

УДК 517.9

Влияние запаздывающей обратной связи на устойчивость периодических орбит

Богачевская В. Г., Кащенко И. С.¹

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14*

e-mail: BogachevskayaVG@yandex.ru; iliyask@uniyar.ac.ru

получена 9 февраля 2014

Ключевые слова: уравнение Стюарта–Ландау, запаздывающее управление, стабилизация цикла, мультипликаторы

В работе решается задача стабилизации неустойчивого цикла с помощью запаздывающей обратной связи на примере модельного уравнения с кубической нелинейностью. Мы рассматриваем случай, когда в задаче без управления ровно один мультипликатор цикла расположен вне единичной окружности. Время запаздывания выбирается пропорциональным периоду исходного цикла, чтобы в задаче с управлением исходное решение сохранялось без изменений. Для плоскости комплексного коэффициента запаздывающего управления получено D -разбиение. Главный результат состоит в аналитически найденных условиях на параметры запаздывающей обратной связи – коэффициент и время задержки, – при которых исходное периодическое решение становится устойчивым. Также определены необходимые и достаточные условия на собственные параметры задачи, при которых задача стабилизации разрешима. Как следствие, полностью решена задача об устойчивости цикла уравнения Стюарта–Ландау.

Введение

Управление устойчивостью периодических орбит является одним из ключевых вопросов в области математического моделирования. Существуют разнообразные методы, позволяющие добиться их стабилизации и дестабилизации за счет слабого внешнего воздействия [1, 2]. Наиболее простым и эффективным является метод запаздывающего управления, предложенный К. Пирагасом в работе [3]. Суть данного метода заключается в управлении с помощью обратной связи, включающей задержку по времени, пропорциональную периоду исследуемой орбиты. При физической

¹Работа выполнена при поддержке проекта № 984 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ и гранта Президента РФ (соглашение №14.124.13.5948-МК) .

реализации модели такая задержка может быть обусловлена, например, эхом, зеркалом, искусственно созданными устройствами и т. п. Типичным примером является световод, по которому поток фотонов, генерируемый лазером, опять подается на вход этого же лазера. Изменение длины световода позволяет изменять время запаздывания в системе.

Внешнее воздействие, с помощью которого осуществляется управление, может принимать различную форму, но наиболее распространенной и простой в физической реализации является линейная обратная связь. Модельное уравнение с таким типом воздействия принимает следующий вид:

$$\dot{z}(t) = f(z(t)) + K[z(t - T) - z(t)],$$

где $\dot{z}(t) = f(z(t))$ – d -мерная, вообще говоря, нелинейная динамическая система, имеющая периодическую орбиту с минимальным периодом T_* , а матрица K задает коэффициенты запаздывающего управления. Зачастую K выбирается пропорционально единичной матрице или матрице поворота на некоторый угол, однако более общие случаи также возможны.

Принято считать, что не все периодические орбиты могут быть стабилизированы за счет запаздывающего управления. Так, долгое время в научных статьях использовалась теорема, гласящая, что периодические орбиты с нечетным числом мультипликаторов вне единичного круга нельзя сделать устойчивыми с помощью данного метода [4, 5]. Однако приведенная теорема является ошибочной. В качестве контрпримера может быть представлено уравнение Стюарта–Ландау, рассматриваемое в настоящей работе:

$$\dot{z} = \sigma z + \gamma |z|^2 z + K(z(t - T) - z).$$

Здесь z – комплекснозначная функция; γ и σ – некоторые заданные комплексные константы.

Эта система рассматривалась в работах [6–8] для опровержения упомянутой теоремы о невозможности стабилизации при нечетном числе мультипликаторов вне единичного круга, однако приведенное там исследование опирается на предположение, что устойчивость периодического решения противоположна устойчивости нулевого состояния равновесия, что является корректным только при малых значениях $\operatorname{Re} \sigma$.

Отметим, что рассматриваемая система использует в качестве основы усеченную до третьего порядка нормальную форму, возникающую в случае пары чисто мнимых собственных значений в бифуркации Андронова–Хопфа [9, 10]. С этим фактом связано то, что данное уравнение изучалось и в некоторых других работах и имеет место в ряде приложений. Так, например, в [11] исследован случай большого вещественного K и его влияние на поведение решений, в [12, 13] рассматривалась устойчивость периодических решений такого уравнения при асимптотически большом значении запаздывания, а в [14] подобное уравнение возникает как квазинормальная форма для уравнений с двумя запаздываниями. Схожая задача, но относительно состояния равновесия изучалась в [15].

В настоящей работе мы, на примере модельного уравнения, покажем, что периодическое решение, с одним мультипликатором вне единичного круга, может быть

стабилизировано с помощью запаздывающей обратной связи. В разделе 1 мы приведем аккуратную постановку задачи, в разделе 2 построим необходимое для исследований характеристическое уравнение. Раздел 3 посвящен основному результату — задаче стабилизации периодического решения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение с запаздывающей обратной связью вида

$$\dot{z} = (\lambda + i\delta)z + \gamma|z|^2z + K(z(t - T) - z), \quad (1)$$

где z — комплексная переменная; λ и δ — вещественные, а γ — комплексный параметры. Время запаздывания T полагается вещественным и положительным, а коэффициент запаздывающего управления $K = \alpha + i\beta$ — комплексным.

Не ограничивая общности, можно считать, что $|\lambda| = \frac{1}{2}$. Действительно, этого всегда можно достичь с помощью нормировки переменной и времени $z \rightarrow \sqrt{|2\lambda|}z$ и $t \rightarrow |2\lambda|t$.

Динамика уравнения (1) в случае отсутствия запаздывающего управления ($K = 0$ или $T = 0$) хорошо известна. При условии $\lambda \cdot \operatorname{Re} \gamma < 0$ у него существует цикл

$$z_*(t) = \rho_* e^{i\varphi_* t}, \quad \text{где } \rho_* = \sqrt{-\frac{\lambda}{\operatorname{Re} \gamma}}, \text{ и } \varphi_* = \delta - \frac{\lambda \operatorname{Im} \gamma}{\operatorname{Re} \gamma}. \quad (2)$$

Этот цикл будет орбитально устойчивым при $\lambda > 0$ и неустойчивым при $\lambda < 0$. Отметим, что его период равен

$$T_* = \frac{2\pi}{|\varphi_*|}.$$

Везде далее будем считать, что параметры таковы, что у уравнения (1) существует неустойчивое периодическое решение (2), т. е.

$$\lambda = -\frac{1}{2}, \operatorname{Re} \gamma > 0, \quad T = nT_*, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поставим задачу стабилизации: найти такие параметры запаздывающего управления $K = K(\lambda, \delta, \gamma)$ и $T = n(\lambda, \delta, \gamma)T_* > 0$, чтобы решение (2) стало устойчивым.

Для этого мы линеаризуем уравнение (1) на (2) и построим характеристическое уравнение. В зависимости от расположения корней этого уравнения относительно мнимой оси можно сделать вывод об устойчивости либо неустойчивости решения.

2. Построение характеристического уравнения

Согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению динамика решений дифференциальных уравнений может быть исследована посредством анализа расположения корней характеристического квазиполинома. Преобразуем имеющееся уравнение с запаздывающей обратной связью и найдем соответствующий ему характеристический квазиполином.

Сделаем замену $z = z_*(1 + v)$, где $z_*(t)$ определяется равенством (2). Тогда исходная задача об орбитальной устойчивости $z_*(t)$ сводится к задаче об устойчивости состояния равновесия $v = 0$.

Учитывая, что $\rho_* \neq 0$ при $\lambda = -\frac{1}{2}$, после преобразований получаем

$$\dot{v} = (\lambda + \delta i - i\varphi_*)(1 + v) + \gamma|\rho_*|^2|1 + v|^2(1 + v) + K(v(t - T) - v).$$

Представим $v(t) = x(t) + iy(t)$, $K = \alpha + i\beta$ и, учитывая выражения для ρ_* и φ_* , линеаризуем полученную систему на нулевом состоянии равновесия. После упрощения получаем

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\lambda x + \alpha(x(t - T) - x) - \beta(y(t - T) - y), \\ \dot{y} = -2\frac{Im\gamma\lambda}{Re\gamma}x + \alpha(y(t - T) - y) + \beta(x(t - T) - x). \end{cases}$$

Построим характеристическое уравнение для линейной задачи. Введем новые обозначения $l = -2\lambda$ и $g = \frac{Im\gamma\lambda}{Re\gamma}$. Поскольку $\lambda = -\frac{1}{2}$, то $l = 1$. Характеристическое уравнение относительно μ имеет следующий вид:

$$f(\mu) = \mu^2 - \mu(2\alpha(e^{-\mu T} - 1) + 1) + (e^{-\mu T} - 1)(\alpha + g\beta) + (e^{-\mu T} - 1)^2(\alpha^2 + \beta^2) = 0. \quad (3)$$

Если все корни (3) имеют отрицательные вещественные части, то периодическое решение (2) орбитально устойчиво; если есть хотя бы один корень (3) с положительной вещественной частью, то неустойчиво. Таким образом, наша задача свелась к нахождению таких параметров α , β и $T = nT_*$, что все корни из правой комплексной полуплоскости перейдут влево.

3. Задача стабилизации

Так как изучается устойчивость цикла, у характеристического квазиполинома (3) всегда есть нулевой корень, который не влияет на устойчивость. Таким образом, для решения задачи стабилизации необходимо и достаточно найти такие значения параметров K и $T > 0$, чтобы все остальные корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части.

Обозначим через $\mu(\alpha, \beta, T)$ некоторый (не равный нулю тождественно) корень уравнения (3). В силу непрерывности функции $\mu(\alpha, \beta, T)$ по всем переменным, чтобы попасть из правой комплексной полуплоскости в левую или наоборот, она должна пересечь мнимую ось. Кроме того, если пересечение происходит в некоторой точке $\mu = i\omega$, где ω — положительное действительное число, то при данных параметрах происходит и пересечение мнимой оси комплексно сопряженным корнем в точке $\bar{\mu}(\alpha, \beta, T) = -i\omega$. Таким образом, можно полагать $\omega \geq 0$, учитывая при этом, что $\omega > 0$ означает переход через мнимую ось не единственного корня, а пары корней, а при $\omega = 0$ уравнение (3) имеет кратный нулевой корень.

В отсутствие запаздывающего управления уравнение (3) имеет решения $\mu = 0$ и $\mu = 1$, т.е. в правой полуплоскости располагается только один корень.

Получаем, что для стабилизации нам необходимо либо выводить „неустойчивый“ корень через нулевое значение, либо сначала добавить еще один корень в правую

комплексную полуплоскость (опять же через кратный ноль), а затем вывести влево пару корней через точки вида $\mu = \pm i\omega$. Таким образом, анализ условий, при которых корень характеристического уравнения (3) пересекает мнимую ось в точке $\mu = 0$ при изменении параметров запаздывающего управления, представляется необходимым для решения задачи стабилизации.

Найдем отдельно значения параметров, при которых (3) имеет кратный нулевой корень и при которых существует пара комплексно сопряженных ненулевых корней, а также изучим направление движения таких корней при изменении параметров управления.

3.1. Кратный нулевой корень

Найдем сначала условия существования такого корня. Заметим, что характеристическое уравнение изначально (при $K = 0$) имеет один нулевой корень. Соответственно, требуется, чтобы нулевой корень стал второй кратности, что эквивалентно условию $f'(0) = 0$.

В результате несложных вычислений получаем условие существования второго нулевого корня:

$$\alpha = -\frac{1}{T} - g\beta. \quad (4)$$

Чтобы определить, в каком направлении движется корень при изменении, например, параметра β , достаточно определить знак вещественной части производной $\frac{d\mu}{d\beta}$ при $\mu = 0$.

В ситуации кратного корня теорема о неявной функции напрямую не работает, поэтому, чтобы определить производную $\frac{d\mu}{d\beta}|_{\mu=0}$, используем эту теорему для равенства $h(\mu) = \frac{f(\mu)}{\mu} = 0$. В нуле $h(\mu)$ доопределим по правилу $h(0) = 0$, тогда эта функция будет непрерывной и дифференцируемой.

По теореме о дифференцируемости неявной функции находим, что

$$\frac{d\mu}{d\beta}|_{\mu=0} = -\frac{2g}{1 - 2\beta^2 T(g^2 + 1)}. \quad (5)$$

Условие $\frac{d\mu}{d\beta}|_{\mu=0} > 0$ дает переход одного корня в правую комплексную полуплоскость, а $\frac{d\mu}{d\beta}|_{\mu=0} < 0$ – в левую при возрастании β . Как видно из (5), знак знаменателя может варьироваться за счет изменения произведения $\beta^2 T$: он положителен в случае $\beta^2 T < (2g^2 + 2)^{-1}$ и отрицателен в случае $\beta^2 T > (2g^2 + 2)^{-1}$.

Следовательно, верна следующая теорема.

Теорема 1. У характеристического уравнения (3) имеется нулевой корень второй кратности тогда и только тогда, когда

$$\alpha = -\frac{1}{T} - g\beta.$$

Причем при возрастании параметра β переход осуществляется – в правую комплексную полуплоскость, если

$$g > 0, \quad \beta^2 T > \frac{l}{2(g^2 + 1)} \quad \text{или} \quad g < 0, \quad \beta^2 T < \frac{l}{2(g^2 + 1)},$$

– в левую комплексную полуплоскость, если

$$g > 0, \quad \beta^2 T < \frac{l}{2(g^2 + 1)} \quad \text{или} \quad g < 0, \quad \beta^2 T > \frac{l}{2(g^2 + 1)}.$$

3.2. Корни вида $\mu = i\omega$ при $\omega \neq 0$

Перейдем к нахождению отличных от нуля точек на мнимой оси, в которых пары корней могут переходить из одной комплексной полуплоскости в другую. Рассмотрим характеристическое уравнение (3). Заметим, что данное уравнение является квадратным по α и может быть переписано как

$$\alpha^2(e^{-\mu T} - 1)^2 + \alpha(1 - 2\mu)(e^{-\mu T} - 1) + (\mu^2 - \mu + g\beta(e^{-\mu T} - 1) + \beta^2(e^{-\mu T} - 1)^2) = 0.$$

Таким образом, получаем два значения α :

$$\alpha_{\pm} = \frac{-(1 - 2\mu)}{2(e^{-\mu T} - 1)} \pm \frac{\sqrt{1 - 4g\beta(e^{-\mu T} - 1) - 4\beta^2(e^{-\mu T} - 1)^2}}{2(e^{-\mu T} - 1)}. \quad (6)$$

Поскольку нас интересуют только значения μ , расположенные на мнимой оси, то подставим $\mu = i\omega$ в полученное равенство (6). После несложных преобразований выражение примет вид

$$\alpha_{\pm} = \frac{(2i\omega - 1)(\cos(\omega T) - 1 + i\sin(\omega T))}{4(1 - \cos(\omega T))} \pm \sqrt{\frac{1 - 4g\beta(\cos(\omega T) - 1 - i\sin(\omega T))}{4(\cos(\omega T) - 1 - i\sin(\omega T))^2} - \beta^2}. \quad (7)$$

Однако не все α , вычисленные по данной формуле, подходят. По условию, α – действительное число, а значение найденной формулы, вообще говоря, комплексно. Следовательно, требуется найти такие β и T , чтобы мнимая часть значения данного выражения была равна нулю.

Представим слагаемые из правой части равенства (7) в виде $a + bi$ и $c + di$ соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} a &= \frac{-(\cos(\omega T) - 1) - 2\omega \sin(\omega T)}{4(1 - \cos(\omega T))}, \\ b &= \frac{2\omega(\cos(\omega T) - 1) - \sin(\omega T)}{4(1 - \cos(\omega T))}. \end{aligned}$$

Значения c и d могут быть найдены из уравнения

$$c^2 + 2cdi - d^2 = \frac{1}{4(\cos(\omega T) - 1 - i\sin(\omega T))^2} - \frac{g\beta}{(\cos(\omega T) - 1 - i\sin(\omega T))} - \beta^2. \quad (8)$$

Заметим, что для α_- должно выполняться равенство $b = d$. Только в этом случае мнимые части двух слагаемых сократятся, и α будет действительным числом. Аналогично, для α_+ должно быть выполнено $b = -d$.

Выделим в каждом слагаемом из правой части (8) вещественную и мнимую части.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4(\cos(\omega T) - 1 - i \sin(\omega T))^2} &= k_1 + k_2 i, \\ -\frac{g\beta}{(\cos(\omega T) - 1 - i \sin(\omega T))} &= k_3 \beta + k_4 \beta i.\end{aligned}$$

После преобразований находим, что

$$\begin{aligned}k_1 &= \frac{\cos(\omega T)}{8(\cos(\omega T) - 1)}, \\ k_2 &= \frac{\sin(\omega T)}{8(\cos(\omega T) - 1)}, \\ k_3 &= \frac{g}{2}, \\ k_4 &= \frac{g \sin(\omega T)}{2(\cos(\omega T) - 1)}.\end{aligned}$$

Уравнение (8) преобразуется к виду

$$\begin{cases} 2cd = k_2 + k_4 \beta, \\ c^2 - d^2 = k_1 + k_3 \beta - \beta^2. \end{cases}$$

Выражая из первого уравнения c , имеем

$$c = \pm \frac{k_2 + k_4 \beta}{2b},$$

где знак выражения, в силу условий на d , соответствует знаку у α , которое мы ищем. Если найденное c будет удовлетворять и второму уравнению при некоторых вещественных значениях ω и β , то из этого будет следовать существование α и наличие корня $\mu = i\omega$. В этом случае α будет вычисляться по формуле:

$$\alpha_{\pm} = a - \frac{k_2 + k_4 \beta}{2b}.$$

Подставим найденное c во второе уравнение системы:

$$\beta^2(k_4^2 + 4b^2) + \beta(2k_2k_4 - 4k_3b^2) + (k_2^2 - 4b^4 - 4k_1b^2) = 0.$$

Как несложно видеть, уравнение является квадратным по β , а поскольку все коэффициенты вещественны, то необходимым и достаточным условием вещественного значения β является неотрицательный дискриминант. Иными словами, требуется

$$D_{\beta} = (2k_2k_4 - 4k_3b^2)^2 - 4(k_4^2 + 4b^2)(k_2^2 - 4b^4 - 4k_1b^2) \geq 0.$$

Тогда

$$\beta_{\pm} = \frac{-(2k_2k_4 - 4k_3b^2) \pm \sqrt{D_{\beta}}}{2(k_4^2 + 4b^2)}. \quad (9)$$

Таким образом, при каждом фиксированном наборе значений ω и T , удовлетворяющих условию $D_\beta \geq 0$, можно вычислить значения вещественных параметров α и β , таких что $\mu = i\omega$ будет корнем характеристического уравнения (3).

Определим направление движения найденного корня $\mu = i\omega$ при изменении β . Рассмотрим значение вещественной части $\frac{d\mu}{d\beta}$, для чего воспользуемся теоремой о неявной функции. В результате получаем, что знак вещественной части производной может быть вычислен по формуле

$$\text{sign}\left(\text{Re}\frac{d\mu}{d\beta}\Big|_{\mu=i\omega}\right) = -\text{sign}(\text{Re}f'_\mu\text{Re}f'_\beta + \text{Im}f'_\mu\text{Im}f'_\beta),$$

где

$$f'_\beta = (g + 4\beta \cos(\omega T))(\cos(\omega T) - 1) + i(-g \sin(\omega T) + 4\beta \sin(\omega T)(1 - \cos(\omega T))),$$

$$\begin{aligned} f'_\mu = & (2\alpha - 1 + 2\alpha\omega T \sin(\omega T) - (2\alpha - T(\alpha + g\beta) + \\ & + 2T(\alpha^2 + \beta^2)) \cos(\omega T) - 2T(\alpha^2 + \beta^2) \cos(2\omega T)) + \\ & + i(2\omega + 2\alpha\omega T \cos(\omega T) + (2\alpha + T\alpha + gT\beta) \sin(\omega T) - \\ & - 2T(\alpha^2 + \beta^2)(-\sin(2\omega T) + \sin(\omega T))). \end{aligned}$$

Сформулируем результаты этого пункта в виде теоремы.

Теорема 2. Уравнение (3) имеет пару чисто мнимых корней $\mu = \pm i\omega$ ($\omega > 0$) тогда и только тогда, когда $D_\beta \geq 0$, $\alpha = \alpha_\pm$, $\beta = \beta_\pm$. При этом, при увеличении параметра β , этот корень переходит вправо, если $\text{Re}f'_\mu\text{Re}f'_\beta + \text{Im}f'_\mu\text{Im}f'_\beta < 0$, и переходит влево, если это выражение положительно.

Таким образом, аналитически найдены условия, позволяющие определить множество значений параметров запаздывающего управления, при которых существует корень характеристического уравнения на мнимой оси, и определить, в каком направлении движется данный корень при изменении параметра β .

3.3. Разбиение плоскости параметров

В предыдущих пунктах мы получили значения параметров α и β , при которых характеристическое уравнение имеет корень на мнимой оси. А также нашли условия, позволяющие определить, куда движется этот корень при изменении β . Эти значения образуют кривые, разбивающие плоскость (α, β) на области, внутри каждой из которых характеристическое уравнение имеет фиксированное количество корней в правой комплексной полуплоскости.

Такие разбиения, полученные при разных значениях параметра g , приведены на рис. 1–4. Кривые задают переход пары корней через мнимую ось в точках, отличных от нуля, прямая – переход одного корня через ноль. Причем, если при возрастании $|\beta|$ переход осуществляется из левой комплексной полуплоскости в правую, то такие участки обозначены пунктиром, если же в обратном направлении – сплошной линией. Отметим, что полученные в пункте 3.2 результаты, позволяющие оценить направление перехода, рассматривались при возрастании β . Возрастание $|\beta|$

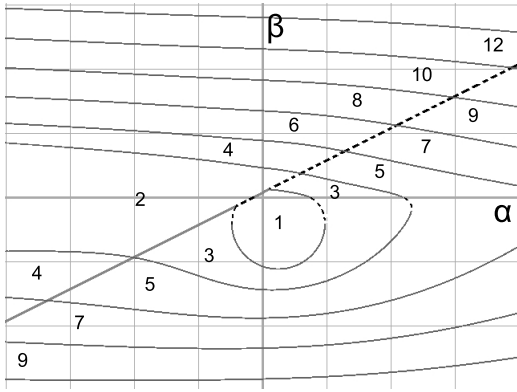


Рис. 1. $T = T_*$, $g = -2$

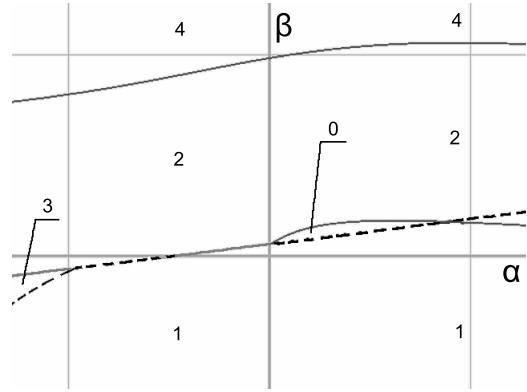


Рис. 2. $T = T_*$, $g = -8$

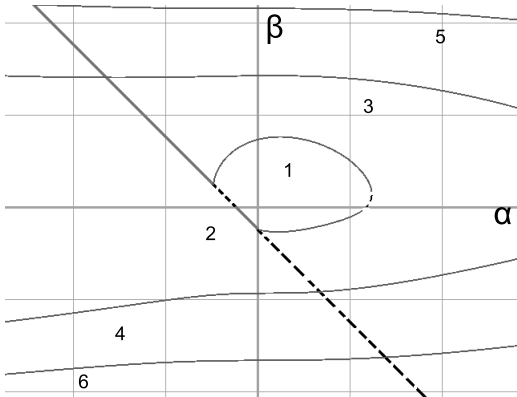


Рис. 3. $T = T_*$, $g = 1$

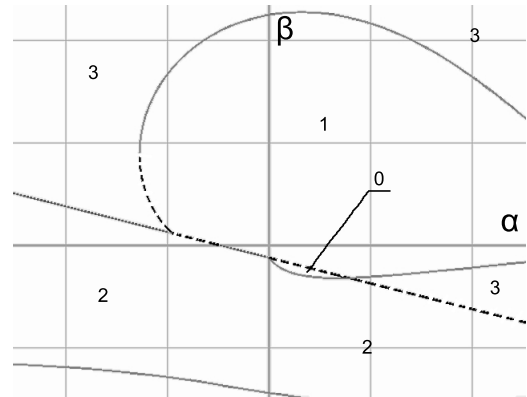


Рис. 4. $T = T_*$, $g = 4$

в отрицательной полуплоскости означает убывание β , а следовательно, направление движения изменится на противоположное. Цифрами на рисунках подписано количество корней характеристического уравнения с положительной вещественной частью внутри каждой области.

Анализ полученного разбиения плоскости (α, β) показывает, что возможно наличие только одной области, в которой задача стабилизации разрешима (см. рис. 2, 4). Она ограничена прямой $\alpha = -\frac{1}{T} - g\beta$ и частью кривой, задающей переход через мнимую ось пары корней, причем в случае $g > 0$ эта кривая задается формулой $\alpha = \alpha(\beta_-, \omega, T)$, а в случае $g < 0$ — соотношением $\alpha = \alpha(\beta_+, \omega, T)$. При возрастании $|\beta|$ от нуля сначала происходит пересечение со сплошной частью прямой, что означает выход из правой полуплоскости единственного корня и стабилизацию решения, и только затем — пересечение с пунктирной частью кривой, т.е. вход пары корней в правую полуплоскость и восстановление неустойчивости. При дальнейшем возрастании $|\beta|$ количество корней в правой комплексной полуплоскости только увеличивается, что не позволяет добиться повторной стабилизации решения. В силу постоянства количества корней внутри областей между кривыми получаем, что на всей плоскости параметров запаздывающего управления других областей стабилизации быть не может.

Рассмотрим теперь условия существования найденной области стабилизации. Из полученных ранее формул следует, что при $\omega \rightarrow 0$ движение вдоль кривых $\alpha =$

$\alpha(\beta_-, \omega, T)$ и $\alpha = \alpha(\beta_+, \omega, T)$ осуществляется по направлению к точкам $\left(-\frac{1}{T} + \sqrt{\frac{1}{2(g^2+1)T}}g; -\sqrt{\frac{1}{2(g^2+1)T}}\right)$ и $\left(-\frac{1}{T} - \sqrt{\frac{1}{2(g^2+1)T}}g; \sqrt{\frac{1}{2(g^2+1)T}}\right)$ соответственно, причем при $\omega = 0$ эти значения достигаются.

Определим функцию $p(\beta, \omega, T)$ как разность функции, задающей значения параметра α , лежащие на прямой, и функции, задающей значения на одной из кривых $\alpha = \alpha(\beta_-, \omega, T)$ или $\alpha = \alpha(\beta_+, \omega, T)$ в зависимости от рассматриваемого случая ($g > 0$ или $g < 0$ соответственно). Иными словами, положим

$$p(\beta, \omega, T) = -\frac{1}{T} - \beta g - a + \frac{k_2 + k_4 \beta}{2b},$$

где $\beta = \beta_-$, если $g > 0$; $\beta = \beta_+$, если $g < 0$.

При $\omega = 0$ функция $p(\beta, \omega, T)$ обращается в ноль, а при ω достаточно близких к нулю – либо строго положительна (тогда область стабилизации существует), либо строго отрицательна (тогда область стабилизации отсутствует). Следовательно, чтобы определить, возможна ли стабилизация решения, достаточно проверить, является ли одна из предельных при $\omega \rightarrow 0$ точек точкой локального минимума функции $p(\beta, \omega, T)$. Таким образом, условие разрешимости задачи стабилизации состоит в следующем:

$$\begin{cases} \frac{dp}{d\omega}|_{\omega=0} = 0, \\ \frac{d^2p}{d\omega^2}|_{\omega=0} > 0. \end{cases} \quad (10)$$

Исследования показывают, что первое из условий выполняется всегда. Для выполнения второго условия требуется, чтобы было верным неравенство

$$-\frac{T(2 + 2g^2 - 3|g|\sqrt{\frac{2(1+g^2)}{T}})}{3(1 + g^2)} > 0,$$

которое, при условии положительного T , путем несложных преобразований сводится к виду

$$g^2(2T - 9) + 2T < 0.$$

Как указывалось ранее, для решения задачи подходят только значения T , полученные по формуле:

$$T = T_* n = \frac{2\pi n}{|\delta + \frac{g}{2}|},$$

где n – некоторое натуральное число.

Подставляя данную формулу для T в полученное неравенство, приходим к неравенству

$$n < \frac{9|\delta + \frac{g}{2}|g^2}{4\pi(g^2 + 1)}. \quad (11)$$

Поскольку требуется найти хотя бы одно натуральное n , удовлетворяющее (11), то несложно заметить, что условие, при выполнении которого стабилизация возможна, имеет вид

$$1 < \frac{9|\delta + \frac{g}{2}|g^2}{4\pi(g^2 + 1)}. \quad (12)$$

Теорема 3. *Параметры запаздывающего управления $K = \alpha + i\beta$ и $T = nT_*$, при которых решение (2) уравнения (1) при $\lambda = -\frac{1}{2}$ становится устойчивым, существуют тогда и только тогда, когда выполняется условие (12).*

Таким образом, мы получаем разбиение плоскости (g, δ) на области, для каждой из которых известно, возможна ли стабилизация периодического решения и какие значения параметров запаздывающего управления $K = \alpha + i\beta$ и $T = T_*n$ для этого подходят. Данное разбиение указано на рис. 5.

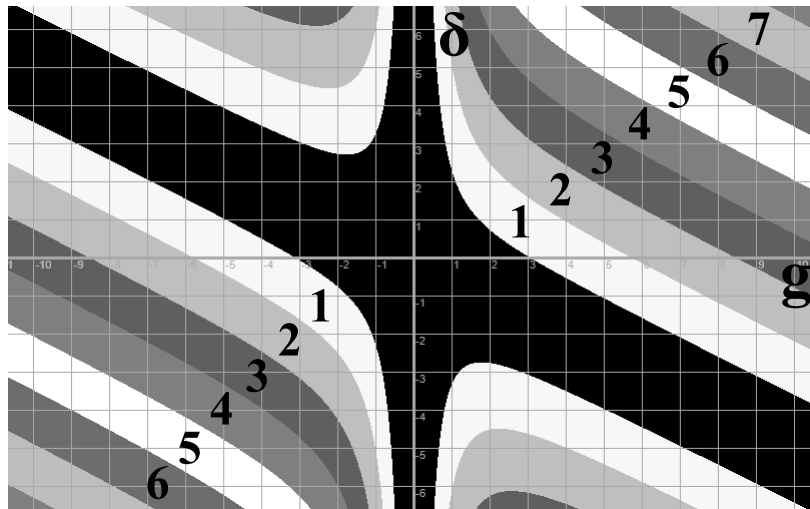


Рис. 5. Разбиение координатной плоскости (g, δ) . Черным цветом обозначены значения, при которых стабилизация возможна, цифрами отмечены максимальные значения n , при которых удастся стабилизировать неустойчивую периодическую орбиту

4. Заключение

Мы провели полное исследование влияния запаздывающего управления на устойчивость периодических орбит системы (1).

Полностью исследован вопрос о разрешимости задачи стабилизации. Получены формулы, позволяющие для каждой пары значений коэффициентов σ и γ определить, возможна ли стабилизация периодической орбиты, а также найти границы области параметров запаздывающего управления, которые позволяют этого достичь.

Отметим, что важным для разрешимости этой задачи оказывается значение g , равное отношению мнимой и вещественной частей коэффициента при нелинейности γ . Важность этого соотношения для динамики нескольких связанных осцилляторов вида (1) отмечалась в [16, 17].

Список литературы

1. Schuster H. G. Handbook of Chaos Control. Wiley-VCH, Weinheim, 1st edition, 1999.
2. Gauthier D. J. Resource letter: Controlling chaos // Am. J. Phys. 2003. 71. P. 750.

3. *Pyragas K.* Continuous control of chaos by self-controlling feedback // *Phys. Lett.* 1992. A. 170. P. 421.
4. *Nakajima H., Ueda Y.* Limitation of generalized delayed feedback control // *Physica.* 1998. D 111. P. 143.
5. *Nakajima H.* On analytical properties of delayed feedback control of chaos // *Phys. Lett.* 1997. A. 232. P. 207.
6. *Fiedler B., Flunkert V., Georgi V., Hovel P., Scholl E.* Refuting the odd number limitation of time-delayed feedback control // *Phys. Rev. Lett.* 2007. 98.
7. *Fiedler B., Flunkert V., Georgi M., Hovel P., Scholl E.* Beyond the odd-number limitation of time-delayed feedback control // *Handbook of Chaos Control* / E. Scholl (ed.) et al. Wiley-VCH, Weinheim. 2008. P. 73–84.
8. *Flunkert V.* Delay-coupled complex systems and applications to lasers. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
9. *Бруно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. (English transl.: *Bruno A.D.* The Local Method of Nonlinear Analysis of Differential Equations. Springer. 1 edition, 1989)
10. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. (*Arnold V.I.* Additional chapters of theory of ordinary differential equation. Moskva: Nauka, 1978 [in Russian]).
11. *Кащенко И. С.* Динамика уравнения с большим коэффициентом запаздывающего управления // Доклады Академии наук. 2011. Т. 437. № 6. С. 743–747. (English transl.: *Kashchenko I.S.* Dynamics of an Equation with a Large Coefficient of Delay Control // *Doklady Mathematics.* 2011. V. 83. № 2. P. 258–261.)
12. *Кащенко А. А.* Устойчивость простейших периодических решений в уравнении Стюарта–Ландау с большим запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19, № 3. С. 136–141. (English transl.: *Kashchenko A. A.* Stability of the Simplest Periodic Solutions in the Stuart–Landau Equation with Large Delay // *Automatic Control and Computer Sciences.* 2013. Vol. 47, No. 7. P. 566–570.)
13. *Глазков Д. В., Кащенко С. А.* Локальная динамика уравнения с большим запаздыванием в окрестности автомодельного цикла // Моделирование и анализ информационных систем. 2010. Т. 17, № 3. С. 38–47. (*Glazkov D.V., Kaschenko S.A.* Local dynamics of DDE with large delay in the vicinity of the self-similar cycle // *Modeling and analysis of information systems.* 2010. V. 17, No. 3. P. 38–47 [in Russian]).
14. *Кащенко И. С., Кащенко С. А.* Асимптотика сложных пространственно-временных структур в системах с большим запаздыванием // Известия вузов «ПНД». 2008. Т. 16, № 4. С. 137–146. (*Kaschenko I.S., Kaschenko S.A.* Asymptotic of difficult spatiotemporal structures in systems with big delay // *News of Higher Education «Applied Nonlinear Dynamics».* 2008. V. 16, № 4. P. 137–146 [in Russian]).
15. *Глазков Д. В.* Локальная динамика уравнения с сильно запаздывающей обратной связью // Моделирование и анализ информационных систем. 2011. Т. 18, №1. С. 75–85. (*Glazkov D.V.* Local dynamics of an equation with long delay feedback // *Modeling and analysis of information systems.* 2011. V. 18, No. 1. P. 75–85 [in Russian]).

16. Глызин С. Д. Динамические свойства простейших конечноразностных аппроксимаций краевой задачи “реакция-диффузия” // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, № 6. С. 805–811. (English transl.: Glyzin S. D. Dynamic properties of the simplest finite-difference approximations of the “reaction-diffusion” boundary value problem // Differential Equations. 1997. V. 33, No. 6. P. 808–814.)
17. Глызин С. Д. Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, № 3. С. 96–116. (Glyzin S. D. Difference approximations of “reaction – diffusion” equation on a segment // Modeling and Analysis of Information Systems. 2009. V. 16, № 3. P. 96 – 116 [in Russian]).

The Influence of Delayed Feedback Control on Stabilization of Periodic Orbits

Bogaevskaya V. G., Kashchenko I. S.

*P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia*

Keywords: Stuart-Landau equation, delay control, cycle stabilization, multipliers

In this paper we solve problems of stabilization of unstable cycle by the delay feedback. We study a model equation with cubic nonlinearity. In this case only one multiplier is located outside a unit circle. Delay time is proportional to the cycle period. The D -partition of the parameter plane is obtained. The main result is analytically found conditions for parameters of delay control such that the initial cycle is stable. Also, we have found necessary and sufficient conditions of solvability of the stabilization problem. As a consequence, the problem of stability of the Stuart–Landau equation periodic solution is completely solved.

Сведения об авторах:

Богаевская Виктория Григорьевна,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
аспирант

Кащенко Илья Сергеевич,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд. физ.-мат. наук, доцент