Модел. и анализ информ. систем. Т. **21**, № **1** (2014) 32–44

УДК 517.926

Об одном механизме жесткого возбуждения колебаний в нелинейных флаттерных системах

Глызин С. Д.*, Колесов А. Ю.*, Розов Н. Х.**

**Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова*
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14
***Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*
119991 Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1

e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru, kolesov@uniyar.ac.ru, fpo.mgu@mail.ru

получена 20 января 2014

Ключевые слова: нелинейные флаттерные системы, параметрическое внешнее воздействие, жесткое возбуждение колебаний, инвариантный тор, хаос

Рассматриваются так называемые конечномерные флаттерные системы, т.е. системы обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающие при галеркинских аппроксимациях некоторых краевых задач теории аэроупругости, а также в ряде радиофизических приложений. Исследуется вопрос о малых параметрических колебаниях этих уравнений в случае резонанса 1 : 3. С помощью сочетания аналитических и численных методов устанавливается, что упомянутый резонанс может служить причиной жесткого возбуждения колебаний. А именно, показывается возможность появления у флаттерных систем наряду с устойчивым нулевым состоянием равновесия как устойчивых инвариантных торов любой конечной размерности, так и хаотических аттракторов.

1. Постановка проблемы

Задача о колебаниях и устойчивости пластины в сверхзвуковом потоке сжимаемого газа, т.е. так называемая задача панельного флаттера, является одной из классических проблем теории аэроупругости. Подробное изложение физических и математических аспектов данной проблемы, а также методов исследования соответствующих нелинейных краевых задач содержится в монографиях [1–6]. Упомянутые методы с некоторой долей условности можно разделить на точные и приближенные.

К точным методам относится абстрактный подход к задаче о панельном флаттере, реализованный Ю. С. Колесовым в книге [6]. Суть этого подхода состояла в том, что известная бифуркационная теорема Андронова–Хопфа была распространена на некоторый специальный класс абстрактных нелинейных эволюционных уравнений в банаховом пространстве, включающий в себя основные краевые задачи теории упругой устойчивости. Следует также упомянуть работу [7], где аналогичный круг вопросов рассматривался для краевых задач из теории пространственно одномерного панельного флаттера.

Наряду с точными методами широкое распространение получил так называемый приближенный, или конечномерный, подход к проблеме нелинейного панельного флаттера (см, например, монографию [1] и статью [8]). При этом подходе соответствующая краевая задача заменяется ее галеркинской аппроксимацией, представляющей собой некоторую нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Следуя работам [9, 10], такого рода уравнения будем называть конечномерными флаттерными системами.

В общем случае конечномерная флаттерная система имеет вид

$$\ddot{u} + \varepsilon\dot{u} + A(\mu)u = F(u, \dot{u}). \tag{1}$$

Здесь точка – дифференцирование по t; $u \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$; $\varepsilon > 0$ – параметр, характеризующий затухание и в дальнейшем предполагающийся малым; $A(\mu)$ – квадратная матрица размера $m \times m$, линейно зависящая от вспомогательного параметра $\mu \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$; вектор-функция $F(u, v)$ класса $C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ такова, что

$$F(0, 0) = 0, \qquad F'_u(0, 0) = F'_v(0, 0) = 0. \tag{2}$$

В аэродинамической интерпретации система (1) описывает флаттер двумерной панели в сверхзвуковом потоке сжимаемого газа и в этом случае ε – нормированное сопротивление потока, а параметр μ представляет собой нормированную скорость набегающего потока газа. В дальнейшем мы будем интересоваться колебаниями системы (1), возникающими в малой окрестности нуля при $0 < \varepsilon \ll 1$ и при малом периодическом изменении скорости μ. В связи с этим сначала остановимся на способе выбора данного параметра.

Условие 1. *Фиксируем некоторое $\mu_0 > 0$ и предположим, что при $\mu = \mu_0$ спектр матрицы $A_0 = A(\mu_0)$ состоит из простых положительных собственных значений λ_k, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.*

Приведенное ограничение означает, что $\mu = \mu_0$ является докритическим значением скорости потока, при котором нулевое решение системы (1) экспоненциально устойчиво. Действительно, за устойчивость нуля отвечает расположение спектра квадратичного пучка матриц $\lambda^2 I + \varepsilon\lambda I + A_0$, где I – единичная матрица. В силу условия 1 собственные значения этого пучка являются корнями уравнений $\lambda^2 + \varepsilon\lambda + \lambda_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, а значит, заведомо лежат в левой комплексной полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$. В случае же $\varepsilon = 0$ упомянутые корни обращаются в $\lambda = \pm i\omega_k$, $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$, $0 \leq k \leq m-1$, а уравнение

$$\ddot{u} + A_0 u = 0, \tag{3}$$

получающееся из (1) при $\varepsilon = 0$, $\mu = \mu_0$ и при отбрасывании нелинейности F, допускает периодические решения (автоколебательные моды)

$$u = \exp(\pm i\omega_k t)e_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{4}$$

Здесь e_k – собственные векторы матрицы A_0, отвечающие собственным значениям λ_k.

Перечисленные факты свидетельствуют о том, что при $\mu = \mu_0$ уравнение (1) представляет собой недовозбужденную автоколебательную систему. Согласно классической теории параметрического резонанса [11–13] нулевое состояние равновесия в такой системе может стать неустойчивым за счет малого периодического изменения параметра μ (в окрестности значения $\mu = \mu_0$) с частотой, близкой к удвоенной частоте одной из автоколебательных мод (4). Однако в данной статье нас будет интересовать случай, когда устойчивые параметрические колебания в системе (1) возникают жестко, т.е. сосуществуют с устойчивым нулевым решением. В связи с этим обратимся к неосновному параметрическому резонансу 1 : 3, а именно предположим, что выполнено следующее ограничение.

Условие 2. *Считаем, что параметр μ в (1) меняется с течением времени по закону*

$$\mu = \mu_0(1 + \sqrt{\varepsilon}\,\alpha\cos 3\varphi), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0(1 + \varepsilon\delta), \tag{5}$$

где $\alpha = \mathrm{const} > 0$, $\delta = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$.

Заключительное ограничение характеризует некоторую общность положения и гарантирует отсутствие так называемых сильных резонансов между собственными частотами ω_k, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Условие 3. *Предполагаем, что*

$$\omega_k \neq r_0\omega_0 + r_1\omega_1 + \ldots + r_{m-1}\omega_{m-1}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{6}$$

для любого целочисленного вектора $(r_0, r_1, \ldots, r_{m-1})$: $2 \leq |r_0| + |r_1| + \ldots + |r_{m-1}| \leq 3$. Считаем также, что

$$(3\omega_0 \pm \omega_k)^2 \neq \omega_s^2, \quad (4\omega_0 \pm \omega_k)^2 \neq \omega_s^2, \quad (6\omega_0 \pm \omega_k)^2 \neq \omega_s^2 \quad \forall\, k, s = 0, 1, \ldots, m-1; \tag{7}$$

$$4\omega_0 \neq \omega_s, \quad 5\omega_0 \neq \omega_s, \quad 7\omega_0 \neq \omega_s, \quad s = 1, \ldots, m-1; \tag{8}$$

$$\begin{gathered} (3\omega_0 + \omega_{k_1} + \omega_{k_2})^2 \neq \omega_s^2, \quad (3\omega_0 - \omega_{k_1} + \omega_{k_2})^2 \neq \omega_s^2, \\ (3\omega_0 + \omega_{k_1} - \omega_{k_2})^2 \neq \omega_s^2, \quad (3\omega_0 - \omega_{k_1} - \omega_{k_2})^2 \neq \omega_s^2 \end{gathered} \tag{9}$$

при всех $k_1, k_2 = 1, \ldots, m-1$ и $s = 0, 1, \ldots, m-1$.

При условиях 1 – 3 система (1), (5) преобразуется к виду

$$\ddot{u} + \varepsilon\dot{u} + (A_0 + \sqrt{\varepsilon}\,A_1\cos 3\varphi)u = F(u, \dot{u}), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0(1 + \varepsilon\delta), \tag{10}$$

где $A_1 = \alpha\mu_0 A'_\mu(\mu_0)$, а нелинейность $F(u, v)$ в силу свойств (2) допускает в нуле тейлоровское разложение

$$\begin{gathered} F(u, v) = F_{21}(u, u) + F_{22}(u, v) + F_{23}(v, v) + F_{31}(u, u, u) + F_{32}(u, u, v) + \\ + F_{33}(u, v, v) + F_{34}(v, v, v) + \ldots \end{gathered} \tag{11}$$

(здесь, как обычно, через F_{2j} и F_{3j} обозначены квадратичные и кубические формы со значениями в $\mathbb{R}^m$).

В дальнейшем будем интересоваться вопросом о существовании и устойчивости у системы (10) автоколебательных режимов, расположенных в асимптотически малой (порядка $\sqrt{\varepsilon}$) окрестности "нулевого цикла" $(u, \dot{u}, \varphi) = (0, 0, \varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

2. Основной результат

Обыгрывая факт существования у системы (3) периодических решений (4), асимптотику возможных автоколебательных процессов системы (10) будем искать в виде ряда по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0(\varphi, t, \tau) + \varepsilon\, u_1(\varphi, t, \tau) + \varepsilon^{3/2} u_2(\varphi, t, \tau) + \dots, \tag{12}$$

где $\tau = \varepsilon t$,

$$\begin{gathered} u_0 = \left[\xi_0(\tau)\exp(i\varphi) + \overline{\xi}_0(\tau)\exp(-i\varphi)\right]e_0 + \\ + \sum_{k=1}^{m-1}\left[\xi_k(\tau)\exp(i\omega_k t) + \overline{\xi}_k(\tau)\exp(-i\omega_k t)\right]e_k, \end{gathered} \tag{13}$$

$\xi_k(\tau)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ – пока произвольные (подлежащие определению в последующем) комплексные амплитуды, а функции $u_s(\varphi, t, \tau)$, $s = 1, 2$ – некоторые тригонометрические полиномы переменных φ, $\omega_k t$, $k = 1, \dots, m-1$ с коэффициентами, зависящими от медленного времени τ.

Для отыскания функций $u_s(\varphi, t, \tau)$, $s = 1, 2$ подставим в (10) соотношения (12), (13) вместе с тейлоровским разложением (11) и будем последовательно приравнивать коэффициенты при ε и $\varepsilon^{3/2}$ в левой и правой частях получившегося выражения. В результате приходим к линейным неоднородным уравнениям вида

$$\left(\omega_0^2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + 2\omega_0\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_s + A_0 u_s = \gamma_s(\varphi, t, \tau), \quad s = 1, 2, \tag{14}$$

в которых переменная τ рассматривается как параметр.

При $s = 1$ неоднородность в (14) задается равенством

$$\begin{gathered} \gamma_1(\varphi, t, \tau) = -A_1 u_0 \cos 3\varphi + \\ + F_{21}(u_0, u_0) + F_{22}\left(u_0, \omega_0\frac{\partial u_0}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_0}{\partial t}\right) + F_{23}\left(\omega_0\frac{\partial u_0}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_0}{\partial t}, \omega_0\frac{\partial u_0}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_0}{\partial t}\right), \end{gathered}$$

а значит, имеет вид

$$\begin{gathered} \gamma_1 = -\frac{1}{2}A_1 e_0\left[\xi_0(\exp(4i\varphi) + \exp(-2i\varphi)) + \text{к.с.}\right] - \\ -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1} A_1 e_k\left[\xi_k(\exp(i\omega_k t + 3i\varphi) + \exp(i\omega_k t - 3i\varphi)) + \text{к.с.}\right] + \\ + \sum \gamma^1_{(r_0, r_1, \dots, r_{m-1})}(\tau)\exp\left[i(r_0\varphi + r_1\omega_1 t + \dots + r_{m-1}\omega_{m-1} t)\right], \end{gathered} \tag{15}$$

где в последнем слагаемом (зависящем только от квадратичных членов тейлоровского разложения (11)) суммирование ведется по всем целочисленным векторам $(r_0, r_1, \dots, r_{m-1}) : |r_0| + |r_1| + \dots + |r_{m-1}| = 0, 2$. Что же касается функции u_1, то ее будем искать в виде аналогичной (15) суммы

$$\begin{gathered} u_1 = \\ = w_{0,2}(\tau)\exp(2i\varphi) + \overline{w}_{0,2}(\tau)\exp(-2i\varphi) + w_{0,4}(\tau)\exp(4i\varphi) + \overline{w}_{0,4}(\tau)\exp(-4i\varphi) + \\ + \sum_{k=1}^{m-1}\left(w_k^+(\tau)\exp(i\omega_k t + 3i\varphi) + w_k^-(\tau)\exp(i\omega_k t - 3i\varphi) + \text{к.с.}\right) + \\ + \sum w^1_{(r_0, r_1, \dots, r_{m-1})}(\tau)\exp\left[i(r_0\varphi + r_1\omega_1 t + \dots + r_{m-1}\omega_{m-1} t)\right]. \end{gathered} \tag{16}$$

В результате для входящих в (16) коэффициентов приходим к линейным неоднородным уравнениям

$$
\begin{gathered}
(A_0 - 4\omega_0^2 I)w_{0,2} = -\frac{1}{2}A_1 e_0\,\overline{\xi}_0, \quad (A_0 - 16\omega_0^2 I)w_{0,4} = -\frac{1}{2}A_1 e_0\,\xi_0, \\
(A_0 - (\omega_k \pm 3\omega_0)^2 I)w_k^{\pm} = -\frac{1}{2}A_1 e_k\,\xi_k, \quad k = 1,\dots,m-1, \\
\big(A_0 - (r_0\omega_0 + r_1\omega_1 + \ldots + r_{m-1}\omega_{m-1})^2 I\big)w^1_{(r_0,r_1,\dots,r_{m-1})} = \gamma^1_{(r_0,r_1,\dots,r_{m-1})},
\end{gathered}
\tag{17}
$$

каждое из которых однозначно разрешимо в силу соответствующих условий нерезонансности (6) – (8).

При $s = 2$ имеет место равенство

$$
\begin{gathered}
\gamma_2 = \\
= F_{31}(u_0,u_0,u_0) + F_{32}\left(u_0,u_0,\omega_0\frac{\partial u_0}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_0}{\partial t}\right) + F_{33}\left(u_0,\omega_0\frac{\partial u_0}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_0}{\partial t},\omega_0\frac{\partial u_0}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_0}{\partial t}\right) + \\
+F_{34}\left(\omega_0\frac{\partial u_0}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_0}{\partial t},\omega_0\frac{\partial u_0}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_0}{\partial t},\omega_0\frac{\partial u_0}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_0}{\partial t}\right) + 2F_{21}(u_0,u_1) + \\
+F_{22}\left(u_0,\omega_0\frac{\partial u_1}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) + F_{22}\left(u_1,\omega_0\frac{\partial u_0}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_0}{\partial t}\right) + \\
+2F_{23}\left(\omega_0\frac{\partial u_0}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_0}{\partial t},\omega_0\frac{\partial u_1}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) - 2\delta\omega_0^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial\varphi^2} - 2\omega_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial\varphi\partial\tau} - 2\frac{\partial^2 u_0}{\partial t\partial\tau} - \\
-\omega_0\frac{\partial u_0}{\partial\varphi} - \frac{\partial u_0}{\partial t} - A_1 u_1\cos 3\varphi,
\end{gathered}
$$

которое в совокупности с формулами (13), (16) означает, что γ_2 – линейная комбинация гармоник

$$
\exp(\pm i\varphi), \quad \exp(\pm i\omega_k t), \quad k = 1,\dots,m-1; \tag{18}
$$

$$
\exp\big[i(r_0\varphi + r_1\omega_1 t + \ldots + r_{m-1}\omega_{m-1}t)\big], \quad |r_0| + |r_1| + \ldots + |r_{m-1}| = 3; \tag{19}
$$

$$
\begin{gathered}
\exp(\pm 3i\varphi \pm i\omega_{k_1}t \pm i\omega_{k_2}t), \quad \exp(\pm 4i\varphi \pm i\omega_k t), \quad \exp(\pm 6i\varphi \pm i\omega_k t), \\
\exp(\pm 5i\varphi), \quad \exp(\pm 7i\varphi), \quad k_1,k_2,k = 1,\dots,m-1
\end{gathered}
\tag{20}
$$

(при всевозможных сочетаниях знаков "+" и "−" в (20)). В том же виде ищем и функцию $u_2(\varphi,t,\tau)$. На этом пути для ее коэффициентов при гармониках (19), (20) получаем аналогичные (17) линейные неоднородные уравнения, однозначную разрешимость которых обеспечивают условия (6) – (9).

Новые моменты возникают в процессе нахождения коэффициентов w_0^2 и w_k^2, $k = 1,\dots,m-1$ функции u_2 при гармониках $\exp(i\varphi)$ и $\exp(i\omega_k t)$, $k = 1,\dots,m-1$ соответственно (см. (18)). Для указанных коэффициентов получаются линейные неоднородные уравнения

$$
(A_0 - \omega_k^2 I)w_k^2 = \gamma_k^2, \quad k = 0,1,\dots,m-1, \tag{21}
$$

где γ_k^2 – коэффициенты при аналогичных гармониках функции γ_2. Напомним, далее, что в силу условия 1 матрица A_0 имеет простые собственные значения $\lambda = \omega_k^2$,

$k = 0, 1, \ldots, m-1$. А отсюда, в свою очередь, следует, что уравнения (21) разрешимы в том и только в том случае, когда

$$(\gamma_k^2, g_k) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{22}$$

Здесь $(*, *)$ – евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$, а g_k – собственные векторы матрицы A_0^*, отвечающие собственным значениям $\lambda = \omega_k^2$ и нормированные условиями $(e_k, g_k) = 1$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Будем рассматривать условия (22) как уравнения для определения имеющихся в запасе комплексных амплитуд $\xi_k(\tau)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$ (см. (13)). Проводя соответствующий подсчет, убеждаемся, что эти уравнения записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_0}{d\tau} &= \left(-\frac{1}{2} + i\sigma_0\right)\xi_0 + \varkappa\,(\bar{\xi}_0)^2 + \xi_0 \sum_{j=0}^{m-1} d_{0,j}|\xi_j|^2, \\ \frac{d\xi_k}{d\tau} &= \left(-\frac{1}{2} + i\sigma_k\right)\xi_k + \xi_k \sum_{j=0}^{m-1} d_{k,j}|\xi_j|^2, \quad k = 1, \ldots, m-1. \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь $\sigma_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, постоянная $\varkappa \in \mathbb{C}$ зависит только от квадратичных слагаемых разложения (11) и обращается в нуль при их отсутствии, а $d_{k,j}$, $k, j = 0, 1, \ldots, m-1$ – некоторые комплексные постоянные (ляпуновские величины), зависящие от всех выписанных слагаемых из (11). В дополнение к условиям 1 – 3 всюду ниже предполагаем, что $\varkappa \neq 0$.

Для придания изложенным выше построениям необходимой строгости сформулируем два определения.

Определение 1. *Фиксируем произвольно натуральное p, $p \leq m-1$ и набор номеров $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_p \leq m-1$. Решение системы* (23) *вида*

$$\xi_0 = \xi_0^0, \;\; \xi_{n_j} = \xi_j^0 \exp(i\delta_j\tau), \;\; \xi_k = 0 \;\; \text{при} \;\; k \neq n_j, \;\; j = 1, \ldots, p, \tag{24}$$

где $\xi_j^0 \in \mathbb{C}$, $\xi_j^0 \neq 0$, $j \geq 0$ и $\delta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, p$ – некоторые постоянные, назовем автомодельным тором первого рода.

Определение 2. *Решение системы* (23) *вида*

$$\xi_0 = \xi_0^0(\tau), \;\; \xi_{n_j} = \xi_j^0(\tau) \exp(i\delta_j\tau), \;\; \xi_k = 0 \;\; \text{при} \;\; k \neq n_j, \;\; j = 1, \ldots, p, \tag{25}$$

где $\xi_j^0(\tau) \neq 0$, $j = 0, 1, \ldots, p$ – некоторые комплекснозначные периодические функции периода $T_0 > 0$, δ_j – вещественные постоянные, будем называть автомодельным тором второго рода. Предполагаем, естественно, что решение (25) *не приводится к виду* (24).

Из общих результатов монографии [14] вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть система* (23) *имеет автомодельный тор первого рода* (24), *экспоненциально орбитально устойчивый или дихотомичный. Тогда по любому натуральному l можно указать такое достаточно малое $\varepsilon_l > 0$, что при всех*

$0 < \varepsilon \le \varepsilon_l$ исходная система (10) имеет $(p+1)$-мерный инвариантный тор той же устойчивости, задающийся равенствами

$$u = \sqrt{\varepsilon}\left(\xi_0^0 \exp(i\varphi)e_0 + \sum_{j=1}^{p} \xi_j^0 \exp(i\theta_j)e_{n_j} + \text{к.с.}\right) + \varepsilon u_*(\varphi, \theta, \varepsilon), \tag{26}$$

$$\frac{d\theta_j}{dt} = \omega_{n_j} + \varepsilon\delta_j + \varepsilon^{3/2}\Delta_j(\varphi, \theta, \varepsilon), \;\; j = 1, \dots, p, \;\; \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0(1 + \varepsilon\delta). \tag{27}$$

Здесь 2π-периодические по φ, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ функции u_*, Δ_j, $j = 1, \dots, p$ и их всевозможные частные производные по φ, θ до порядка l включительно непрерывны и ограничены на множестве $(\varepsilon, \varphi, \theta) \in (0, \varepsilon_l] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$.

В дополнение к сформулированной теореме заметим, что аналогичное утверждение о соответствии справедливо и для автомодельного тора вида (25) системы (23), являющегося экспоненциально орбитально устойчивым или дихотомичным. А именно, каждому такому тору при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ в исходной системе (10) отвечает $(p+2)$-мерный инвариантный тор с теми же свойствами устойчивости. Для этого тора справедливо аналогичное (26), (27) параметрическое представление

$$u = \sqrt{\varepsilon}\left(\xi_0^0(\tau) \exp(i\varphi)e_0 + \sum_{j=1}^{p} \xi_j^0(\tau) \exp(i\theta_j)e_{n_j} + \text{к.с.}\right) + \varepsilon u_*(\varphi, \theta, \tau, \varepsilon),$$

$$\frac{d\theta_j}{dt} = \omega_{n_j} + \varepsilon\delta_j + \varepsilon^{3/2}\Delta_j(\varphi, \theta, \tau, \varepsilon), \;\; j = 1, \dots, p, \;\; \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0(1 + \varepsilon\delta),$$
$$\frac{d\tau}{dt} = \varepsilon + \varepsilon^{3/2}\Delta(\varphi, \theta, \tau, \varepsilon),$$

где функции u_*, Δ_j, Δ периодически (с периодом T_0) зависят от дополнительной фазовой переменной τ, а также непрерывны и ограничены по $(\varphi, \theta, \tau, \varepsilon)$ вместе с любым фиксированным числом своих производных по (φ, θ, τ).

3. О реализуемости условий теоремы 1

Для удобства последующего анализа положим в системе (23)

$$\varkappa = \nu \exp(i\gamma_0), \quad \nu > 0, \quad \gamma_0 \in \mathbb{R}$$

и выполним замены $\xi_0 = \sqrt{\eta_0}\exp\big(i(\theta_0 + \gamma_0/3)\big)$, $\xi_k = \sqrt{\eta_k}\exp(i\theta_k)$, $k = 1, \dots, m-1$, где $\eta_k \ge 0$, $\theta_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. В результате получаем систему для переменных η_k, θ_k, от которой, как нетрудно увидеть, отщепляется система для $\psi = 3\theta_0$ и η_k, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Упомянутая система имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{d\psi}{d\tau} = \sigma - 3\nu\sqrt{\eta_0}\sin\psi + \sum_{j=0}^{m-1} a_j\eta_j, \;\; \frac{d\eta_0}{d\tau} = \eta_0\left(-1 + 2\nu\sqrt{\eta_0}\cos\psi + \sum_{j=0}^{m-1} b_{0,j}\eta_j\right), \\ \frac{d\eta_k}{d\tau} = \eta_k\left(-1 + \sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j}\eta_j\right), \;\; k = 1, \dots, m-1,\end{gathered} \tag{28}$$

где $\sigma = 3\sigma_0$, $a_j = 3\,\mathrm{Im}\, d_{0,j}$, $b_{k,j} = 2\,\mathrm{Re}\, d_{k,j}$, $k, j = 0, 1, \ldots, m-1$. Ясно также, что любому автомодельному тору (24) в системе (28) отвечает состояние равновесия, а тору (25) – нетривиальное (отличное от константы) периодическое движение. Верно и обратное соответствие. Таким образом, отыскание инвариантных торов исходной системы (10), расположенных в $\sqrt{\varepsilon}$-окрестности нулевого цикла, сводится в конечном итоге к анализу системы (28).

Теорема 2. *При подходящем выборе нелинейности $F(u,v)$ и матрицы A_1 система* (10) *может иметь экспоненциально орбитально устойчивый инвариантный тор вида* (26), (27) *любой наперед заданной размерности s, $s \le m$.*

Доказательство. Из общих соображений ясно, что за счет выбора вектор-функции $F(u,v)$ и матрицы A_1 можно реализовать в системе (23) любые значения коэффициентов $\varkappa$, $d_{k,j}$, $k, j = 0, 1, \ldots, m-1$. Однако для наших целей достаточно предположить, что

$$\omega_0 < \omega_1 < \ldots < \omega_{m-1}, \quad A_1 = \alpha B, \quad Be_0 = e_0, \quad Be_k = 0, \quad k = 1, \ldots, m-1, \tag{29}$$

$$F(u,v) = \frac{\beta}{2}\,(u, g_0)^2 A_0^{-1}(v - (v, g_0)e_0) - u\sum_{j=0}^{m-1}(u, g_j)(v, g_j) + (u, g_0)^2 e_0, \tag{30}$$

где $\alpha, \beta > 0$.

Несложный подсчет показывает, что при условиях (29), (30) фигурирующая в (12) функция $u_1(\varphi, t, \tau)$ задается равенством

$$u_1 = \Big[C_0 + C_1\exp(2i\varphi) + \overline{C}_1\exp(-2i\varphi) + C_2\exp(4i\varphi) + \overline{C}_2\exp(-4i\varphi)\Big]e_0, \tag{31}$$

где

$$C_0 = \frac{2}{\omega_0^2}\,|\xi_0|^2, \quad C_1 = -\frac{1}{3\omega_0^2}\,\left(\xi_0^2 - \frac{\alpha}{2}\,\overline{\xi}_0\right), \quad C_2 = \frac{\alpha}{30\omega_0^2}\,\xi_0. \tag{32}$$

Опираясь, далее, на соотношения (29) – (32) и анализируя условия (22), приходим к выводу, что в данном случае система (23) имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi_0}{d\tau} &= \left(-\frac{1}{2} + i\sigma_0\right)\xi_0 - \frac{i\alpha}{4\omega_0^3}\,(\overline{\xi}_0)^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{5i}{3\omega_0^3}\right)|\xi_0|^2\xi_0,\\
\frac{d\xi_k}{d\tau} &= -\frac{1}{2}\,\xi_k + \xi_k\left(\frac{\beta}{2\omega_k^2}\,|\xi_0|^2 - \frac{1}{2}\,|\xi_k|^2\right)\xi_k, \quad k = 1, \ldots, m-1,
\end{aligned}$$

где $\sigma_0 = -\delta\omega_0 + \alpha^2/(20\omega_0^3)$, а система (28) записывается в виде

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \sigma - 3\nu\sqrt{\eta_0}\sin\psi - \frac{5}{\omega_0^3}\,\eta_0, \quad \frac{d\eta_0}{d\tau} = \eta_0(-1 + 2\nu\sqrt{\eta_0}\cos\psi - \eta_0), \tag{33}$$

$$\frac{d\eta_k}{d\tau} = \eta_k(-1 + \beta\eta_0/\omega_k^2 - \eta_k), \quad k = 1, \ldots, m-1. \tag{34}$$

Обратимся сначала к подсистеме (33) и заметим, что при всех $\nu > \nu_*$, где

$$\nu_*^2 = \frac{1}{2} - \frac{10\sigma}{9\omega_0^3} + \sqrt{\left(1 + \frac{100}{9\omega_0^6}\right)\left(\frac{1}{9}\,\sigma^2 + \frac{1}{4}\right)} > 0,$$

она допускает экспоненциально устойчивое состояние равновесия

$$(\psi_0(\nu),\eta_0^0(\nu)):\quad \psi_0(\nu)=\arcsin\left(\frac{\omega_0^3\sigma-5\eta_0^0(\nu)}{3\omega_0^3\nu\sqrt{\eta_0^0(\nu)}}\right),\quad \left(\frac{1}{2}+\frac{50}{9\omega_0^6}\right)\eta_0^0(\nu)=$$
$$=\nu^2-\frac{1}{2}+\frac{10\sigma}{9\omega_0^3}+\sqrt{\left(\nu^2-\frac{1}{2}+\frac{10\sigma}{9\omega_0^3}\right)^2-\left(1+\frac{100}{9\omega_0^6}\right)\left(\frac{1}{9}\,\sigma^2+\frac{1}{4}\right)}>0. \qquad (35)$$

Что же касается полной системы (33), (34), то ее исследование проведем при дополнительном ограничении

$$\frac{\beta}{\omega_1}\,\eta_0^0(\nu)\Big|_{\nu=\nu_*}<1 \qquad (36)$$

на параметр β.

Неравенство (36) и условия на частоты ω_k (см. (29)) гарантируют существование у каждого из уравнений

$$\frac{\beta}{\omega_k}\,\eta_0^0(\nu)=1,\quad k=1,\ldots,m-1 \qquad (37)$$

на полуоси $\nu>\nu_*$ единственного корня $\nu=\nu_k$, причем $\nu_1<\nu_2<\ldots<\nu_{m-1}$. А отсюда, в свою очередь, следует, что в системе (33), (34) состояние равновесия (35) "достраивается" до состояний равновесия O_s, $s=0,1,\ldots,m-1$ с компонентами $\psi=\psi_0(\nu)$, $\eta_0=\eta_0^0(\nu)$, $\eta_j=-1+\beta\eta_0^0(\nu)/\omega_j^2>0$ при $j=1,\ldots,s$, $\eta_j=0$ при $j=s+1,\ldots,m-1$. Точнее говоря, состояние равновесия O_s существует при всех $\nu>\nu_s$, экспоненциально устойчиво при $\nu_s<\nu<\nu_{s+1}$ и неустойчиво при $\nu>\nu_{s+1}$. Здесь ν_s, $s=1,\ldots,m-1$ – введенные выше корни уравнений (37), а $\nu_0=\nu_*$, $\nu_m=+\infty$.

Перечисленные факты свидетельствуют о том, что при увеличении параметра ν в системе (33), (34) происходит цепочка бифуркаций $O_0\to O_1\to\ldots\to O_{m-1}$ устойчивых состояний равновесия. Остается заметить, что в силу теоремы 1 в исходной системе (10) при условиях (29), (30), (36) и при увеличении параметра α (это эквивалентно увеличению ν в (33), (34)) наблюдается аналогичная цепочка бифуркаций устойчивых инвариантных торов, сопровождающаяся ростом их размерности. Теорема 2 доказана.

4. Хаотические аттракторы

Характерной особенностью системы (28) является тот факт, что при соответствующем выборе параметров у нее наблюдаются хаотические аттракторы. Убедимся в существовании таких аттракторов в наиболее интересном случае, когда $\nu\gg 1$. В связи с этим выполним в (28) замены $\eta_k/\nu^2\to\eta_k$, $k=0,1,\ldots,m-1$, $\nu^2\tau\to\tau$ и отбросим слагаемые порядка малости $1/\nu^2$. В результате получаем предельную систему вида

$$\frac{d\psi}{d\tau}=-3\sqrt{\eta_0}\sin\psi+\sum_{j=0}^{m-1}a_j\eta_j,\quad \frac{d\eta_0}{d\tau}=\eta_0\left(2\sqrt{\eta_0}\cos\psi+\sum_{j=0}^{m-1}b_{0,j}\eta_j\right),$$
$$\frac{d\eta_k}{d\tau}=\eta_k\sum_{j=0}^{m-1}b_{k,j}\eta_j,\quad k=1,\ldots,m-1. \qquad (38)$$

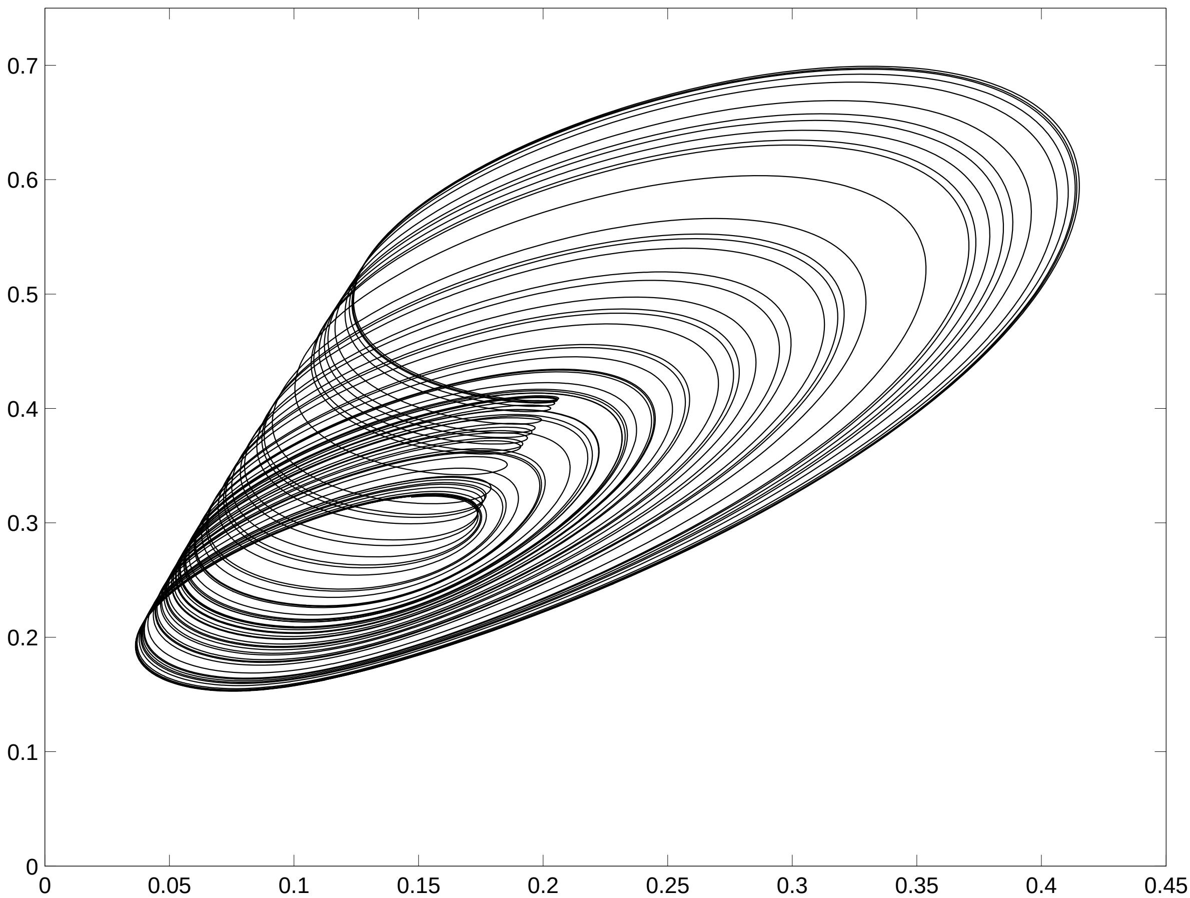

Рис. 1.

Компьютерный анализ систем (28), (38) проводился с помощью пакета программ Tracer 3.70, разработанного Д. С. Глызиным. Было установлено, что при

$$m=3,\ a_0=0.5,\ a_1=-0.5,\ a_2=1.1,\ b_{0,0}=-1,\ b_{0,1}=-0.1,\ b_{0,2}=-0.01,$$
$$b_{1,0}=3,\ b_{1,1}=-1,\ b_{1,2}=-0.1,\ b_{2,0}=1,\ b_{2,1}=4,\ b_{2,2}=-1 \tag{39}$$

система (38) имеет хаотический аттрактор со старшим ляпуновским показателем $\lambda^0_{\max}\approx 0.03876$ (проекция этого аттрактора на плоскость (η_0,η_1) показана на рис. 1). Что же касается системы (28), то у нее при $\sigma=0$, $36\le\nu\le 100$ и при наборе параметров (39) существует хаотический аттрактор со старшим ляпуновским показателем $\lambda_{\max}(\nu)>0$. График функции $\lambda_{\max}(\nu)$, построенный на отрезке $36\le\nu\le 100$ по точкам с шагом 0.1, изображен на рис. 2 сплошной линией. Характерная особенность этого графика состоит в том, что старший ляпуновский показатель растет примерно по закону $\lambda(\nu)=\lambda^0_{\max}\nu^2\approx 0.03876\cdot\nu^2$ (соответствующая кривая показана на рис. 2 пунктиром). Но в то же время имеется некоторое количество промежутков, в которых $\lambda_{\max}(\nu)$ принимает существенно меньшие значения. По всей видимости, количество таких "провалов" счетно, причем с ростом ν стремятся к бесконечности как расстояния между соседними минимумами, так и значения показателя $\lambda_{\max}(\nu)$ в точках локальных минимумов.

В заключение обратим внимание, что при любом выборе коэффициентов нулевое

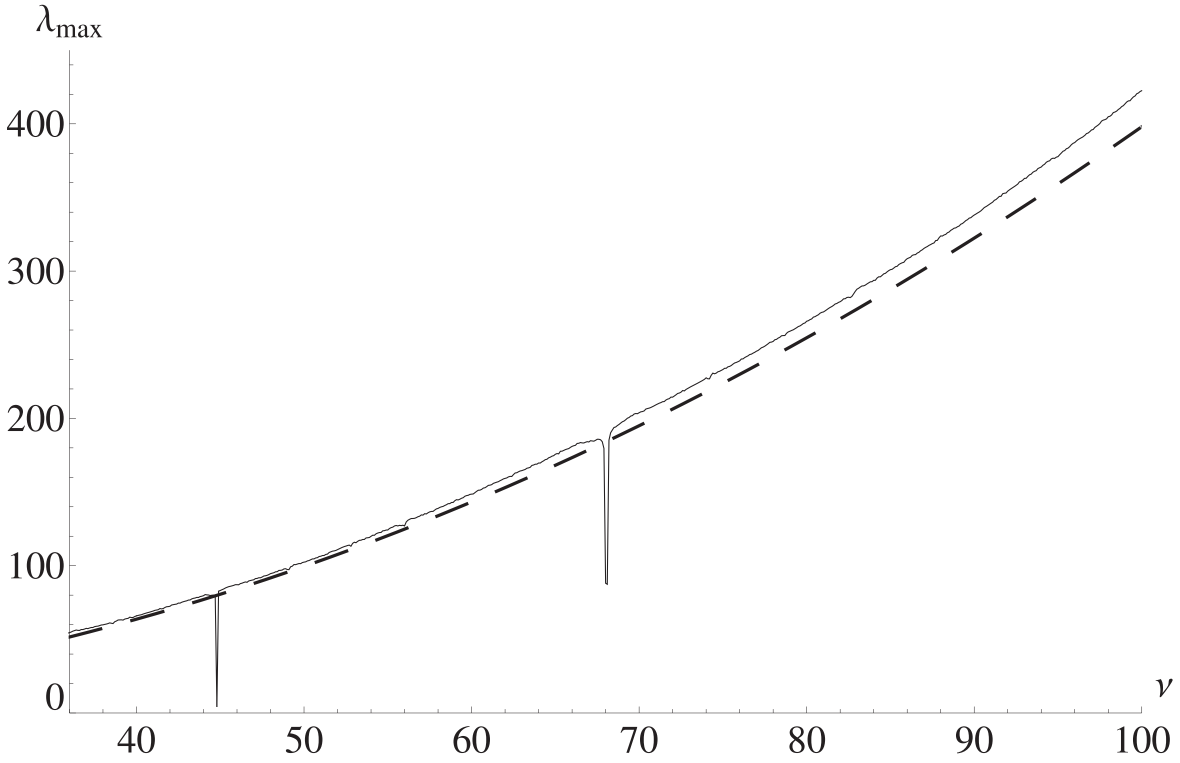

Рис. 2.

решение системы (23) оказывается устойчивым. Тем самым, устойчивым будет и нулевой цикл исходной системы (10). Однако, как было показано выше, наряду с этим циклом данная система может иметь и другие аттракторы: инвариантные торы любой конечной размерности p, $p \leq m$ или хаос. Таким образом, параметрический резонанс 1 : 3 является одним из возможных механизмов жесткого возбуждения колебаний в нелинейных флаттерных системах с малым затуханием.

Следует добавить, что в настоящее время изучены и другие механизмы подобного рода, связанные с наличием резонансов между собственными значениями матрицы $A(\mu)$ из (1). Так, например, в статье [15] исследован случай резонанса 1 : 2, а в работе [9] рассматривалось взаимодействие резонансов 1 : 1 и 1 : 2.

Список литературы

1. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с. (English transl.: *Bolotin V. V.* Nonconservative problems of the theory of elastic stability. Elsevier Science & Technology, Jan 1, 1963. Aeroelasticity. 324 p.)

2. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем: современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука, 1987. 352 с. (English transl.: *Panovko Ja. G., Gubanov I. I.* Stability and Oscillations of Elastic Systems. Paradoxes, Fallacies, and Concepts. New York : Consultants Bureau, 1965. 289 p.)

3. *Dowell E. H.* Aeroelasticity of plates and shells. Mechanics: The Dynamical systems. Leyden, The Netherlands: Noordhoff International Publishing, 1975.

4. *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с. (*Filippov A. P.* Kolebaniya deformiruyemykh system. Moscow: Mashinostroyeniye, 1970 [in Russian].)

5. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с. (*Vol'mir A. S.* Ustoychivost' deformiruyemykh system. Moscow: Nauka, 1967 [in Russian].)

6. *Колесов Ю. С., Колесов В. С., Федик И. И.* Автоколебания в системах с распределенными параметрами. Киев: Наукова думка, 1979. (*Kolesov Yu. S., Kolesov V. S., Fedik I. I.* Avtokolebaniya v sistemakh s raspredelennymi parametrami. Kiyev: Naukova dumka, 1979 [in Russian].)

7. *Holmes P. J., Marsden J. E.* Bifurcations to divergence and flutter in flow-induced oscillations: a infinite-dimensional analysis // Automatica. 1978. V. 14. P. 367–384.

8. *Holmes P. J.* Bifurcations to divergence and flutter in flow-induced oscillations: a finite-dimensional analysis // J. of Sound and Vibration. 1977. V. 53, № 4. P. 471–503.

9. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Резонансная динамика нелинейных флаттерных систем // Тр. МИАН. 2008. Т. 261. С. 154–175. (English transl.: *Kolesov A. Yu., Mishchenko Ye. F., Rozov N. Kh.* Resonance Dynamics of Nonlinear Flutter Systems // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2008. V. 261. P. 149–170.)

10. *Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Многоликий хаос. М.: Физматлит, 2012. 432 с. (*Mishchenko Ye. F., Sadovnichiy V. A., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Mnogolikiy khaos. M.: Fizmatlit, 2012 [in Russian].)

11. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с. (English transl.: *Bogolyubov N. N., Mitropolski Yu. A.* Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations. New York: Gordon and Breach, 1961. 537 p.)

12. *Фомин В. Н.* Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972. 240 с. (*Fomin V. N.* Matematicheskaya teoriya parametricheskogo rezonansa v lineynykh raspredelennykh sistemakh. L.: Izd-vo LGU, 1972. 240 p. [in Russian].)

13. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с. (*Yakubovich V. A., Starzhinskiy V. M.* Lineynyye differentsial'nyye uravneniya s periodicheskimi koeffitsiyentami i ikh prilozheniya. Moscow: Nauka, 1972 [in Russian].)

14. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М.: Физматлит, 2004. 405 с. (*Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Invariantnyye tory nelineynykh volnovykh uravneniy. M.: Fizmatlit, 2004 [in Russian].)

15. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Механизм жесткого возбуждения колебаний, связанный с резонансом 1 : 2 // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45, № 11. С. 2000–2016. (English transl.: *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* The mechanism of hard excitation of self-oscillations in the case of the resonance 1 : 2 // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2005. V. 45, No 11. P. 1923–1938.)

On One Means of Hard Excitation of Oscillations in Nonlinear Flutter Systems

Glyzin S. D.*, Kolesov A. Yu.*, Rozov N. Kh.**

* *P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia*
** *M.V. Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia*

Keywords: nonlinear flutter systems, parametric external impact, hard excitation of oscillations, invariant torus, chaos

Considered are so-called finite-dimensional flutter systems, i.e. systems of ordinary differential equations, arising from Galerkin approximations of certain boundary value problems of aeroelasticity theory as well as from a number of radiophysics applications. We study small oscillations of these equations in case of 1 : 3 resonance. By combining analytical and numerical methods, it is concluded that the mentioned resonance can cause a hard excitation of oscillations. Namely, for flutter systems shown is the possibility of coexistence, along with the stable zero state, of stable invariant tori of arbitrary finite dimension as well as chaotic attractors.

Сведения об авторах:
Глызин Сергей Дмитриевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей,
Колесов Андрей Юрьевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений
Розов Николай Христович,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
д-р физ.-мат. наук, профессор, член-корреспондент РАЕН, декан факультета педагогического образования