega_0 = \{(\xi,\eta)|\,\xi>\rho,\,\eta>\rho\} \tag{38}$$

производная F_u на полном нулевом приближении удовлетворяет неравенству

$$F_u\left(\bar{u}_0(0,0)+\overset{(1)}{\Pi}_0(0,\eta)+\overset{(2)}{\Pi}_0(\xi,0)+\overset{(1)}{P}_0(\xi,\eta),0,0,0\right)\ge\gamma^2,$$

где γ – некоторое положительное число. Однако в приграничных полосах

$$E_\xi = \{(\xi,\eta)|\,0\le\xi\le\rho,\,\eta\ge0\} \quad \text{и} \quad E_\eta = \{(\xi,\eta)|\,\xi\ge0,\,0\le\eta\le\rho\}$$

эта производная может быть отрицательной. Поэтому задачи (34) – (36) не всегда будут иметь решения, удовлетворяющие экспоненциальным оценкам вида (37). В связи с этим рассмотрим следующие дополнительные условия.

Условие (A_1). *Задача (30) – (32) имеет решение* $\overset{(1)}{P}_0(\xi,\eta)$ *с экспоненциальной оценкой вида (37), и, кроме этого, во всем квадранте* $\mathbb{R}^2_+$ *производная* F_u *на полном нулевом приближении удовлетворяет неравенству*

$$F_u\left(\bar{u}_0(0,0)+\overset{(1)}{\Pi}_0(0,\eta)+\overset{(2)}{\Pi}_0(\xi,0)+\overset{(1)}{P}_0(\xi,\eta),0,0,0\right)\ge\gamma^2,$$

где γ *– некоторое положительное число.*

Условие (A_2). *Задача (30) – (32) имеет решение* $\overset{(1)}{P}_0(\xi,\eta)$ *с экспоненциальной оценкой вида (37), и, кроме этого, в приграничных полосах* E_ξ *и* E_η *квадранта* $\mathbb{R}^2_+$ *производная* F_u *на полном нулевом приближении удовлетворяет неравенству*

$$F_u\left(\bar{u}_0(0,0)+\overset{(1)}{\Pi}_0(0,\eta)+\overset{(2)}{\Pi}_0(\xi,0)+\overset{(1)}{P}_0(\xi,\eta),0,0,0\right)\ge -q^2,$$

где q– положительное число, причем $q\rho < \pi/2$, ρ – число из (38).

Если выполнено условие (A_1), то для задач (34) – (36) можно построить верхние $\overset{(1)}{P}_{k+}$ и нижние $\overset{(1)}{P}_{k-}$ барьеры в виде

$$\overset{(1)}{P}_{k\pm} = \pm r \exp(-\kappa(\xi+\eta)) - \overset{(1)}{\Pi}_k (0,\eta)\ \exp(-\kappa\xi) - \overset{(2)}{\Pi}_k (\xi,0)\ \exp(-\kappa\eta) -$$

$$-\bar{u}_k(0,0)\ \exp(-\kappa(\xi+\eta))\ ,$$

где r – подходящее положительное число. Эти барьеры имеют экспоненциальные оценки вида (37) и обеспечивают существование решений задач (34) – (36) с такой же оценкой.

Если условие (A_1) не выполнено, то потребуем выполнения условия (A_2). В этом случае барьеры для задач (34) – (36) не удается построить сразу во всем квадранте $\mathbb{R}^2_+$. Приходится разбивать его на три подобласти Ω_0, Ω_1 и Ω_2, где Ω_0 определена в (38),

$$\begin{array}{rcl} \Omega_1 & = & \{(\xi,\eta)\,|\quad \xi \ge \eta, \quad 0 \le \eta \le \rho \ \}, \\ \Omega_2 & = & \{(\xi,\eta)\,|\ 0 \le \xi \le \rho, \quad \eta \ge \xi \quad \}. \end{array}$$

Сначала можно построить непрерывные в $\mathbb{R}^2_+$ и гладкие в каждой из трех подобластей барьерные функции, имеющие экспоненциальные оценки вида (37). Затем эти кусочно-гладкие барьеры можно специальным образом преобразовать в гладкие в $\mathbb{R}^2_+$ барьеры для задач (34) – (36) (см. [8]).

Таким образом, если выполнено условие (A_1) или условие (A_2), то задачи (34) – (36) имеют решения $\overset{(1)}{P}_k (\xi,\eta)$, удовлетворяющие экспоненциальным оценкам вида (37).

Случай (*B*). Теперь не будем делать априорного предположения о существовании и оценке решения задачи (30) – (32). Потребуем, чтобы граничное значение $\phi = \phi(0,0)$ было таково, что для функции $F(u) := F(u,0,0,0)$ производная $F'(u) > 0$ для всех значений u на промежутке от $\bar{u}_0 = \bar{u}_0(0,0)$ до ϕ. Для определенности будем считать, что $\bar{u}_0 < \phi$.

Случай, когда $\bar{u}_0 > \phi$, сводится к предыдущему заменой в уравнении (12) u на $-u$.

Если же $\bar{u}_0 = \phi$, то $\overset{(1)}{\Pi}_0 (0,\eta) = \overset{(2)}{\Pi}_0 (\xi,0) = \overset{(1)}{P}_0 (\xi,\eta) = 0$ и коэффициент при $\overset{(1)}{P}_k$ в уравнении (34) будет равен $-F_u(\bar{u}_0) < 0$. В этом случае решения задач (34) – (36) выписываются в явном виде и имеют экспоненциальные оценки вида (37).

В случае (B) при построении верхнего барьера для решения задачи (30) – (32) введем следующее условие.

Условие (B_1). *Существуют числа $\phi_1 > \phi$ и $C_+ \in (0, \phi_1 - \phi)$ такие, что $F'(u) > 0$ на промежутке $[\phi, \phi_1]$ и для любых значений s и t из промежутка $[0, \phi - \bar{u}_0]$ выполняется неравенство*

$$F\left(\bar{u}_0 + s + t - \frac{st}{\phi - \bar{u}_0} + C_+\right) - \left(1 - \frac{s}{\phi - \bar{u}_0}\right) F\left(\bar{u}_0 + t\right) -$$

$$-\left(1 - \frac{t}{\phi - \bar{u}_0}\right) F\left(\bar{u}_0 + s\right) > 0. \tag{39}$$

Если условие (B_1) выполнено, то верхний барьер для решения задачи (30) – (32) можно построить в виде

$$r\exp(-\kappa(\xi+\eta)) - \frac{\overset{(1)}{\Pi}_0(0,\eta)\,\overset{(2)}{\Pi}_0(\xi,0)}{\phi-\bar{u}_0}\,, \tag{40}$$

где r и κ – подходящие положительные числа.

Очевидно, что при $\phi \to \bar{u}_0$ левая часть неравенства (39) стремится к числу $F(\bar{u}_0 + C_+) > 0$. Поэтому любая функция $F(u)$ при значениях ϕ, достаточно близких к $\bar{u}_0$, удовлетворяет условию (B_1). При удалении ϕ от $\bar{u}_0$ ситуация может измениться. В [9] подробно исследован класс функций, удовлетворяющих условию (B_1). Преобразуем левую часть неравенства (39) к виду, удобному для исследования. Так как

$$\bar{u}_0 + s + t - \frac{st}{\phi-\bar{u}_0} = \phi - (\phi-\bar{u}_0)\left(1-\frac{s}{\phi-\bar{u}_0}\right)\left(1-\frac{t}{\phi-\bar{u}_0}\right),$$

$$\bar{u}_0 + s = \phi - (\phi-\bar{u}_0)\left(1-\frac{s}{\phi-\bar{u}_0}\right),$$

$$\bar{u}_0 + t = \phi - (\phi-\bar{u}_0)\left(1-\frac{t}{\phi-\bar{u}_0}\right),$$

то левая часть неравенства (39) представляется в виде

$$F\left(\phi - (\phi-\bar{u}_0)\left(1-\frac{s}{\phi-\bar{u}_0}\right)\left(1-\frac{t}{\phi-\bar{u}_0}\right)+C_+\right) -$$

$$-\left(1-\frac{s}{\phi-\bar{u}_0}\right)F\left(\phi-(\phi-\bar{u}_0)\left(1-\frac{t}{\phi-\bar{u}_0}\right)\right) -$$

$$-\left(1-\frac{t}{\phi-\bar{u}_0}\right)F\left(\phi-(\phi-\bar{u}_0)\left(1-\frac{s}{\phi-\bar{u}_0}\right)\right).$$

Положим

$$x = 1-\frac{s}{\phi-\bar{u}_0}, \quad y = 1-\frac{t}{\phi-\bar{u}_0} \tag{41}$$

и введем функцию

$$f(z) = F\big(\phi-(\phi-\bar{u}_0)z\big). \tag{42}$$

Неравенство (39) можно теперь записать в виде

$$f(xy-\delta) - xf(y) - yf(x) > 0, \quad \delta = \frac{C_+}{\phi-\bar{u}_0} > 0. \tag{43}$$

Отметим, что $f'(z) = -F'\big(\phi-(\phi-\bar{u}_0)z\big)(\phi-\bar{u}_0) < 0$ при $0 \le z \le 1$, $f'(1) = F'\big(\bar{u}_0\big) = 0$.

Назовем классом $\mathbf{G}$ *множество функций* $f(z)$, $z \in \mathbb{R}$, *таких, что*

1) $f'(z) < 0$ *на промежутке* $[0,\,1]$;

2) $f(1) = 0$.

Назовем подклассом $\mathbf{G}_1$ *множество функций класса* $\mathbf{G}$ *с производной* $f'(z) < 0$ *на промежутке* $[-z_1,\, 1]$, *удовлетворяющих неравенству* (43) *для всех* $x,\, y \in [0,\, 1]$ *при некотором* $\delta \in (0, z_1)$, *где* $z_1 = \frac{\phi_1 - \phi}{\phi - \bar{u}_0} > 0$.

Нетрудно доказать следующие утверждения.

Утверждение 1. *Если* $f(z)$ *– функция класса* $\mathbf{G}$ *и вторая производная* $f''(z) \geq 0$ *для* $z \in [0,\, 1]$, *то* $f(z)$ *принадлежит подклассу* $\mathbf{G}_1$.

В классе $\mathbf{G}$ многочлены 2-й степени имеют вид

$$f(z) = A(z-1)(z-a).$$

Утверждение 2. *Многочлены* 2*-й степени класса* $\mathbf{G}$ *принадлежат подклассу* $\mathbf{G}_1$.

В классе $\mathbf{G}$ многочлены 3-й степени имеют вид

$$f(z) = A(z-1)\left(z^2 + pz + q\right).$$

Утверждение 3. *Многочлены* 3*-й степени вида*

$$f(z) = A(z-1)\left(z^2 + pz + q\right), \quad A > 0,$$

принадлежат подклассу $\mathbf{G}_1$.

Утверждение 4. *Многочлены* 3*-й степени вида*

$$f(z) = A(z-1)(z^2 + pz + q), \quad A < 0,$$

принадлежат подклассу $\mathbf{G}_1$ *за исключением случаев, когда точки* (p, q) *лежат в некоторой области* Ψ_1, *расположенной в полосе*

$$\left\{(p, q) |\, p, q \in \mathbb{R},\, p < q < p + r_1\right\},$$

где r_1 *– некоторое число из промежутка* $(0,\, 3)$.

От функций $f(z)$ вернемся к соответствующим функциям $F(u)$. Для кубических функций

$$f(z) = A(z-1)(z^2 + pz + q)$$

соответствующие функции $F(u)$ имеют вид

$$F(u) = f\left(\frac{\phi - u}{\phi - \bar{u}_0}\right) = A\left(\frac{\phi - u}{\phi - \bar{u}_0} - 1\right)\left(\frac{(\phi - u)^2}{(\phi - \bar{u}_0)^2} + p\frac{\phi - u}{\phi - \bar{u}_0} + q\right) =$$

$$= -\frac{A}{(\phi - \bar{u}_0)^3}(u - \bar{u}_0)\left((u-\phi)^2 - p(\phi - \bar{u}_0)(u - \phi) + q(\phi - \bar{u}_0)^2\right).$$

Если $A < 0$, то условию (B_1) удовлетворяют все кубические функции вида

$$F(u) = A(u - \bar{u}_0)\left((u-\phi)^2 - p(u-\phi) + q\right),$$

а если $A > 0$, то условию (B_1) удовлетворяют все кубические функции такого же вида за исключением случаев, когда точка $\left(\frac{p}{\phi - \bar{u}_0}\,; \frac{q}{(\phi - \bar{u}_0)^2}\right)$ лежит в области Ψ_1. Выбор параметров из области Ψ_1 позволяет построить примеры кубических функций, не удовлетворяющих условию (B_1). Например, при $p = 1,1$ и $q = 1,103$ получим функцию

$$f(z) = -(z-1)(z^2 + 1,1z + 1,103),$$

которая не принадлежит классу $\mathbf{G}_1$. Соответствующая функция $F(u)$ имеет вид

$$F(u) = \frac{1}{(\phi - \bar{u}_0)^3}(u - \bar{u}_0)\left((u-\phi)^2 - 1,1(\phi - \bar{u}_0)(u-\phi) + 1,103(\phi - \bar{u}_0)^2\right)$$

и не удовлетворяет условию (B_1).

При построении нижнего барьера для решения задачи (30) – (32) введем следующее условие.

Условие (B_2). *Существуют числа* $u_1 < \bar{u}_0$ *и* $C_- \in (0, \bar{u}_0 - u_1)$ *такие, что* $F'(u) > 0$ *на промежутке* $[u_1, \bar{u}_0]$ *и для любых значений* s *и* t *из промежутка* $[0, \phi - \bar{u}_0]$ *выполняется либо неравенство*

$$F\left(\bar{u}_0 + s + t - \frac{st}{\phi - \bar{u}_0} - C_-\right) - \left(1 - \frac{s}{\phi - \bar{u}_0}\right) F\left(\bar{u}_0 + t\right) -$$

$$- \left(1 - \frac{t}{\phi - \bar{u}_0}\right) F\left(\bar{u}_0 + s\right) < 0, \qquad (44)$$

либо неравенство

$$F\left(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st} - C_-\right) - F\Big(\bar{u}_0 + s\Big) - F\Big(\bar{u}_0 + t\Big) -$$

$$-(st)^{-3/2}\Big[s^2 z(t) + t^2 z(s)\Big] < 0, \qquad (45)$$

где

$$z(w) = \int_0^w F(\bar{u}_0 + u)du - wF(\bar{u}_0 + w).$$

Если выполнено условие (B_2), то нижний барьер для решения задачи (30) – (32) можно построить либо в виде

$$-r\exp(-\kappa(\xi + \eta)) - \frac{\overset{(1)}{\Pi}_0\,(0, \eta)\,\overset{(2)}{\Pi}_0\,(\xi, 0)}{\phi - \bar{u}_0}\,, \qquad (46)$$

либо в виде

$$-r\exp(-\kappa(\xi + \eta)) - 2\sqrt{\overset{(1)}{\Pi}_0\,(0, \eta)\,\overset{(2)}{\Pi}_0\,(\xi, 0)}\,, \qquad (47)$$

в зависимости от того, какое из неравенств (44) или (45) выполняется. Здесь r и κ – подходящие положительные числа.

При исследовании неравенства (44) используются те же приемы, что и для неравенства (39). Однако оказывается, что неравенству (44) удовлетворяют не все квадратичные функции. Эту ситуацию исправляет возможность использования неравенства (45), при исследовании которого полезно воспользоваться тем, что

$$\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st} = \bar{u}_0 + \left(\sqrt{s} - \sqrt{t}\right)^2 \in [\bar{u}_0, \phi].$$

В результате исследования неравенств (39), (44) и (45) приходим к следующим выводам:

1) Если краевое значение $\phi = \phi(0,0)$ достаточно близко к $\bar{u}_0 = \bar{u}_0(0,0)$, то функция F удовлетворяет условиям (B_1) – (B_2).

2) С удалением краевого значения ϕ от $\bar{u}_0$ функция F может перестать удовлетворять условиям (B_1) – (B_2).

3) Все квадратичные функции удовлетворяют условиям (B_1) – (B_2).

4) Не все кубические функции удовлетворяют условиям (B_1) – (B_2).

Если выполнены условия (B_1) – (B_2), то задача (30) – (32) имеет решение $\overset{(1)}{P}_0$ (ξ,η), заключенное между барьерами, вид которых обеспечивает выполнение условия (A_1), которое гарантирует существование и экспоненциальные оценки решений задач (34) – (36).

Случай (C). Откажемся от монотонности по u функции $F(u)$, т. е. от условия $F'(u) > 0$ на промежутке $[u_0, \phi]$. Пусть выполнено следующее условие.

Условие (C). *Функция* $F(u) := F(u,0,0,0)$ *имеет вид*

$$F(u) = -A(u-\alpha)(u-\beta),$$

где $A > 0$, $\alpha = \bar{u}_0(0,0) < \beta$, *а граничное значение* $\phi = \phi(0,0)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\frac{\alpha+\beta}{2} < \phi \le \frac{\alpha+\beta}{2} + \phi_0,$$

где $\phi_0 \in \left(0; \frac{\beta-\alpha}{2}\right)$ *(требование к* ϕ_0 *уточняется в процессе построения барьеров).*

Если выполнено условие (C), то построение барьеров для задачи (30) – (32) проходит аналогично построению барьеров для задач (34) – (36) в случае (A). Область $\mathbb{R}^2_+$ разбивается на три подобласти. Строятся непрерывные в $\mathbb{R}^2_+$ и гладкие в каждой из трех подобластей барьерные функции, имеющие экспоненциальные оценки вида (37). Далее эти кусочно–гладкие барьеры специальным образом преобразуются в гладкие барьеры, что обеспечивает существование решения задачи (30) – (32).

Построение угловых частей асимптотики, соответствующих точкам $(a,0)$, $(0,b)$ и (a,b), проводится аналогично тому, как это сделано для точки $(0,0)$. Для этих точек вводятся условия типа (A_1)–(A_2), (B_1)–(B_2) или (C). Поэтому для разрешимости задачи (12), (2), кроме поставленных ранее условий I – IV, введем дополнительное условие V.

Условие V. *В каждой угловой точке прямоугольника* Ω *выполнено хотя бы одно из условий типа* (A_1) – (A_2), (B_1) – (B_2) *или* (C).

Мы рассмотрели построение погранслойного асимптотического ряда для задачи (12), (2) в случае $\alpha = 3/2$. Аналогично строится асимптотический ряд и при любом другом рациональном $\alpha = \gamma/\beta > 1$. Сформулируем **основной результат**.

Теорема 1. *Если выполнены условия* I – V, *то для достаточно малых* ε *задача* (12), (2) *при рациональном* $\alpha = \gamma/\beta > 1$ *имеет решение* $u(x,y,\varepsilon)$, *для которого ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/\beta} \Bigg[\bar{u}_k(x,y) + \overset{(1)}{\Pi}_k (x,\eta) + \overset{(2)}{\Pi}_k (\xi,y) + \overset{(3)}{\Pi}_k (x,\eta_*) + \overset{(4)}{\Pi}_k (\xi_*,y) +$$

$$+ \overset{(1)}{P}_k (\xi,\eta) + \overset{(2)}{P}_k (\xi,\eta_*) + \overset{(3)}{P}_k (\xi_*,\eta_*) + \overset{(4)}{P}_k (\xi_*,\eta) \Bigg]$$

является асимптотическим разложением при $\varepsilon \to 0$ *в замкнутом прямоугольнике* $\bar{\Omega}$.

Оценка остаточного члена построенного асимптотического разложения проводится таким же методом, как в работе [8].

2. Случай $0 < \alpha < 1$

Если $0 < \alpha < 1$, то погранслойная структура решения задачи (12), (2) существенно изменяется. Пусть выполнены условия I – IV из раздела 1 и следующие условия.

Условие VI. *Начальная задача*

$$A(x,0)\,\frac{d\Pi_0}{d\tau} = -F(\bar{u}_0(x,0) + \Pi_0, x, 0, 0), \quad \tau \ge 0, \quad \Pi_0(x,0) = \phi(x,0) - \bar{u}_0(x,0),$$

где параметр $x \in [0,a]$, *имеет решение* $\Pi_0(x,\tau)$, $\tau \ge 0$, *удовлетворяющее условию* $\Pi_0(x,\infty) = 0$.

Условие VII. $A(x,0) > 0$ *и* $A(x,b) > 0$ *при* $x \in [0,a]$.

Рассмотрим задачу (12), (2) при $\alpha = 1/2$. Положив $\varepsilon^{1/2} = \mu$, получим уравнение

$$\mu^4 \Delta u - \mu A(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = F(u, x, y, \mu^2) \tag{48}$$

с краевым условием (15). Решение этой задачи будем искать в виде (13). Уравнение (48) разделим на регулярную, погранслойную и угловую погранслойную части.

Регулярная часть асимптотики находится из уравнения

$$\mu^4 \Delta \bar{u} - \mu A(x,y)\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \bar{F} := F(\bar{u}, x, y, \mu^2)$$

и строится в виде ряда (20) таким же образом, как в разделе 1.

Для устранения невязок, внесенных регулярной частью асимптотики в граничное условие, вводится погранслойная часть асимптотики, которая, как и в разделе 1, состоит из четырех слагаемых (см. (21)), но коэффициенты растяжения погранслойных переменных η и η_* теперь иные, нежели в разделе 1:

$$\xi = \frac{x}{\mu^2}, \quad \eta = \frac{y}{\mu}, \quad \xi_* = \frac{a-x}{\mu^2}, \quad \eta_* = \frac{b-y}{\mu^3}. \tag{49}$$

Погранслойная часть асимптотики $\overset{(1)}{\Pi}(x,\eta,\mu)$ **в окрестности стороны** $y = 0$ ищется в виде ряда (24) и определяется из задачи

$$\mu^4\,\frac{\partial^2 \overset{(1)}{\Pi}}{\partial x^2} + \mu^2\,\frac{\partial^2 \overset{(1)}{\Pi}}{\partial \eta^2} - A(x,\mu\eta)\,\frac{\partial \overset{(1)}{\Pi}}{\partial \eta} = \overset{(1)}{\Pi} F, \quad 0 \le x \le a, \quad \eta \ge 0,$$

$$\overset{(1)}{\Pi}(x,0,\mu) = \phi(x,0) - \bar{u}(x,0,\mu), \quad \overset{(1)}{\Pi}(x,\infty,\mu) = 0,$$

где

$$\overset{(1)}{\Pi} F = F\left(\bar{u}\,(x,\mu\eta,\mu) + \overset{(1)}{\Pi}(x,\eta,\mu), x, \mu\eta, \mu^2\right) - F\left(\bar{u}\,(x,\mu\eta,\mu)\,, x, \mu\eta, \mu^2\right).$$

Для коэффициентов ряда (24) получаются задачи (переменная x играет роль параметра, $0 \le x \le a$):

$$-A(x,0)\,\frac{\partial \overset{(1)}{\Pi}_0}{\partial \eta} = F\Big(\bar u_0(x,0) + \overset{(1)}{\Pi}_0, x, 0, 0\Big), \quad \eta \ge 0, \tag{50}$$

$$\overset{(1)}{\Pi}_0\,(x,0) = \phi(x,0) - \bar u_0(x,0), \quad \overset{(1)}{\Pi}_0\,(x,\infty) = 0, \tag{51}$$

$$-A(x,0)\,\frac{\partial \overset{(1)}{\Pi}_k}{\partial \eta} = F'_u\Big(\bar u_0(x,0) + \overset{(1)}{\Pi}_0, x, 0, 0\Big)\,\overset{(1)}{\Pi}_k + \overset{(1)}{\pi}_k\,(x,\eta), \quad \eta \ge 0, \tag{52}$$

$$\overset{(1)}{\Pi}_k\,(x,0) = -\bar u_k(x,\,0), \quad \overset{(1)}{\Pi}_k\,(x,\infty) = 0, \quad k \ge 1, \tag{53}$$

где функции $\overset{(1)}{\pi}_k\,(x,\eta)$ имеют экспоненциальные оценки вида (25), если таким же оценкам удовлетворяют функции $\overset{(1)}{\Pi}_i$ с номерами $i < k$.

В силу условия VI задача (50), (51) имеет решение, уравнение (50) интегрируется в квадратурах, и для решения в силу условия III справедлива экспоненциальная оценка вида (25). Такие же оценки имеют место для производных

$$\frac{\partial \overset{(1)}{\Pi}_0}{\partial \eta} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \overset{(1)}{\Pi}_0}{\partial x^2}.$$

Решения задач (52), (53) можно выписать в явном виде, и для них и их производных также имеют место экспоненциальные оценки вида (25).

Погранслойная часть асимптотики $\overset{(3)}{\Pi}\,(x,\eta_*,\mu)$ в окрестности стороны $y = b$ ищется в виде ряда

$$\overset{(3)}{\Pi}\,(x,\eta_*,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k\,\overset{(3)}{\Pi}_k\,(x,\eta_*) \tag{54}$$

и определяется из задачи

$$\mu^4\,\frac{\partial^2 \overset{(3)}{\Pi}}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu^2}\,\frac{\partial^2 \overset{(3)}{\Pi}}{\partial \eta_*^2} + \frac{1}{\mu^2}\,A(x, b - \mu^3\eta_*)\,\frac{\partial \overset{(3)}{\Pi}}{\partial \eta_*} = \overset{(3)}{\Pi} F, \quad 0 \le x \le a, \quad \eta_* \ge 0,$$

$$\overset{(3)}{\Pi}\,(x,0,\mu) = \phi(x,b) - \bar u(x,b,\mu), \quad \overset{(3)}{\Pi}\,(x,\infty,\mu) = 0,$$

где

$$\overset{(3)}{\Pi} F = F\left(\bar u\left(x, b - \mu^3\eta_*, \mu\right) + \overset{(3)}{\Pi}\,(x,\eta_*,\mu), x, b - \mu^3\eta_*, \mu^2\right) -$$
$$-F\left(\bar u\left(x, b - \mu^3\eta_*, \mu\right), x, b - \mu^3\eta_*, \mu^2\right).$$

Для коэффициентов ряда (54) получаются задачи

$$\frac{\partial^2 \overset{(3)}{\Pi}_0}{\partial \eta_*^2} + A(x,b)\,\frac{\partial \overset{(3)}{\Pi}_0}{\partial \eta_*} = 0, \quad \eta_* \geq 0, \tag{55}$$

$$\overset{(3)}{\Pi}_0\,(x,0) = \phi(x,b) - \bar{u}_0(x,b), \quad \overset{(3)}{\Pi}_0\,(x,\infty) = 0, \tag{56}$$

$$\frac{\partial^2 \overset{(3)}{\Pi}_k}{\partial \eta_*^2} + A(x,b)\,\frac{\partial \overset{(3)}{\Pi}_k}{\partial \eta_*} = \overset{(3)}{\pi}_k\,(x,\eta_*), \tag{57}$$

$$\overset{(3)}{\Pi}_k\,(x,0) = -\bar{u}_1(x,b), \quad \overset{(3)}{\Pi}_k\,(x,\infty) = 0, \quad k \geq 1, \tag{58}$$

где функции $\overset{(3)}{\pi}_k\,(x,\eta_*)$ имеют экспоненциальные оценки типа (25), если таким же оценкам удовлетворяют функции $\overset{(3)}{\Pi}_i$ с номерами $i < k$. Решение задачи (55), (56) имеет вид

$$\overset{(3)}{\Pi}_0\,(x,\eta_*) = \Big(\phi(x,b) - \bar{u}_0(x,b)\Big)\exp(-A(x,b)\eta_*)$$

и в силу условия VII удовлетворяет экспоненциальной оценке типа (25) вместе со своими производными любого порядка. Решения задач (57), (58) также выписываются в явном виде и также вместе с производными имеют экспоненциальные оценки типа (25).

Погранслойные части асимптотики

$$\overset{(2)}{\Pi}\,(\xi,y,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k\,\overset{(2)}{\Pi}_k\,(\xi,y) \quad \textbf{и} \quad \overset{(4)}{\Pi}\,(\xi_*,y,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k\,\overset{(2)}{\Pi}_k\,(\xi_*,y)$$

в окрестностях сторон $x = 0$ и $x = a$ определяются в точности так же, как в разделе 1, и обладают соответствующими экспоненциальными оценками.

Как и в разделе 1, угловая часть асимптотики предназначена для устранения невязок, внесенных в граничное условие П-функциями. Она состоит из четырех частей (см. (28)), но, в отличие от раздела 1, в окрестностях угловых точек $(0,b)$ и (a,b) возникают два вида угловых пограничных функций, и в связи с этим появляются еще две погранслойные переменные

$$\zeta = \frac{x}{\mu^3} \quad \text{и} \quad \zeta_* = \frac{a-x}{\mu^3}\,,$$

о чем подробнее будет сказано ниже.

Угловая погранслойная часть асимптотики $\overset{(1)}{P}\,(\xi,\eta,\mu)$ **в окрестности точки** $(0,0)$ ищется в виде ряда

$$\overset{(1)}{P}\,(\xi,\eta,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k\,\overset{(1)}{P}_k\,(\xi,\eta) \tag{59}$$

и определяется из задачи

$$\frac{\partial^2 \overset{(1)}{P}}{\partial \xi^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 \overset{(1)}{P}}{\partial \eta^2} - A(\mu^2\xi, \mu\eta) \frac{\partial \overset{(1)}{P}}{\partial \eta} = \overset{(1)}{P} F, \quad \xi \geq 0, \quad \eta \geq 0, \tag{60}$$

$$\overset{(1)}{P}(0, \eta, \mu) = -\overset{(1)}{\Pi}(0, \eta, \mu), \quad \overset{(1)}{P}(\xi, 0, \mu) = -\overset{(2)}{\Pi}(\xi, 0, \mu), \tag{61}$$

$$\overset{(1)}{P}(\xi, \eta, \mu) \to 0 \quad \text{при} \quad (\xi + \eta) \to \infty, \tag{62}$$

где

$$\overset{(1)}{P} F = F\left(\bar{u}(\mu^2\xi, \mu\eta, \mu) + \overset{(1)}{\Pi}(\mu^2\xi, \eta, \mu) + \overset{(2)}{\Pi}(\xi, \mu\eta, \mu) + \overset{(1)}{P}(\xi, \eta, \mu), \mu^2\xi, \mu\eta, \mu^2\right) -$$

$$- \left(\overset{(1)}{\Pi} F + \overset{(2)}{\Pi} F + \bar{F}\right)\Bigg|_{x = \mu^2\xi,\ y = \mu\eta}.$$

Для главного члена $\overset{(1)}{P}_0(\xi, \eta)$ ряда (59) получается параболическая задача

$$\frac{\partial^2 \overset{(1)}{P}_0}{\partial \xi^2} - A(0,0) \frac{\partial \overset{(1)}{P}_0}{\partial \eta} = \overset{(1)}{P}_0 F, \quad \xi \geq 0, \quad \eta \geq 0,$$

$$\overset{(1)}{P}_0(0, \eta) = -\overset{(1)}{\Pi}_0(0, \eta), \qquad \overset{(1)}{P}_0(\xi, 0) = -\overset{(2)}{\Pi}_0(\xi, 0),$$

$$\overset{(1)}{P}_0(\xi, \eta) \to 0 \quad \text{при} \quad (\xi + \eta) \to \infty,$$

где $\overset{(1)}{P}_0 F$ имеет вид (33).

Для функций $\overset{(1)}{P}_k(\xi, \eta),\ k \geq 1$, получаются линейные задачи

$$\frac{\partial^2 \overset{(1)}{P}_k}{\partial \xi^2} - A(0,0) \frac{\partial \overset{(1)}{P}_k}{\partial \eta} - F_u\left(\bar{u}_0 + \overset{(1)}{\Pi}_0(0, \eta) + \overset{(2)}{\Pi}_k(\xi, 0) + \overset{(1)}{P}_0, 0, 0, 0\right) \overset{(1)}{P}_k =$$

$$= \overset{(1)}{p}_k(\xi, \eta), \quad \xi \geq 0, \quad \eta \geq 0, \tag{63}$$

$$\overset{(1)}{P}_k(0, \eta) = -\overset{(1)}{\Pi}_k(0, \eta), \qquad \overset{(1)}{P}_k(\xi, 0) = -\overset{(2)}{\Pi}_k(\xi, 0), \tag{64}$$

$$\overset{(1)}{P}_k(\xi, \eta) \to 0 \quad \text{при} \quad (\xi + \eta) \to \infty, \tag{65}$$

где функции $\overset{(1)}{p_k}(\xi,\eta)$ имеют экспоненциальные оценки вида (37), если таким же оценкам удовлетворяют функции $\overset{(1)}{P_i}$ с номерами $i<k$.

Для доказательства существования решений этих задач с экспоненциальными оценками, как и для эллиптических задач (30) – (36), рассматриваются случаи (A), (B), и (C). Однако при $k\ge 2$ в правую часть уравнения для $\overset{(1)}{P_k}$ входит производная

$$\frac{\partial^2 \overset{(1)}{P}_{k-2}}{\partial\eta^2},$$

которая не ограничена в окрестности точки $(0,0)$, что не позволяет продолжить итерационный процесс определения функций $\overset{(1)}{P_k}(\xi,\eta)$ дальше первого шага. Таким образом, с помощью описанного метода можно построить члены угловой части асимптотики в окрестности точки $(0,0)$ только нулевого и первого порядка.

Угловая погранслойная часть асимптотики $\overset{(1)}{P}(\xi_*,\eta,\mu)$ **в окрестности точки** $(a,0)$ строится таким же образом, как это сделано для точки $(0,0)$.

Угловая погранслойная часть асимптотики в окрестности точки $(0,b)$ состоит из двух типов пограничных функций:

$$\overset{(2)}{P}=\overset{(21)}{P}(\xi,\eta_*,\mu)+\overset{(22)}{P}(\zeta,\eta_*,\mu),\quad \text{где}\quad \xi=\frac{x}{\mu^2},\quad \eta_*=\frac{b-y}{\mu^3},\quad \zeta=\frac{x}{\mu^3}.$$

Слагаемое $\overset{(21)}{P}$ ищется в виде ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\overset{(21)}{P_k}(\xi,\eta_*)$ и определяется из задачи

$$\frac{\partial^2 \overset{(21)}{P}}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2 \overset{(21)}{P}}{\partial\eta_*^2}+\frac{1}{\mu^2}A(\mu^2\xi,b-\mu^3\eta_*)\frac{\partial \overset{(21)}{P}}{\partial\eta_*}=\overset{(21)}{P}F,\quad \xi\ge 0,\quad \eta_*\ge 0,$$

$$\overset{(21)}{P}(\xi,0,\mu)=-\overset{(2)}{\Pi}(\xi,b,\mu),\quad \overset{(21)}{P}(\xi,\infty,\mu)=0,$$

где

$$\overset{(21)}{P}F=\Bigg(F(\bar u(x,y,\mu)+\overset{(2)}{\Pi}(\xi,y,\mu)+\overset{(3)}{\Pi}(x,\eta_*,\mu)+\overset{(21)}{P}(\xi,\eta_*,\mu),x,y,\mu^2)-$$

$$-\overset{(2)}{\Pi}F-\overset{(3)}{\Pi}F-\bar F\Bigg)\Bigg|_{x=\mu^2\xi,\ y=b-\mu^3\eta_*}.$$

Для функций $\overset{(21)}{P_k}(\xi,\eta_*)$, $k\ge 0$, получаются обыкновенные дифференциальные уравнения (переменная ξ играет роль параметра, $\xi\ge 0$)

$$\frac{\partial^2 \overset{(21)}{P_k}}{\partial\eta_*^2}+A(0,b)\frac{\partial \overset{(21)}{P_k}}{\partial\eta_*}=\overset{(21)}{p_k}(\xi,\eta_*),\quad \eta_*\ge 0, \tag{66}$$

с граничными условиями

$$\overset{(21)}{P_k}(\xi,0)=-\overset{(2)}{\Pi}_k(\xi,b),\quad \overset{(21)}{P_k}(\xi,\infty)=0. \tag{67}$$

При этом оказывается, что $\overset{(21)}{p_0} = \overset{(21)}{p_1} = 0$, а $\overset{(21)}{p_k}(\xi, \eta_*)$ при $k \geq 2$ имеют экспоненциальные оценки типа (37), если таким же оценкам удовлетворяют функции $\overset{(21)}{P_i}$ с номерами $i < k$. Решения задач (66), (67) выписываются в явном виде и имеют экспоненциальные оценки типа (37).

Функции $\overset{(21)}{P_k}$ вносят невязки в граничное условие на стороне $y = b$. Эти невязки и также невязки, внесенные функциями $\overset{(3)}{\Pi_k}(x, \eta_*)$, призвана устранить угловая погранфункция $\overset{(22)}{P}(\zeta, \eta_*, \mu)$. Она ищется в виде ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \overset{(22)}{P_k}(\zeta, \eta_*)$$

и определяется из задачи

$$\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2 \overset{(22)}{P}}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2 \overset{(22)}{P}}{\partial \eta_*^2} + \frac{1}{\mu^2} A(\mu^3\zeta, b - \mu^3\eta_*)\frac{\partial \overset{(22)}{P}}{\partial \eta_*} = \overset{(22)}{P} F, \quad \zeta \geq 0, \quad \eta_* \geq 0,$$

$$\overset{(22)}{P}(\zeta, 0, \mu) = 0, \quad \overset{(22)}{P}(0, \eta_*, \mu) = -\overset{(3)}{\Pi}(0, \eta_*, \mu) - \overset{(21)}{P}(0, \eta_*, \mu),$$

$$\overset{(22)}{P}(\zeta, \eta_*, \mu) \to 0 \quad \text{при} \quad (\zeta + \eta_*) \to \infty,$$

где

$$\overset{(22)}{P} F =$$

$$= \Bigg(F(\bar{u}(x, y, \mu) + \overset{(2)}{\Pi}(\xi, y, \mu) + \overset{(3)}{\Pi}(x, \eta_*, \mu) + \overset{(21)}{P}(\xi, \eta_*, \mu) + \overset{(22)}{P}(\zeta, \eta_*, \mu), x, y, \mu^2) -$$

$$- F(\bar{u}(x, y, \mu) + \overset{(2)}{\Pi}(\xi, y, \mu) + \overset{(3)}{\Pi}(x, \eta_*, \mu) + \overset{(21)}{P}(\xi, \eta_*, \mu), x, y, \mu^2) \Bigg) \Bigg|_{x = \mu^3\zeta,\ y = b - \mu^3\eta_*,\ \xi = \mu\zeta}.$$

Для функций $\overset{(22)}{P_k}(\zeta, \eta_*)$, $k \geq 0$, получаются линейные эллиптические задачи

$$\frac{\partial^2 \overset{(22)}{P_k}}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \overset{(22)}{P_k}}{\partial \eta_*^2} + A(0, b)\frac{\partial \overset{(22)}{P_k}}{\partial \eta_*} = \overset{(22)}{p_k}(\zeta, \eta_*), \quad \zeta \geq 0, \quad \eta_* \geq 0,$$

$$\overset{(22)}{P_k}(\zeta, 0) = 0, \quad \overset{(22)}{P_k}(0, \eta_*) = -\overset{(3)}{\Pi_k}(0, \eta_*) - \overset{(21)}{P_k}(0, \eta_*),$$

$$\overset{(22)}{P_k}(\zeta, \eta_*) \to 0 \quad \text{при} \quad (\zeta + \eta_*) \to \infty,$$

причем оказывается, что $\overset{(22)}{p_0} = \overset{(22)}{p_1} = 0$, а $\overset{(22)}{p_k}(\xi, \eta_*)$ при $k \geq 2$ имеют экспоненциальные оценки типа (37), если таким же оценкам удовлетворяют функции $\overset{(22)}{P_i}$ с номерами $i < k$. Решения этих задач выписываются в явном виде (см. [3]) и имеют экспоненциальные оценки типа (37).

Угловая погранслойная часть асимптотики в окрестности точки (a,b) также состоит из двух типов пограничных функций:

$$\overset{(3)}{P} = \overset{(31)}{P}(\xi_*, \eta_*, \mu) + \overset{(32)}{P}(\zeta_*, \eta_*, \mu),$$

где

$$\xi_* = \frac{a-x}{\mu^2}, \quad \zeta_* = \frac{a-x}{\mu^3}, \quad \eta_* = \frac{b-y}{\mu^3}.$$

Эти функции определяются аналогично функциям $\overset{(21)}{P}$ и $\overset{(22)}{P}$.

Таким образом, при $\alpha = 1/2$ удается построить только нулевое и первое равномерные в $\bar\Omega$ приближения для решения задачи (12), (2) . Аналогично обстоит дело и при любом другом рациональном $\alpha = \gamma/\beta \in (0,1)$. Сформулируем **основной результат**.

Теорема 2. *Если выполнены условия* I – VII, *то для достаточно малых* ε *задача* (12), (2) при рациональном $\alpha = \gamma/\beta \in (0,1)$ *имеет решение* $u(x,y,\varepsilon)$, *для которого функция*

$$U_1 = \sum_{k=0}^{1} \varepsilon^{k/\beta} \left(\bar u_k + \overset{(1)}{\Pi}_k + \overset{(2)}{\Pi}_k + \overset{(3)}{\Pi}_k + \overset{(4)}{\Pi}_k + \overset{(1)}{P}_k + \overset{(21)}{P}_k + \overset{(22)}{P}_k + \overset{(31)}{P}_k + \overset{(32)}{P}_k + \overset{(4)}{P}_k \right)$$

является равномерным асимптотическим приближением в замкнутом прямоугольнике $\bar\Omega$ *с точностью порядка* $O(\varepsilon^{2/\beta})$, *то есть*

$$\max_{\bar\Omega} |u - U_1| \le C\,\varepsilon^{2/\beta}.$$

Как отмечалось выше, угловые пограничные функции $\overset{(1)}{P}_0(\xi,\eta)$ и $\overset{(1)}{P}_1(\xi,\eta)$ имеют, вообще говоря, неограниченные в окрестности вершины $(0,0)$ вторые производные по η. Эти вторые производные входят в правые части уравнений соответственно для $\overset{(1)}{P}_2$ и $\overset{(1)}{P}_3$. В свою очередь, вторые производные по η функций $\overset{(1)}{P}_2$ и $\overset{(1)}{P}_3$, имеющие еще больший порядок особенности в точке $(0,0)$, войдут в правые части уравнений для следующих членов асимптотики, так что порядок особенности будет расти с ростом номера $\overset{(1)}{P}_k$- функций. Аналогично обстоит дело и с угловыми пограничными функциями $\overset{(4)}{P}_k(\xi_*,\eta)$ в окрестности вершины $(a,0)$. Поэтому равномерное в $\bar\Omega$ асимптотическое приближение решения удается получить с помощью описанного метода только с точностью порядка $O(\varepsilon^{2/\beta})$. Если исключить сколь угодно малые, но фиксированные при $\varepsilon \to 0$ окрестности вершин $(0,0)$ и $(a,0)$, то в оставшейся части прямоугольника $\bar\Omega$ n-я частичная сумма построенного разложения дает приближение к решению с точностью порядка $O(\varepsilon^{(n+1)/\beta})$.

3. Случай $\alpha = 1$

При $\alpha = 1$ погранслойную часть асимптотики можно построить аналогично случаю уравнения (7), но погранслойные операторы несколько изменятся. В частности, в окрестности стороны $y = 0$, $0 \le x \le a$ погранслойная часть асимптотики

$$\overset{(1)}{\Pi}(x,\eta,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \overset{(1)}{\Pi}_k(x,\eta), \quad \eta = \frac{y}{\varepsilon},$$

определяется из уравнения

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \overset{(1)}{\Pi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overset{(1)}{\Pi}}{\partial \eta^2} - A(x, \varepsilon\eta) \frac{\partial \overset{(1)}{\Pi}}{\partial \eta} = \overset{(1)}{\Pi} F.$$

Поэтому уравнения для $\overset{(1)}{\Pi}_k (x, \eta)$ будут содержать слагаемые

$$-A(x,0) \frac{\partial \overset{(1)}{\Pi}_k}{\partial \eta}.$$

Чтобы существовало решение задачи для $\overset{(1)}{\Pi}_0 (x, \eta)$, имеющей экспоненциальную оценку, нужно потребовать выполнения условия, аналогичного условию IV. Соответственно изменятся в сравнении с (34) уравнения для угловых пограничных функций $\overset{(1)}{P}_k (\xi, \eta)$. Это будут эллиптические уравнения, содержащие слагаемые

$$-A(0,0) \frac{\partial \overset{(1)}{P}_k}{\partial \eta}.$$

Однако характер поведения погранфункций и всей асимптотики не изменится.

Список литературы

1. Бутузов В.Ф. Асимптотика решения уравнения $\mu^2 \Delta u - k^2(x,y)u = f(x,y)$ в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 9. С. 1654 – 1660. (English transl.: Butuzov V.F. The asymptotic properties of solutions of the equation $\mu^2 \Delta u - k^2(x,y)u = f(x,y)$ in a rectangle // Differential Equations. 1973. V. 9, No. 9. P. 1274.)

2. Бутузов В.Ф. Об асимптотике решений сингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 6. С. 1030 – 1041. (English transl.: Butuzov V.F. On asymptotics of solutions of singularly perturbed equations of elliptic type in the rectangle // Differential Equations. 1975. V. 11, No. 6. P. 780.)

3. Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенное уравнение эллиптического типа с двумя малыми параметрами // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 10. С. 1793 – 1803. (English transl.: Butuzov V.F. A singularly perturbed elliptic equation with two small parameters // Differential Equations. 1976. V. 12, No. 10. P. 1261.)

4. Денисов И.В. Квазилинейные сингулярно возмущенные эллиптические уравнения в прямоугольнике // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т.35. № 11. С. 1666 – 1678. (English transl.: Denisov I.V. Quasilinear singularly perturbed elliptic equations in a rectangle // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1995. V. 35, No. 11. P. 1341 – 1350.)

5. Денисов И.В. Задача нахождения главного члена угловой части асимптотики решения сингулярно возмущенного эллиптического уравнения с нелинейностью // Ж. вычисл.

матем. и матем. физ. 1999. Т. 39. № 5. С. 779 – 791. (English transl.: Denisov I.V. The problem of finding the dominant term of the corner part of the asymptotics of the solution to a singularly perturbed elliptic equation with a nonlinearity // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1999. V. 39, No. 5. P. 747 – 759.)

6. Денисов И.В. Угловой погранслой в нелинейных сингулярно возмущенных эллиптических уравнениях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 3. С. 390 – 406. (English transl.: Denisov I.V. The corner boundary layer in nonlinear singularly perturbed elliptic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2001. V. 41, No. 3. P. 362 – 378.)

7. Денисов И.В. Угловой погранслой в немонотонных сингулярно возмущенных краевых задачах с нелинейностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44, № 9. С. 1674 – 1692. (English transl.: Denisov I.V. The corner boundary layer in nonmonotone singularly perturbed boundary value problems with nonlinearities // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2004. V. 44, No. 9. P. 1592 – 1610.)

8. Денисов И.В. Угловой погранслой в нелинейных сингулярно возмущенных эллиптических задачах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 1. С. 62 – 79. (English transl.: Denisov I.V. Corner boundary layer in nonlinear singularly perturbed elliptic problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2008. V. 48, No. 1. P. 59 – 75.)

9. Денисов И.В. О некоторых классах функций // Чебышевский сборник. Т. X. Вып. 2 (30). Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2009. С. 79 – 108. (Denisov I.V. O nekotoryh klassah funktsiy // Chebyshevskiy sbornik. T. X. V. 2 (30). Tula: Izd-vo Tul. gos. ped. univ. im. L.N Tolstoy, 2009. S. 79–108 [in Russian].)

10. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. (Vasilieva A.B., Butuzov V.F. Asimptoticheskie metody v teorii singulyarnyh vozmusheniy. Moskva: Vysshaya shkola, 1990 [in Russian].)

Corner Boundary Layer in Nonlinear Elliptic Problems Containing Derivatives of First Order

Butuzov V. F.*, Denisov I. V.**

* *M.V. Lomonosov Moscow State University*
Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia
** *L.N. Tolstoy Tula State Pedagogical University*
pr. Lenina, 125, Tula, 300026, Russia

Keywords: boundary layer, singularly perturbed equation, asymptotic expansion

In a rectangular domain the first boundary value problem is considered for a singularly perturbed elliptic equation

$$\varepsilon^2 \Delta u - \varepsilon^\alpha A(x,y) \frac{\partial u}{\partial y} = F(u,x,y,\varepsilon)$$

with a nonlinear on u function F. The complete asymptotic solution expansion uniform in a closed rectangle is constructed for $\alpha > 1$. If $0 < \alpha < 1$, the uniform asymptotic approximation is constructed in zero and first approximations. The features of the asymptotic behavior are noted in the case $\alpha = 1$.

Сведения об авторах:
Бутузов Валентин Федорович,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математики
Денисов Игорь Васильевич,
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого,
д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры алгебры, математического анализа и геометрии