Моделирование и анализ информационных систем. Т. 26, № 4 (2019), с. 572–582
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 26, No 4 (2019), pp. 572–582

Computer system organization

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-4-572-582

УДК 004.021, 517.929

Особенности вычислительной реализации алгоритма оценки ляпуновских показателей систем с запаздыванием

Горюнов В. Е.

Поступила в редакцию 23 октября 2019
После доработки 6 ноября 2019
Принята к публикации 27 ноября 2019

Аннотация. Рассматривается вычислительная реализация алгоритма оценки спектра показателей Ляпунова для систем дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами. Учитывая, что для таких систем, а также для краевых задач не удается доказать известную теорему Оселедеца, которая позволяет эффективно вычислять искомые величины, приходится говорить лишь об оценках характеристических показателей, в каком-то смысле близких к ляпуновским. В данной работе предложены две методики обработки решений линеаризованных на аттракторе систем, одна из которых основана на базисе импульсных функций, а другая — на базисе тригонометрических функций. Продемонстрирована гибкость применения указанных алгоритмов в случае квазиустойчивых структур, когда несколько показателей Ляпунова близки к нулю. Разработанные методы тестируются на логистическом уравнении с запаздыванием. Полученные результаты иллюстрируют “близость” оцениваемых характеристик и показателей Ляпунова.

Ключевые слова: спектр показателей Ляпунова, динамическая система с запаздыванием, численный алгоритм, уравнение Хатчинсона

Для цитирования: Горюнов В. Е., "Особенности вычислительной реализации алгоритма оценки ляпуновских показателей систем с запаздыванием", *Моделирование и анализ информационных систем*, **26**:4 (2019), 572–582.

Об авторах:
Горюнов Владимир Евгеньевич, orcid.org/0000-0002-0512-6986, аспирант,
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: salkar@ya.ru

Благодарности:
Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-10055.

Введение

Рассматривается расширение стандартного алгоритма [1] вычисления нескольких первых показателей Ляпунова для систем дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами.

Отметим, что ляпуновские показатели для систем с запаздыванием могут не вполне корректно оцениваться численно. Дело в том, что для конечномерных систем имеет место известная теорема Оседедеца [2], в которой утверждается, что линеаризованная на устойчивом решении система всегда является правильной по Ляпунову. Это позволяет в определении ляпуновских показателей [3] заменить верхний предел на обычный и численно оценивать эти величины. В случае уравнений с запаздывающими аргументами и краевых задач такую теорему доказать не удается. Поэтому при разработке алгоритмов вычисления ляпуновских показателей важно иметь модельное уравнение с запаздыванием, для которого спектр может быть вычислен каким-либо другим способом. Наличие такой задачи позволяет протестировать разработанный алгоритм и убедиться в его работоспособности. В статьях [4–6] вычисляются спектры ляпуновских показателей, однако обоснования предложенного алгоритма, как, впрочем, и тестирующего примера авторы не приводят, в отличие от работы [7], которая послужила основой для представленных в данной статье методик. Отдельно упомянем [8] — одну из первых работ по данной тематике. Отметим, что все результаты, описанные в этой статье, носят экспериментальный характер.

1. Описание алгоритма

Опишем процесс получения оценок первых K показателей Ляпунова в случае систем дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами следующего вида:

$$\dot{x} = F\big(x, x(t-h_1), x(t-h_2), \ldots, x(t-h_s)\big), \tag{1}$$

где для $\forall t\ x(t) \in \mathbb{R}^N$, N — размерность системы, $h_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, s)$, $h_1 > h_2 > \ldots > h_s > 0$.

В качестве фазового пространства примем пространство непрерывных на отрезке $[-h_1, 0]$ функций в $\mathbb{R}^N$, а именно $C([-h_1, 0]; \mathbb{R}^N)$.

Для численного решения системы (1) с начальными условиями

$$x_0(t) = f(t), \quad t \in [-h_1, 0], \quad f(t) \in C([-h_1, 0]; \mathbb{R}^N) \tag{2}$$

будем использовать метод Дормана–Принса пятого порядка (DOPRI54) с переменной длиной шага [9].

Таким образом, будем решать систему (1) с соответствующим начальным условием (2) выбранным методом до момента времени Θ, достаточного для приближения траектории решения к изучаемому аттрактору. При этом на промежутке $t \in [\Theta - h_1, \Theta]$ получим функцию $x^{(0)}(t) \in C([\Theta - h_1, \Theta]; \mathbb{R}^N)$, которая станет новым начальным условием системы (1).

Дополним систему уравнений (1) следующими K идентичными системами:

$$\begin{aligned} \dot{u}_j = \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x=x_*(t)} \cdot u_j + \frac{\partial F}{\partial x(t-h_1)}\Big|_{x(t-h_1)=x_*(t-h_1)} \cdot u_j(t-h_1) + \ldots + \\ + \frac{\partial F}{\partial x(t-h_s)}\Big|_{x(t-h_s)=x_*(t-h_s)} \cdot u_j(t-h_s), \end{aligned} \tag{3}$$

где $j = 1, \ldots, K$, $x_*(t)$ — решение системы уравнений (1) с начальным условием $x(t) = x^{(0)}(t)$ при $t > \Theta$. Они представляют собой линеаризованные на решении $x_*(t)$ системы уравнений (1). Далее будем обозначать $u_j = u_j(t) \stackrel{\text{def}}{=} \big(u_{1j}(t), \ldots, u_{Nj}(t)\big)^{\mathrm{T}}$, для которого введем норму

$$\|u_j(t)\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{t-h_1}^{t} |u_{1j}(\tau)|^2 d\tau + \ldots + \int\limits_{t-h_1}^{t} |u_{Nj}(\tau)|^2 d\tau. \tag{4}$$

Для каждой системы уравнений (3) используем начальные условия в виде ортонормированных импульсных функций, например:

$$u_j(t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{K}{Nh_1}} & \text{при } t \in \Big[(\Theta - h_1) + (j-1)h_1/K, \\ & \qquad (\Theta - h_1) + jh_1/K\Big], \quad j = 1, \ldots, K, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \tag{5}$$

либо в виде ортонормированных тригонометрических функций:

$$u_j(t) = \begin{cases} 1, \quad j = 1, \\ \sin\big(j\pi(t-\Theta)/h_1\big)/\sqrt{2}, \quad j = 2, 4, 6, \ldots \\ \cos\big((j-1)\pi(t-\Theta)/h_1\big)/\sqrt{2}, \quad j = 3, 5, 7, \ldots \end{cases} \tag{6}$$

Решая совместно систему (1) с начальным условием $x(t) = x^{(0)}(t)$ и системы уравнений (3) с начальными условиями (5) или (6) на промежутке $t \in [\Theta, \Theta + T]$, где $T \geq h_1$, получаем для каждой из линеаризованных систем решение $u_j^{(1)}(t) = \big(u_{1j}^{(1)}(t), \ldots, u_{Nj}^{(1)}(t)\big)^{\mathrm{T}}$, $j = 1, \ldots, K$.

Учитывая, что решения $u_j^{(1)}(t)$ ведут себя экспоненциально, необходимо их перенормировывать через определенные промежутки времени. Заметим, что проблему представляют как неограниченный рост решений, так и их стремление к нулю. Таким образом, на промежутке $t \in [\Theta + T - h_1, \Theta + T]$ усредняем внутри каждого из M равных временных интервалов длины h_1/M вычисленные решения линеаризованных систем $u_{1j}^{(1)}(t), \ldots, u_{Nj}^{(1)}(t)$, в результате чего получаем кусочно-непрерывные функции $\tilde{u}_{1j}^{(1)}(t), \ldots, \tilde{u}_{Nj}^{(1)}(t)$ соответственно, которые используем в одном из описанных ниже методов.

Метод импульсных функций.

- Применяем метод Грама–Шмидта [10] к $\tilde{u}_j^{(1)}(t)$.
- При этом после процедуры ортогонализации каждой функции, но перед ее перенормировкой вычисляем величины $\xi_j^{(1)} = \|\tilde{u}_{\text{ort } j}^{(1)}\|$, где $\|\cdot\|$ — норма, определенная в (4), $\tilde{u}_{\text{ort } j}^{(1)}(t)$ — ортогонализированная система функций $\tilde{u}_j^{(1)}(t)$.
- Продолжаем решать системы (1), (3), при этом в качестве начальных условий для линеаризованных систем используем полученную ортонормированную систему функций.

Для применения данного метода требуется в качестве начальных условий для линеаризованных систем выбрать систему ортонормированных импульсных функций (5).

Метод тригонометрических функций.

- Предварительно переводим функции $\tilde{u}_j^{(1)}(t)$ в систему векторов $v_j^{(1)} \in \mathbb{R}^{MN}$ по следующему правилу: $v_{mnj}^{(1)} = \tilde{u}_{nj}^{(1)}(\Theta + T - h_1 + (m-1/2)h_1/M)$, $m = 1, \ldots, M$, $n = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, K$.
- К получившейся системе векторов применяем дискретное преобразование Фурье [11], в результате чего получаем комплекснозначные векторы $c_j^{(1)} \in \mathbb{C}^{MN/2+1}$.
- Векторы $c_j^{(1)}$ разделяем на пары действительнозначных векторов, состоящие из действительных и мнимых частей $d_j^{(1)} \in \mathbb{R}^{MN+2}$.
- К системе векторов $d_j^{(1)}$ применяем метод Грама–Шмидта.
- При этом после процедуры ортогонализации каждого вектора, но перед его перенормировкой вычисляем величины
$$\xi_j^{(1)} = \|d_{\text{ort }j}^{(1)}\| = \left(\sum_{j=1}^{K} \sum_{i=1}^{NM+2} |d_{\text{ort }ij}^{(1)}|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$
где $d_{\text{ort }j}^{(1)}$ — ортогонализированная система векторов $d_j^{(1)}$, $j = 1, \ldots, K$.
- Полученные ортонормированные действительнозначные векторы переводим обратно в комплекснозначные, к которым применяем обратное дискретное преобразование Фурье, таким образом получая векторы $w_j^{(1)} \in \mathbb{R}^{MN}$.
- Строим систему функций $\hat{u}_j^{(1)}(t)$ по правилу: $\hat{u}_{nj}^{(1)}(t) = w_{mnj}^{(1)}$ при $t \in [\Theta + T - h_1 + (m-1)h_1/M; \Theta + T - h_1 + mh_1/M]$, $m = 1, \ldots, M$, $n = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, K$.
- Продолжаем решать системы (1), (3), при этом в качестве начальных условий для линеаризованных систем используем систему функций $\hat{u}_j^{(1)}(t)$.

Для применения данного метода требуется в качестве начальных условий для линеаризованных систем выбрать систему ортонормированных тригонометрических функций (6).

Повторяем описанный процесс на временных интервалах $[\Theta + kT - h_1, \Theta + kT]$, $k > 1$, в результате чего обработке алгоритмом подвергаются соответствующие решения $u_j^{(k)}(t)$. Оценка показателей Ляпунова в таком случае вычисляется по формуле
$$\lambda_j = \lim_{L \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{L} \ln \xi_j^{(k)}}{LT}, \quad j = 1, \ldots, K. \tag{7}$$

Отметим, что выбор времени перенормировки T можно осуществлять двумя различными способами: через равные промежутки времени или динамически [12]. В последнем случае на каждом шаге алгоритма придется хранить не только $\xi_j^{(k)}$, но и T_k. Тогда формула оценки показателей Ляпунова будет иметь вид

$$\lambda_j = \lim_{L\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{L} \ln \xi_j^{(k)}/T_k}{L}, \quad j = 1, \ldots, K.$$

Описанная структура алгоритма позволяет начинать вычисления и до выхода решения на изучаемый аттрактор, особенно когда сам процесс приближения решения к аттрактору может быть сопряжен с большими вычислительными трудностями, как это показано в [13] для случая нескольких близких к нулю показателей Ляпунова у квазиустойчивых структур. В таком случае первые шаги, соответствующие временным интервалам, в которых решение еще не приблизилось к аттрактору на достаточное расстояние, должны отбрасываться и никак не учитываться в сумме из формулы (7). Также рекомендуется отбрасывать несколько первых шагов и в общем случае, поскольку процесс формирования нового ортонормированного базиса линеаризованных систем может заметно отразиться на спектре показателей при не слишком большом количестве учтенных шагов L (см. подобный прием в [14]).

Теперь перейдем к результатам тестирования описанных методов.

2. Тестирование на примере уравнения Хатчинсона

Вычислительные эксперименты проводились для уравнения Хатчинсона [15], которое имеет следующий вид:

$$\dot{x} = rx(t)\big(1 - x(t-1)\big). \tag{8}$$

В работе [16] показано, что ненулевые решения уравнения (8) асимптотически устойчивы при $r \in (0, \pi/2)$, причем при $r \in (0, e^{-1})$ монотонно, а при $r \in (e^{-1}, \pi/2)$ колебательным образом решение стремится к единице. Кроме того, единичное решение обладает глобальной устойчивостью при $r \leq 37/24$ [16–18], а в [19, 20] приведен алгоритм, который допускает улучшение этой оценки. В случае единичного состояния равновесия при $r < \pi/2$ показатели Ляпунова для уравнения Хатчинсона совпадают с вещественными частями корней характеристического квазиполинома $P(\lambda) \equiv \lambda + r\exp(-\lambda)$, $\lambda = \tau + i\omega$. Для их вычисления используется система алгебраических уравнений:

$$\tau + re^{-\tau}\cos\omega = 0, \quad \omega - re^{-\tau}\sin\omega = 0.$$

Округленные компоненты решения τ_i данной системы при разных значениях параметра r представлены во втором столбце таблиц 1–3. Будем называть их эталонными значениями.

Уравнение (8) дополняется системой линеаризованных уравнений:

$$\dot{u}_j = r\big(1 - x(t-1)\big)u_j(t) - rx(t)u_j(t-1), \quad j = 1, \ldots, K.$$

Для всех опытов применялись следующие параметры:

- количество вычисляемых показателей Ляпунова $K = 10$;
- время выхода на аттрактор $\Theta = 150$;
- время до перенормировки решений линеаризованных систем $T = 4$;
- количество пересчетов показателей Ляпунова $L = 5000$.

Таблица 1. Первые 10 оценок показателей Ляпунова ($\check{\lambda}_i$ – методом импульсных функций, $\tilde{\lambda}_i$ – методом тригонометрических функций) для уравнения Хатчинсона при $r = 1.5$, а также абсолютная разность σ_i и относительная разность ρ_i между ними и эталонными значениями.

Table 1. The first 10 estimates of Lyapunov exponents ($\check{\lambda}_i$ – by the method of impulse functions, $\tilde{\lambda}_i$ – by the method of trigonometric functions) for the Hutchinson equation at $r = 1.5$ as well as the absolute difference σ_i and the relative difference ρ_i between the obtained and the reference values.

i	τ_i	$\check{\lambda}_i$	$\check{\sigma}_i$	$\check{\rho}_i$	$\tilde{\lambda}_i$	$\tilde{\sigma}_i$	$\tilde{\rho}_i$
$M = 100$							
1	−0.0328	−0.0338	0.0010	0.0305	−0.0335	0.0007	0.0213
2	−0.0328	−0.0338	0.0010	0.0305	−0.0336	0.0008	0.0244
3	−1.6509	−1.6544	0.0035	0.0021	−1.6540	0.0031	0.0019
4	−1.6509	−1.6544	0.0035	0.0021	−1.6541	0.0032	0.0019
5	−2.2447	−2.2491	0.0044	0.0020	−2.2488	0.0041	0.0018
6	−2.2447	−2.2491	0.0044	0.0020	−2.2489	0.0042	0.0019
7	−2.6130	−2.6179	0.0049	0.0019	−2.6178	0.0048	0.0018
8	−2.6130	−2.6179	0.0049	0.0019	−2.6179	0.0049	0.0019
9	−2.8811	−2.8866	0.0055	0.0019	−2.8868	0.0057	0.0020
10	−2.8811	−2.8866	0.0055	0.0019	−2.8869	0.0058	0.0020
$M = 1000$							
1	−0.0328	−0.0329	0.0001	0.0030	−0.0326	0.0002	0.0061
2	−0.0328	−0.0330	0.0002	0.0061	−0.0327	0.0001	0.0030
3	−1.6509	−1.6513	0.0004	0.0002	−1.6509	0.0000	0.0000
4	−1.6509	−1.6513	0.0004	0.0002	−1.6510	0.0001	0.0001
5	−2.2447	−2.2452	0.0005	0.0002	−2.2448	0.0001	0.0000
6	−2.2447	−2.2452	0.0005	0.0002	−2.2449	0.0002	0.0001
7	−2.6130	−2.6134	0.0004	0.0002	−2.6132	0.0002	0.0001
8	−2.6130	−2.6134	0.0004	0.0002	−2.6132	0.0002	0.0001
9	−2.8811	−2.8815	0.0004	0.0001	−2.8813	0.0002	0.0001
10	−2.8811	−2.8815	0.0004	0.0001	−2.8813	0.0002	0.0001
$M = 2000$							
1	−0.0328	−0.0329	0.0001	0.0030	−0.0325	0.0003	0.0091
2	−0.0328	−0.0330	0.0002	0.0061	−0.0326	0.0002	0.0061
3	−1.6509	−1.6512	0.0003	0.0002	−1.6507	0.0002	0.0001
4	−1.6509	−1.6512	0.0003	0.0002	−1.6508	0.0001	0.0001
5	−2.2447	−2.2450	0.0003	0.0001	−2.2446	0.0001	0.0000
6	−2.2447	−2.2450	0.0003	0.0001	−2.2447	0.0000	0.0000
7	−2.6130	−2.6132	0.0002	0.0001	−2.6130	0.0000	0.0000
8	−2.6130	−2.6132	0.0002	0.0001	−2.6130	0.0000	0.0000
9	−2.8811	−2.8812	0.0001	0.0000	−2.8811	0.0000	0.0000
10	−2.8811	−2.8812	0.0001	0.0000	−2.8811	0.0000	0.0000

Таблица 2. Первые 10 оценок показателей Ляпунова ($\check{\lambda}_i$ – методом импульсных функций, $\tilde{\lambda}_i$ – методом тригонометрических функций) для уравнения Хатчинсона при $r = 1.0$, а также абсолютная разность σ_i и относительная разность ρ_i между ними и эталонными значениями.

Table 2. The first 10 estimates of Lyapunov exponents ($\check{\lambda}_i$ – by the method of impulse functions, $\tilde{\lambda}_i$ – by the method of trigonometric functions) for the Hutchinson equation at $r = 1.0$ as well as the absolute difference σ_i and the relative difference ρ_i between the obtained and the reference values.

i	τ_i	$\check{\lambda}_i$	$\check{\sigma}_i$	$\check{\rho}_i$	$\tilde{\lambda}_i$	$\tilde{\sigma}_i$	$\tilde{\rho}_i$
$M = 100$							
1	−0.3181	−0.3195	0.0014	0.0044	−0.3192	0.0011	0.0035
2	−0.3181	−0.3196	0.0015	0.0047	−0.3194	0.0013	0.0041
3	−2.0623	−2.0663	0.0040	0.0019	−2.0659	0.0036	0.0017
4	−2.0623	−2.0663	0.0040	0.0019	−2.0660	0.0037	0.0018
5	−2.6532	−2.6580	0.0048	0.0018	−2.6578	0.0046	0.0017
6	−2.6532	−2.6580	0.0048	0.0018	−2.6578	0.0046	0.0017
7	−3.0202	−3.0257	0.0055	0.0018	−3.0256	0.0054	0.0018
8	−3.0202	−3.0257	0.0055	0.0018	−3.0257	0.0055	0.0018
9	−3.2878	−3.2938	0.0060	0.0018	−3.2943	0.0065	0.0020
10	−3.2878	−3.2938	0.0060	0.0018	−3.2943	0.0065	0.0020
$M = 1000$							
1	−0.3181	−0.3183	0.0002	0.0006	−0.3180	0.0001	0.0003
2	−0.3181	−0.3184	0.0003	0.0009	−0.3181	0.0000	0.0000
3	−2.0623	−2.0628	0.0005	0.0002	−2.0622	0.0001	0.0000
4	−2.0623	−2.0628	0.0005	0.0002	−2.0624	0.0001	0.0000
5	−2.6532	−2.6537	0.0005	0.0002	−2.6533	0.0001	0.0000
6	−2.6532	−2.6537	0.0005	0.0002	−2.6534	0.0002	0.0001
7	−3.0202	−3.0207	0.0005	0.0002	−3.0204	0.0002	0.0001
8	−3.0202	−3.0207	0.0005	0.0002	−3.0205	0.0003	0.0001
9	−3.2878	−3.2882	0.0004	0.0001	−3.2880	0.0002	0.0001
10	−3.2878	−3.2882	0.0004	0.0001	−3.2880	0.0002	0.0001
$M = 2000$							
1	−0.3181	−0.3182	0.0001	0.0003	−0.3178	0.0003	0.0009
2	−0.3181	−0.3184	0.0003	0.0009	−0.3180	0.0001	0.0003
3	−2.0623	−2.0626	0.0003	0.0001	−2.0620	0.0003	0.0001
4	−2.0623	−2.0626	0.0003	0.0001	−2.0622	0.0001	0.0000
5	−2.6532	−2.6534	0.0002	0.0001	−2.6531	0.0001	0.0000
6	−2.6532	−2.6534	0.0002	0.0001	−2.6531	0.0001	0.0000
7	−3.0202	−3.0204	0.0002	0.0001	−3.0202	0.0000	0.0000
8	−3.0202	−3.0204	0.0002	0.0001	−3.0202	0.0000	0.0000
9	−3.2878	−3.2879	0.0001	0.0000	−3.2877	0.0001	0.0000
10	−3.2878	−3.2879	0.0001	0.0000	−3.2877	0.0001	0.0000

Таблица 3. Первые 10 оценок показателей Ляпунова ($\check{\lambda}_i$ – методом импульсных функций, $\tilde{\lambda}_i$ – методом тригонометрических функций) для уравнения Хатчинсона при $r = 0.5$, а также абсолютная разность σ_i и относительная разность ρ_i между ними и эталонными значениями.
Table 3. The first 10 estimates of Lyapunov exponents ($\check{\lambda}_i$ – by the method of impulse functions, $\tilde{\lambda}_i$ – by the method of trigonometric functions) for the Hutchinson equation at $r = 0.5$ as well as the absolute difference σ_i and the relative difference ρ_i between the obtained and the reference values.

i	τ_i	$\check{\lambda}_i$	$\check{\sigma}_i$	$\check{\rho}_i$	$\tilde{\lambda}_i$	$\tilde{\sigma}_i$	$\tilde{\rho}_i$
$M = 100$							
1	−0.7941	−0.7959	0.0018	0.0023	−0.7957	0.0016	0.0020
2	−0.7941	−0.7961	0.0020	0.0025	−0.7957	0.0016	0.0020
3	−2.7721	−2.7770	0.0049	0.0018	−2.7766	0.0045	0.0016
4	−2.7721	−2.7770	0.0049	0.0018	−2.7767	0.0046	0.0017
5	−3.3533	−3.3591	0.0058	0.0017	−3.3588	0.0055	0.0016
6	−3.3533	−3.3591	0.0058	0.0017	−3.3589	0.0056	0.0017
7	−3.7173	−3.7237	0.0064	0.0017	−3.7237	0.0064	0.0017
8	−3.7173	−3.7237	0.0064	0.0017	−3.7237	0.0064	0.0017
9	−3.9835	−3.9906	0.0071	0.0018	−3.9914	0.0079	0.0020
10	−3.9835	−3.9907	0.0072	0.0018	−3.9914	0.0079	0.0020
$M = 1000$							
1	−0.7941	−0.7942	0.0001	0.0001	−0.7939	0.0002	0.0003
2	−0.7941	−0.7944	0.0003	0.0004	−0.7940	0.0001	0.0001
3	−2.7721	−2.7726	0.0005	0.0002	−2.7722	0.0001	0.0000
4	−2.7721	−2.7726	0.0005	0.0002	−2.7723	0.0002	0.0001
5	−3.3533	−3.3539	0.0006	0.0002	−3.3536	0.0003	0.0001
6	−3.3533	−3.3539	0.0006	0.0002	−3.3537	0.0004	0.0001
7	−3.7173	−3.7178	0.0005	0.0001	−3.7177	0.0004	0.0001
8	−3.7173	−3.7178	0.0005	0.0001	−3.7177	0.0004	0.0001
9	−3.9835	−3.9840	0.0005	0.0001	−3.9839	0.0004	0.0001
10	−3.9835	−3.9840	0.0005	0.0001	−3.9839	0.0004	0.0001
$M = 2000$							
1	−0.7941	−0.7941	0.0000	0.0000	−0.7937	0.0004	0.0005
2	−0.7941	−0.7943	0.0002	0.0003	−0.7939	0.0002	0.0003
3	−2.7721	−2.7724	0.0003	0.0001	−2.7719	0.0002	0.0001
4	−2.7721	−2.7724	0.0003	0.0001	−2.7720	0.0001	0.0000
5	−3.3533	−3.3536	0.0003	0.0001	−3.3533	0.0000	0.0000
6	−3.3533	−3.3536	0.0003	0.0001	−3.3533	0.0000	0.0000
7	−3.7173	−3.7175	0.0002	0.0001	−3.7173	0.0000	0.0000
8	−3.7173	−3.7175	0.0002	0.0001	−3.7173	0.0000	0.0000
9	−3.9835	−3.9836	0.0001	0.0000	−3.9835	0.0000	0.0000
10	−3.9835	−3.9837	0.0002	0.0001	−3.9835	0.0000	0.0000

Вычисленные оценки ляпуновских показателей, абсолютная и относительная разности для удобства округлены до четвертого знака после запятой.

Как видно из таблиц 1–3, точность вычисления показателей зависит от величины выбранного разбиения. При увеличении M в 10 раз со 100 до 1000 относительная погрешность уменьшилась на порядок. В крайнем случае, когда количество точек разбиения равно количеству вычисляемых показателей Ляпунова, достигаемая точность мала. Отметим, что в некоторых случаях, например, для режимов модели из [13], метод тригонометрических функций может оказаться неприменим ввиду потери информации на этапе применения дискретного преобразования Фурье.

Заключение

Таким образом, проведенные численные эксперименты показывают, что при выборе достаточного количества точек разбиения M оцениваемые характеристики могут оказаться качественно близкими к показателям Ляпунова. В случае небольшой размерности системы (1) выбор методики влияет на скорость расчетов в зависимости от характера исследуемого решения. В частности, если решение является относительно сглаженным, то метод тригонометрических функций работает быстрее метода импульсных функций. Если же решение содержит большое количество участков с достаточно острыми пиками, то метод импульсных функций является предпочтительным по скорости выполнения. Кроме того, при увеличении количества вычисляемых показателей Ляпунова K и числа точек разбиения M, а также размерности исследуемой системы N становится эффективным применение многопроцессорных параллельных систем.

Список литературы / References

[1] Купцов П. В., “Вычисление показателей Ляпунова для распределённых систем: преимущества и недостатки различных численных методов”, *Изв. вузов “ПНД”*, **18**:5 (2010), 93–112; [Kuptsov P. V., “Computation of Lyapunov Exponents for Spatially Extended Systems: Advantages and Limitations of Various Numerical Methods”, *Izv. VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, **18**:5 (2010), 93–112, (in Russian).]

[2] Оселедец В. И., “Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем”, Тр. ММО, **19**, 1968, 179–210; [Oseledets V. I., “A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **19** (1968), 197–231.]

[3] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости*, Наука, 1966; [Bylov B. F., Vinograd R. E., Grobman D. M., Nemytskiy V. V., *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti*, Nauka, 1966, (in Russian).]

[4] Балякин А. А., Рыскин Н. М., “Особенности расчета спектров показателей Ляпунова в распределенных системах с запаздывающей обратной связью”, *Изв. вузов “ПНД”*, **15**:6 (2007), 3–21; [Balyakin A. A., Ryskin N. M., “Peculiarities of Calculation of the Lyapunov Exponents Set in Distributed Self-Oscillated Systems with Delayed Feedback”, *Izv. VUZ. Applied nonlinear dynamics*, **15**:6 (2007), 3–21, (in Russian).]

[5] Балякин А. А., Блохина Е. В., “Вычисление спектра показателей Ляпунова для распределенных систем радиофизической природы”, *Изв. вузов “ПНД”*, **16**:2 (2008), 87–110; [Balyakin A. A., Blokhina E. V., “Peculiarities of Calculation of the Lyapunov

Exponents Set in Distributed Self-Oscillated Systems with Delayed Feedback", *Izv. VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, **16**:2 (2008), 87–110, (in Russian).]

[6] Колоскова А. Д., Москаленко О. И., Короновский А. А., "Метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием", *Письма в ЖТФ*, **44**:9 (2018), 19–25; [Koloskova A. D., Moskalenko O. I., Koronovskii A. A., "A Method for Calculating the Spectrum of Lyapunov Exponents for Delay Systems", *Technical Physics Letters*, **44**:5 (2018), 374–377.]

[7] Алешин С. В., "Оценка инвариантных числовых показателей аттракторов систем дифференциальных уравнений с запаздыванием", *Вычислит. технологии в естеств. науках: методы суперкомп. моделир.*, 2014, 10–17; [Aleshin S. V., "The Numerical Evaluation of Attractors Exponents of Delay Differential Equations System", *Comp. Technologies in Sciences. Methods of Simul. on Supercomputers*, 2014, 10–17, (in Russian).]

[8] Farmer J. D., "Chaotic Attractors of an Infinite-Dimensional Dynamical System", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **4**:3 (1982), 366–393.

[9] Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G., *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

[10] Cheney W., Kincaid D., *Linear Algebra: Theory and Applications*, Sudbury, Mass: Jones and Bartlett Publishers, 2009.

[11] Нуссбаумер Г., *Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток*, Радио и связь, 1985; [Nussbaumer H. J., *Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1981.]

[12] Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., "Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора", *Дифференц. уравнения*, **41**:2 (2005), 268–273; Glyzin D. S., Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., "The Dynamic Renormalization Method for Finding the Maximum Lyapunov Exponent of a Chaotic Attractor", *Differ. Equ.*, **41**:2 (2005), 284–289.

[13] Aleshin S. V., Glyzin D. S., Glyzin S. D., Goryunov V. E., "Estimation of Lyapunov Exponents for Quasi-Stable Attractors of Dynamical Systems with Time Delay.", *Journal of Physics: Conference Series*, **1163** (2019), 012045.

[14] Kuptsov P. V., Kuznetsov S. P., "Violation of Hyperbolicity in a Diffusive Medium with Local Hyperbolic Attractor", *Phys. Rev. E.*, **80** (2009), 01620513.

[15] Hutchinson G. E., "Circular Causal Systems in Ecology", *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, **50** (1948), 221–246.

[16] Hale J., *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag New York, 1977.

[17] Wright E. M., "A Non-Linear Difference-Differential Equation", *J. Reine Angew. Math.*, **194** (1955), 66–87.

[18] Kakutani S., Markus L., "On the Nonlinear Difference-Differential Equation $y'(t) = (A - By(t-\tau))y(t)$", *Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations*, **4** (1958), 1–18.

[19] Кащенко С. А., "К вопросу об оценке в пространстве параметров области глобальной устойчивости уравнения Хатчинсона", Нелинейные колебания в задачах экологии. Ярославль: ЯрГУ, 1985, 55–62; [Kaschenko S. A., "K voprosu ob otsenke v prostranstve parametrov oblasti global'noy ustoychivosti uravneniya Khatchinsona", *Nelineynye kolebaniya v zadachakh ekologii. Yaroslavl: YarGU*, 1985, 55–62, (in Russian).]

[20] Кащенко С. А., "Асимптотика решений обобщённого уравнения Хатчинсона", *Модел. и анализ информ. систем*, **19**:3 (2012), 32–62; [Kaschenko S. A., "Asymptotics of Solutions of the Generalized Hutchinson's Equation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **19**:3 (2012), 32–62, (in Russian).]

Goryunov V. E., "Features of the Computational Implementation of the Algorithm for Estimating the Lyapunov Exponents of Systems with Delay", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **26**:4 (2019), 572–582.

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-4-572-582

Abstract. We consider the computational implementation of the algorithm for Lyapunov exponents spectrum numerical estimation for delay differential equations. It is known that for such systems, as well as for boundary value problems, it is not possible to prove the well-known Oseledets theorem which allows us to calculate the required parameters very efficiently. Therefore, we can only talk about the estimates of the characteristics in some sense close to the Lyapunov exponents. In this paper, we propose two methods of linearized systems solutions processing. One of them is based on a set of impulse functions, and the other is based on a set of trigonometric functions. We show the usage flexibility of these algorithms in the case of quasi-stable structures when several Lyapunov exponents are close to zero. The developed methods are tested on a logistic equation with a delay, and these tests illustrate the “proximity” of the obtained numerical characteristics and Lyapunov exponents.

Keywords: Lyapunov exponents spectrum, dynamical system with delay, numerical algorithm, Hutchinson equation

On the authors:
Vladimir E. Goryunov, orcid.org/0000-0002-0512-6986, postgraduate student,
P. G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150003, Russia, e-mail: salkar@ya.ru

Acknowledgments:
The reported study was funded by RFBR according to the research project № 18-29-10055.