Модел. и анализ информ. систем. Т. **21**, № **1** (2014) 66–72

УДК 517.933+517.956.6

Уравнения движения твердого тела с двумя упругими стержнями

Елисеев Д.А., Кубышкин Е.П.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: dim_ok32@mail.ru, kubysh@uniyar.ac.ru

получена 28 января 2014

Ключевые слова: математическая модель, механическая система, уравнения движения, твердое тело, упругий стержень, гибридная система дифференциальных уравнений

В работе построена математическая модель механической системы, состоящей из твердого тела и двух жестко связанных с ним и лежащих в одной плоскости упругих прямолинейных стержней, которая вращается вокруг оси, проходящей через центр массы твердого тела перпендикулярно плоскости расположения стержней. Стержни моделируются балкой Эйлера–Бернулли. Математическая модель представляет собой начально-краевую задачу для гибридной системы дифференциальных уравнений. Рассмотрены случаи быстрого и медленного вращения системы.

Изучается механическая система, состоящая из твердого тела и двух жестко связанных с ним упругих стержней. Каждый стержень имеет постоянное поперечное сечение и равномерно распределенную по длине массу. Поместим в центр массы твердого тела прямоугольную систему координат $OXYZ$, связанную с инерциальным пространством и расположенную так, чтобы стержни находились в плоскости OXY. С твердым телом свяжем систему координат $OX'Y'Z'$, расположив ее так, чтобы плоскости OXY и $OX'Y'$ совпадали. Система координат $O_1X_1Y_1Z_1$ также связана с твердым телом. Её начало помещено в точку заделки первого стержня, ось O_1X_1 направлена вдоль первого стержня, при этом оси O_1Z_1 и OZ параллельны. Аналогично расположена система координат $O_2X_2Y_2Z_2$. Механическая система может совершать вращательные движения вокруг оси OZ, относительно которой приложен момент управляющих сил $M(t)$. В рамках линейной теории прямолинейных стержней малого изгиба [1] положение механической системы характеризуется величинами поперечной деформации стержней $y_1(x_1,t)$ и $y_2(x_2,t)$ в точках x_1 и x_2 соответственно в момент времени t и углом поворота $\theta(t)$ между осями OX и OX'. Орты системы $OX'Y'Z'$ обозначены через $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Угол между осью OX' и прямой OO_1 обозначен через β_1, угол между осью OX' и осью OO_2 — через β_2. Угол, который образует первый стержень в невозмущенном состоянии с прямой OO_1, обозначен α_1. Угол, который образует второй стержень с прямой OO_2, обозначен α_2. Вид рассматриваемой механической системы приведен на Рис. 1.

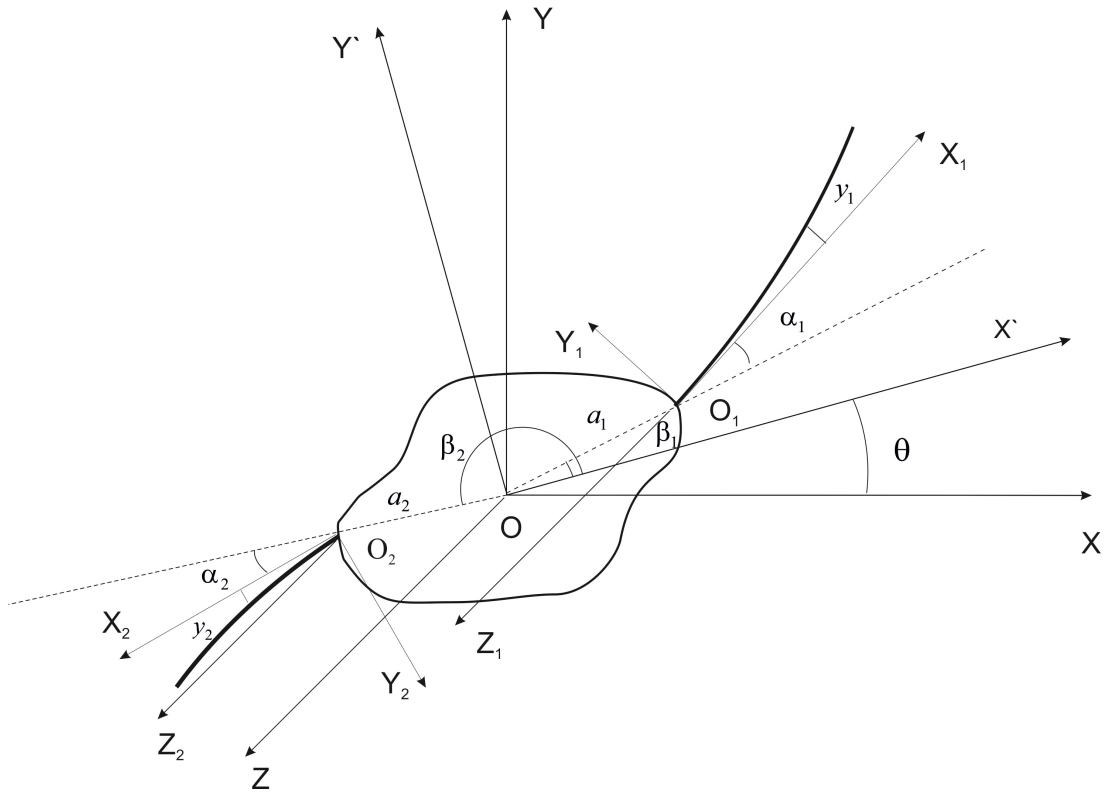

Рис. 1. Твердое тело с двумя упругими стержнями

Используя подход работы [2], выведем ее уравнения движения. Радиус-векторы точек стержней $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ в системе координат $OX'Y'Z'$ имеют следующий вид:

$$\vec{r}_i(x_i,t) = (a_i\cos\beta_i + x_i\cos(\alpha_i+\beta_i) - y_i\sin(\alpha_i+\beta_i))\,\vec{i} + \\ + (a_i\sin\beta_i + x_i\sin(\alpha_i+\beta_i) + y_i\cos(\alpha_i+\beta_i))\,\vec{j} \quad (i=1,2). \quad (1)$$

Для радиус-векторов точек недеформированных стержней $\vec{r}_{i0}$ справедливы выражения

$$\vec{r}_{i0} = (a_i\cos\beta_i + x_i\cos(\alpha_i+\beta_i))\,\vec{i} + (a_i\sin\beta_i + x_i\sin(\alpha_i+\beta_i))\,\vec{j} \quad (i=1,2).$$

Соответственно поперечные деформации стержней примут вид

$$\vec{y}_i(x_i,t) = \vec{r}_i(x_i,t) - \vec{r}_{i0}(x_i,t) = -y_i\sin(\alpha_i+\beta_i)\vec{i} + y_i\cos(\alpha_i+\beta_i)\vec{j} \quad (i=1,2). \quad (2)$$

Пусть $\vec{\omega}$ – угловая скорость и $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение системы. Соответственно имеем

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}, \quad \vec{\varepsilon} = \ddot{\theta}\vec{k}. \quad (3)$$

Согласно кинематике относительного движения ускорения $\vec{w}_i$ точки i-го стержня относительно системы координат $OXYZ$ вычисляются по формуле

$$\vec{w}_i(x_i,t) = \frac{d^2\vec{r}_i(x_i,t)}{dt^2} = \ddot{\vec{y}}_i(x_i,t) + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}_i(x_i,t) + 2\vec{\omega}\times\dot{\vec{y}}_i(x_i,t) - \dot{\theta}^2\vec{r}_i(x_i,t) \quad (i=1,2). \quad (4)$$

Здесь и в дальнейшем точкой над $y_i(x_i,t)$ обозначена производная по времени, вычисленная в системе координат $OX'Y'Z'$.

На i-м стержне зафиксируем точку P_i, разбивающую стержень на две части: от точки заделки до точки P_i и от точки P_i до свободного конца. Обозначим координату выбранной точки в системе $O_iX_iY_iZ_i$ через x_i. Момент сил инерции, приложенный ко второй части стержня относительно точки P_i, равен

$$\vec{N}_i(x_i,t) = m_i \int\limits_{x_i}^{l_i} (\vec{r}_i(s_i,t) - \vec{r}_i(x_i,t)) \times \vec{w}_i(s_i,t) ds_i,$$

где m_i – погонная масса i-го стержня ($i = 1,2$). Согласно (1)–(4) имеем

$$\begin{aligned}\vec{r}_i(s_i,t) - \vec{r}_i(x_i,t) = ((s_i - x_i)\cos(\alpha_i+\beta_i) - (y_i(s_i,t) - y_i(x_i,t))\sin(\alpha_i+\beta_i))\,\vec{i}+ \\ +((s_i - x_i)\sin(\alpha_i+\beta_i) + (y_i(s_i,t) - y_i(x_i,t))\cos(\alpha_i+\beta_i))\,\vec{j},\end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\vec{w}_i(s_i,t) = (-\ddot{y}_i(s_i,t)\sin(\alpha_i+\beta_i) - \ddot{\theta}y_i(s_i,t)\cos(\alpha_i+\beta_i) - \ddot{\theta}\,(a_i\sin\beta_i + s_i\sin(\alpha_i+\beta_i)) - \\ - 2\dot{\theta}\dot{y}_i(x_i,t)\cos(\alpha_i+\beta_i) - \dot{\theta}^2\,(a_i\cos\beta_i + s_i\cos(\alpha_i+\beta_i)) + \\ + \dot{\theta}^2 y_i(s_i,t)\sin(\alpha_i+\beta_i))\vec{i} + (\ddot{y}_i(x_i,t)\cos(\alpha_i+\beta_i) + \ddot{\theta}\,(a_i\cos\beta_i + s_i\cos(\alpha_i+\beta_i)) - \\ - \ddot{\theta}y_i(s_i,t)\sin(\alpha_i+\beta_i) - 2\dot{\theta}\dot{y}_i(x_i,t)\sin(\alpha_i+\beta_i) - \\ - \dot{\theta}^2\,(a_i\sin\beta_i + s_i\sin(\alpha_i+\beta_i)) - \dot{\theta}^2 y_i(s_i,t)\cos(\alpha_i+\beta_i))\vec{j} \quad (i = 1,2).\end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда, в рамках линейного приближения по $y_i, \dot{y}_i, \ddot{y}_i$ имеем выражение для $\vec{N}_i(x_i,t) = N_i(x_i,t)\vec{k}$, где

$$\begin{aligned}N_i(x_i,t) = m_i \int\limits_{x_i}^{l_i} \Big\{ (s_i - x_i)\ddot{y}_i(s_i) + \ddot{\theta}\big[(s_i - x_i)(s_i + a_i\cos\alpha_i) + (y_i(x_i,t) - y_i(s_i,t))a_i\sin\alpha_i\big] + \\ + \dot{\theta}^2\big[y_i(s_i,t)(x_i + a_i\cos\alpha_i) - y_i(x_i,t)(s_i + a_i\cos\alpha_i) + (s_i - x_i)a_i\sin\alpha_i\big]\Big\} ds_i\end{aligned} \quad (7)$$

($i = 1,2$). Согласно принятой модели стержней, момент (7) равен $-E_iI_iy_i''(x_i,t)$, где $-E_iI_i$ — жесткость i-го стержня. Здесь и ниже штрихом обозначается производная по пространственной переменной. В результате имеем уравнения

$$\begin{aligned}m_i \int\limits_{x_i}^{l_i} \Big\{ (s_i - x_i)\ddot{y}_i(s_i,t) + \ddot{\theta}\big[(s_i - x_i)(s_i + a_i\cos\alpha_i) + (y_i(x_i,t) - y_i(s_i,t))a_i\sin\alpha_i\big] + \\ + \dot{\theta}^2\big[y_i(s_i,t)(x_i + a_i\cos\alpha_i) - y_i(x_i)(s_i + a_i\cos\alpha_i) + \\ + (s_i - x_i)a_i\sin\alpha_i\big]\Big\} ds_i + E_iI_iy_i''(x_i,t) = 0 \quad (i = 1,2).\end{aligned} \quad (8)$$

Продифференцировав (8), дважды по переменной x_i, получаем следующие уравнения для поперечных смещений точек стержней:

$$m_i\ddot{y}_i(x_i,t)+E_iI_iy_i^{IV}(x_i,t)=-m_i(x_i+a_i\cos\alpha_i)\ddot{\theta}-$$
$$-a_im_i\big(y_i''(x_i,t)(l_i-x_i)-y_i'(x_i)\big)\ddot{\theta}\sin\alpha_i+m_i\big[y_i(x_i)-y_i'(x_i,t)(x_i+$$
$$+a_i\cos\alpha_i)+y_i''\int\limits_{x_i}^{l_i}(s_i+a_i\cos\alpha_i)ds_i-a_i\sin\alpha_i\big]\dot{\theta}^2\quad(i=1,2).\quad(9)$$

Уравнения (9) дополняются краевыми условиями в точке $x_i=0$ (точка заделки стержня) и в точке $x_i=l_i$ согласно (8)(свободный конец)

$$y_i(0,t)=y_i'(0,t)=0,\qquad y_i''(l_i,t)=y_i'''(l_i,t)=0\quad(i=1,2).\quad(10)$$

Уравнения (9) необходимо дополнить динамическим уравнением, выражающим изменение количества движения всей системы под действием момента внешних сил $\vec{M}(t)$

$$J_*\ddot{\theta}\vec{k}+m_1\int\limits_0^{l_1}\vec{r}_1\times\vec{w}_1\,dx_1+m_2\int\limits_0^{l_2}\vec{r}_2\times\vec{w}_2\,dx_2=\vec{M}(t),\quad(11)$$

где J_* — момент инерции твердого тела. Вычисляя в (11) интегралы, используя выражения (5),(6) и оставляя лишь линейные слагаемые по $y_i(.),\dot{y}_i(.),\ddot{y}_i(.)$, имеем выражение

$$m_i\int\limits_0^{l_i}\vec{r}_i(t)\times\vec{w}_i\,dx_i=(m_i\int\limits_0^{l_i}(x_i+a_i\cos\alpha_i)\ddot{y}_i(x_i,t)dx_i+m_i\ddot{\theta}\int\limits_0^{l_i}(a_i^2+2a_ix_i\cos\alpha_i+x_i^2)dx_i-$$
$$-2m_ia_i\sin\alpha_i\int\limits_0^{l_i}\frac{\partial}{\partial t}(y_i(x_i,t)\dot{\theta})dx_i))\vec{k}\quad(i=1,2).$$

В результате имеем уравнение, дополняющее уравнения (9),

$$J\ddot{\theta}+m_1\int\limits_0^{l_1}(x_1+a_1\cos\alpha_1)\,\ddot{y}_1(x_1,t)dx_1+m_2\int\limits_0^{l_2}(x_2+a_2\cos\alpha_2)\,\ddot{y}_2(x_2,t)dx_2-2m_1a_1\times$$
$$\times\sin\alpha_1\int\limits_0^{l_1}\frac{\partial}{\partial t}\left(y_1(x_1,t)\dot{\theta}\right)dx_1-2m_2a_2\sin\alpha_2\int\limits_0^{l_2}\frac{\partial}{\partial t}\left(y_2(x_2,t)\dot{\theta}\right)dx_2=M(t),\quad(12)$$

в котором

$$J=J_*+m_1\int\limits_0^{l_1}\left(x_1^2+2a_1x_1\cos\alpha_1+a_1^2\right)dx_1+m_2\int\limits_0^{l_2}\left(x_2^2+2a_2x_2\cos\alpha_2+a_2^2\right)dx_2.\quad(13)$$

Перейдем в (9),(10) и (12) к безразмерным переменным, положив $x'_i = x_i/l_0$, $y'_i(x'_i, t') = y_i(x_i, t)/l_0, a'_i = a_i/l_0, m'_i = m_i/m_0, E'_i = E_i/E_0, I'_i = I_i/I_0$ $(i = 1, 2)$, $J'_* = J_*/(m_0 l_0^3), M'(t') = M(t)/(m_0 l_0^3 \omega_0^2), t' = t\omega_0$, где l_0, m_0, E_0, I_0 — характерные размерные масштабы соответствующих величин, $\omega_0 = (E_0 I_0)^{1/2} m_0^{-1/2} l_0^{-2}$ — характерная частота колебаний.

Опустив штрих у новых безразмерных переменных, дополнив полученную систему уравнений начальными условиями и введя обозначение $\omega_i = (E_i I_i/m_i)^{1/2}$ $(i = 1, 2)$, получим следующую начально-краевую задачу:

$$J\ddot{\theta} + m_1 \int\limits_0^{l_1} (x_1 + a_1 \cos\alpha_1)\, \ddot{y}_1(x_1, t) dx_1 + m_2 \int\limits_0^{l_2} (x_2 + a_2 \cos\alpha_2)\, \ddot{y}_2(x_2, t) dx_2 - 2m_1 a_1 \times$$

$$\times \sin\alpha_1 \int\limits_0^{l_1} \frac{\partial}{\partial t}\Big(y_1(x_1, t)\dot{\theta}\Big)\, dx_1 - 2m_2 a_2 \sin\alpha_2 \int\limits_0^{l_2} \frac{\partial}{\partial t}\Big(y_2(x_2, t)\dot{\theta}\Big)\, dx_2 = M(t), \quad (14)$$

$$\ddot{y}_i(x_i, t) + \omega_i^2 y_i^{IV}(x_i, t) = -(x_i + a_i \cos\alpha_i)\ddot{\theta} -$$

$$- \big(y''_i(x_i, t)(l_i - x_i) - y'_i(x_i, t)\big) a_i \sin\alpha_i \ddot{\theta} + \big[y_i(x_i, t) - y'_i(x_i, t)(x_i +$$

$$+ a_i \cos\alpha_i) + y''_i \int\limits_{x_i}^{l_i} (s_i + a_i \cos\alpha_i) ds_i - a_i \sin\alpha_i\big]\dot{\theta}^2, \quad (15)$$

$$y_i(0, t) = y'_i(0, t) = 0, \qquad y''_i(l_i, t) = y'''_i(l_i, t) = 0, \quad (16)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \theta_1, \quad y_i(x_i, 0) = y_{i0}(x_i), \quad \dot{y}_i(x_i, 0) = y_{i1}(x_i) \quad (i = 1, 2), \quad (17)$$

которая является математической моделью рассматриваемой механической системы, построенной в рамках сформулированных ранее гипотез. В (14) величина J определяется согласно (13) с использованием безразмерных величин.

Отметим, что, учитывая соотношения порядков величин, входящих в уравнения движения (14),(15), некоторые члены в этих уравнениях при определенных условиях можно опустить. В теории прямолинейных стержней малого изгиба [1] упругие смещения, их первые и вторые производные по пространственной координате являются малыми величинами одного порядка

$$y \sim y_x \sim y_{xx} \sim \varepsilon \ll 1.$$

Отсюда следует, что если $\dot{\theta} \ll 1$ (медленное вращение), то в (14),(15) слагаемыми, содержащими $y_i(x_i, t)\dot{\theta}^2$, $y'_i(x_i, t)\dot{\theta}^2$, $y''_i(x_i, t)\dot{\theta}^2$, $y'_i(x_i, t)\ddot{\theta}$, $y''_i(x_i)\ddot{\theta}$, $\dot{y}_i(x_i, t)\dot{\theta}$, $y_i(x_i, t)\ddot{\theta}$ $(i = 1, 2)$, следует пренебречь как малыми величинами более высокого порядка по сравнению с ε. В терминах исходных размерных переменных выражение $\dot{\theta} \ll 1$ означает малость угловой скорости вращения стержня по сравнению с характерной частотой собственных упругих колебаний ω_0. Считаем, что угол поворота стержня ограничен, т.е. $\theta_T - \theta_0 \sim 1$. Тогда в силу уравнений (8),(12) выполняется соотношение $M \sim \varepsilon$, из которого вытекает, что время поворота системы из θ_0 в θ_T имеет порядок $T \sim \varepsilon^{-1/2}$, а угловая скорость во время движения имеет порядок

$\dot{\theta} \sim \varepsilon^{1/2}$, угловое ускорение $\ddot{\theta} \sim \varepsilon$. Следовательно, в (14),(15) члены, содержащие $y_i(x_i,t)\dot{\theta}^2$, $y_i'(x_i,t)\dot{\theta}^2$, $y_i''(x_i,t)\dot{\theta}^2$, $y_i'(x_i,t)\ddot{\theta}$, $y_i''(x_i)\ddot{\theta}$, $\dot{y}_i(x_i,t)\dot{\theta}$, $y_i(x_i,t)\ddot{\theta}$, являются величинами порядка ε^2 и должны быть опущены. Если же $\dot{\theta} \sim 1$, то указанные слагаемые в (14),(15) должны быть сохранены.

С учетом сказанного, в случае медленного вращения математической моделью рассматриваемой механической системы будет начально-краевая задача для системы уравнений

$$J\ddot{\theta} + m_1 \int\limits_0^{l_1} (x_1 + a_1\cos\alpha_1)\,\ddot{y}_1(x_1,t)dx_1 + m_2 \int\limits_0^{l_2} (x_2 + a_2\cos\alpha_2)\,\ddot{y}_2(x_2,t)dx_2 = M(t),$$

$$\ddot{y}_i(x_i,t) + \omega_i^2 y_i^{IV}(x_i,t) = -(x_i + a_i\cos\alpha_i)\ddot{\theta} - a_i\sin\alpha_i\dot{\theta}^2 \quad (i = 1,2)$$

с краевыми и начальными условиями (16), (17).

Список литературы

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с. (English transl.: *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Theory of Elasticity (Volume 7 of A Course of Theoretical Physics). Pergamon Press, 1970.)

2. *Кубышкин Е.П.* Уравнения движения одной механической системы, моделирующей динамику манипуляционного робота // Математика, кибернетика, информатика: труды международной научной конференции памяти А.Ю. Левина / Под редакцией С.А. Кащенко, В.А. Соколова / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2008. С. 100–103. (*Kubyshkin E.P.* Uravneniya dvizheniya odnoy mekhanicheskoy sistemy, modeliruyushchey dinamiku manipulyatsionnogo robota // Matematika, kibernetika, informatika: trudy mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii pamyati A.Yu. Levina / Pod redaktsiyey S.A. Kaschenko, V.A. Sokolova / Yarosl. gos. un-t. Yaroslavl, 2008. S. 100–103 [in Russian].)

Equations of Motion of a Rigid Body with Two Elastic Rods

Eliseev D. A., Kubyshkin E. P.

P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: mathematical model, mechanical system, equations of motion, solid, elastic rod, hybrid system of differential equations

In the paper we propose a mathematical model of a mechanical system consisting of a rigid body and two rigidly connected elastic straight rods located in the same plane. The system rotates around the axis passing through the mass center of a rigid body and perpendicular to the plane of the rods. The rods are modeled by the Euler–Bernoulli beam. The mathematical model is an initial-boundary value problem for a hybrid system of differential equations. The cases of fast and slow rotations of the system are considered.

Сведения об авторах:
Елисеев Дмитрий Андреевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, аспирант,
Кубышкин Евгений Павлович,
д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования