MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS, VOL. 27, NO. 1, 2020
journal homepage: www.mais-journal.ru

DISCRETE MATHEMATICS IN RELATION TO COMPUTER SCIENCE

Calculation of Derivatives in the L_p Spaces where $1 \le p \le \infty$

A. N. Morozov[1]

DOI: 10.18255/1818-1015-2020-1-124-131

[1]P. G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya, Yaroslavl 150003, Russia.

MSC2020: 41A35, 41A45, 65D25
Research article
Full text in Russian

Received February 9, 2020
After revision February 26, 2020
Accepted February 28, 2020

It is well known in functional analysis that construction of k-order derivative in Sobolev space W_p^k can be performed by spreading the k-multiple differentiation operator from the space C^k. At the same time there is a definition of (k,p)-differentiability of a function at an individual point based on the corresponding order of infinitesimal difference between the function and the approximating algebraic polynomial k-th degree in the neighborhood of this point on the norm of the space L_p. The purpose of this article is to study the consistency of the operator and local derivative constructions and their direct calculation. The function $f \in L_p[I]$, $p > 0$, (for $p = \infty$, we consider measurable functions bounded on the segment I) is called $(k;p)$-differentiable at a point $x \in I$ if there exists an algebraic polynomial of π of degree no more than k for which holds $\|f - \pi\|_{L_p[J_h]} = o(h^{k+\frac{1}{p}})$, where $J_h = [x_0 - h; x_0 + h] \cap I$. At an internal point for $k = 1$ and $p = \infty$ this is equivalent to the usual definition of the function differentiability. The discussed concept was investigated and applied in the works of S. N. Bernshtein [1], A. P. Calderon and A. Sigmund [2]. The author's article [3] shows that uniform (k,p)-differentiability of a function on the segment I for some $p \ge 1$ is equivalent to belonging the function to the space $C^k[I]$ (existence of an equivalent function in $C^k[I]$). In present article, integral-difference expressions are constructed for calculating generalized local derivatives of natural order in the space L_1 (hence, in the spaces L_p, $1 \le p \le \infty$), and on their basis - sequences of piecewise constant functions subordinate to uniform partitions of the segment I. It is shown that for the function f from the space W_p^k the sequence piecewise constant functions defined by integral-difference k-th order expressions converges to $f^{(k)}$ on the norm of the space $L_p[I]$. The constructions are algorithmic in nature and can be applied in numerical computer research of various differential models.

Keywords: Differentiability of Function in the Spaces L_p; Differences for the Space L_1; Numerical Finding of Derivatives on a Computer; The Spreading of the Differentiation Operator

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anatoly Nikolaevich Morozov | orcid.org/0000-0001-9940-159X. E-mail: moroz@uniyar.ac.ru
PhD.

For citation: A. N. Morozov, "Calculation of Derivatives in the L_p Spaces where $1 \le p \le \infty$", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 27, no. 1, pp. 124-131, 2020.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ, ТОМ 27, № 1, 2020
сайт журнала: www.mais-journal.ru

DISCRETE MATHEMATICS IN RELATION TO COMPUTER SCIENCE

Вычисление производных в пространствах L_p, $1 \le p \le \infty$

А. Н. Морозов[1]

DOI: 10.18255/1818-1015-2020-1-124-131

[1]Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, 14, Ярославль, 150003 Россия.

УДК 519.65
Научная статья
Полный текст на русском языке

Получена 9 февраля 2020 г.
После доработки 26 февраля 2020 г.
Принята к публикации 28 февраля 2020 г.

В функциональном анализе хорошо известно рассуждение о построении производных k-го порядка в пространствах Соболева W_p^k при помощи распространения оператора k-кратного дифференцирования с пространства C^k. В то же время имеется определение (k,p)-дифференцируемости функции в индивидуальной точке, основанное на соответствующего порядка бесконечно малом отличии функции от приближающего её алгебраического многочлена k-ой степени в окрестности этой точки по норме пространства L_p. Целью данной статьи является исследование согласованности операторного и локального построений производной и непосредственное их вычисление. Функция $f \in L_p[I]$, $p > 0$, (при $p = \infty$ рассматриваются измеримые ограниченные на отрезке I функции) называется (k,p)-дифференцируемой в точке $x \in I$, если существует алгебраический многочлен π степени не больше k, для которого выполняется $\|f - \pi\|_{L_p[J_h]} = o(h^{k+\frac{1}{p}})$, где $J_h = [x-h; x+h] \cap I$. Во внутренней точке при $k = 1$ и $p = \infty$ это равносильно определению обычной дифференцируемости функции. Обсуждаемое понятие исследовалось и применялось в работах С. Н. Бернштейна [1], А. П. Кальдерона и А. Зигмунда [2]. В статье автора [3] показано, что равномерная (k,p)-дифференцируемость функции на отрезке I при некотором $p \ge 1$, равносильна принадлежности этой функции пространству $C^k[I]$ (существованию эквивалентной функции в $C^k[I]$). В настоящей статье построены интегрально-разностные выражения для вычисления обобщённых локальных производных натурального порядка в пространстве L_1 (следовательно, в пространствах L_p, $1 \le p \le \infty$), а на их основе – последовательности кусочно-постоянных функций, подчинённых равномерным разбиениям отрезка. Показано, что для функции f из пространства W_p^k последовательность кусочно-постоянных функций, определённых посредством интегрально-разностных выражений k-го порядка, сходится к $f^{(k)}$ по норме пространства $L_p[I]$. Построения имеют алгоритмический характер, и могут быть применены в численном исследовании на ЭВМ различных дифференциальных моделей.

Ключевые слова: Дифференцируемость функции в пространствах L_p; разностные выражения для пространства L_1; численное нахождение производных на ЭВМ; распространение оператора дифференцирования

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Анатолий Николаевич Морозов	orcid.org/0000-0001-9940-159X. E-mail: moroz@uniyar.ac.ru канд. физ.-мат. наук, доцент.

Для цитирования: A. N. Morozov, “Calculation of Derivatives in the L_p Spaces where $1 < p \le \infty$”, *Modeling and analysis of information systems*, vol. 27, no. 1, pp. 124-131, 2020.

1. Введение и основные обозначения

Как обычно, $L_p[I]$ обозначает пространство действительных измеримых функций, интегрируемых в степени p $(0 < p < \infty)$ по Лебегу на отрезке $I = [a; b]$,

$$\|f\|_{L_p[I]} = \Big(\int\limits_I |f(x)|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}};$$

при $p = \infty$ всюду ниже рассматривается $B[I]$ – пространство измеримых ограниченных на отрезке I функций, –

$$\|f\|_{B[I]} = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Введём для краткости записи семейство пространств

$$X_p[I] = \begin{cases} L_p[I] & \text{при} \;\; p < \infty, \\ B[I] & \text{при} \;\; p = \infty. \end{cases}$$

Когда неясность исключена, сокращаем обозначения до X_p и $\|f\|_p$. Длину I обозначаем $|I|$.

Также используются $(k \in \mathbb{N})$ $C^k = C^k[I]$ – пространство k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке I функций, – и $(1 \le p < \infty)$

$W_p^k = W_p^k[I] = \Big\{ f \, : \, f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна на отрезке $I, f^{(k)} \in L_p[I] \Big\}$,

с нормами $\|f\|_p + \|f^{(k)}\|_p$.

Определение 1. *Функция $f \in X_p[I]$ называется (k, p)-дифференцируемой в точке $x \in I$, если существует алгебраический многочлен π степени не больше k, для которого выполняется*

$\|f - \pi\|_{X_p[J_{x,h}]} = o(h^{k+\frac{1}{p}})$, *при* $h \longrightarrow 0$, *где* $J_{x,h} = [x - h; x + h] \cap I$.

Такой многочлен может быть только один, его часто называют тейлоровским. Во внутренней точке x при $k = 1$ и $p = \infty$ данное определение совпадает с определением обычной дифференцируемости (существованием производной), но в общем случае из (k, ∞)-дифференцируемости в точке не следует существование k-й производной.

Классическим примером является функция

$$f(x) = \begin{cases} x^{k+1} \sin(\frac{1}{x^k}), & x \ne 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

которая (m, ∞)-дифференцируема в нуле для $m = 1, \; \ldots, \; k$, но имеет в этой точке лишь одну обычную производную.

Следующий пример иллюстрирует особенности (k, p)-дифференцируемости при $p < \infty$. Рассмотрим для определённости чётную функцию f, $f(0) = 1$, задаваемую на $(0; 1]$ формулой

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x),$$

где

$$f_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in H_j = \left(\frac{1}{2^j} - \frac{1}{2^{j^2+2}}; \frac{1}{2^j} \right), \\ 0, & x \notin H_j. \end{cases}$$

Для каждого $0 < h \le \frac{1}{2}$ пусть $n \in \mathbb{N}$ таково, что $\frac{1}{2^{n+1}} < h \le \frac{1}{2^n}$. Если $\pi \equiv 0$, при всех $0 < p < \infty$ выполняется

$$\|f - \pi\|^p_{L_p[-h;h]} \le \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^{j^2+1}} < \frac{1}{2^{n^2}}.$$

Из чего следует, что f является (k, p)-дифференцируемой в нуле при любых рассматриваемых k и $p < \infty$.

С целью полноты освещения вопроса приведём следующее утверждение.

Предложение 1. *Если функция f является (k,p)-дифференцируемой $(0 < p \le \infty)$ в точке $x \in I$, то она является (m,p)-дифференцируемой в этой точке, $m = 1, \ldots, k-1$. При этом тейлоровский многочлен из условия (m,p)-дифференцируемости представляет собой соответствующую часть тейлоровского многочлена π из условия (k,p)-дифференцируемости, записанного в виде*

$$\pi(t) = a_0 + a_1(t-x) + \cdots + a_m(t-x)^m + \cdots + a_k(t-x)^k.$$

Доказательство. Без потери общности будем считать, что $x = 0$ и является левым краем отрезка I. По условию существует алгебраический многочлен
$\pi(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m + \cdots + a_k t^k$ такой, что $\|f-\pi\|_{L_p[0;h]} = o(h^{k+\frac{1}{p}})$ при $h \longrightarrow 0$. Пусть $p_* = \min\{p\,;1\}$. Получаем

$$\|f-(a_0+\cdots+a_m t^m)\|^{p_*}_{L_p[0;h]} \le \|f-\pi\|^{p_*}_{L_p[0;h]} + \|a_{m+1}t^{m+1}+\cdots+a_k t^k\|^{p_*}_{L_p[0;h]}$$

$$\le \|f-\pi\|^{p_*}_{L_p[0;h]} + \sum_{j=m+1}^{k} \left(|a_j|h^{j+\frac{1}{p}}\right)^{p_*} = o\Big(\left(h^{m+\frac{1}{p}}\right)^{p_*}\Big).$$

□

Для (k,p)-дифференцируемой в точке x функции f будем применять обозначение $f_p^{(k)}(x) \overset{\text{def}}{=} k!\cdot a_k$, где a_k – коэффициент при степени k многочлена из условия (k,p)-дифференцируемости.

В работах С. Н. Бернштейна [1], А. П. Кальдерона и А. Зигмунда [2] были даны приложения такого понятия к построению описания функциональных пространств $(p = \infty)$ и изучению локальных свойств решений дифференциальных уравнений $(1 \le p \le \infty)$ соответственно.

В статье [3] автором рассмотрена ситуация с равномерной (k,p)-дифференцируемостью функции на отрезке. (В таком случае, в частности, определена функция $f_p^{(k)}$.)

Замечание. В этой статье доказательства проводились на основе методов локальных приближений функций алгебраическими многочленами, поэтому для выстраивания общей схемы рассуждения при $p = \infty$ в качестве базового рассматривалось пространство непрерывных на отрезке I функций $C[I]$. Из Предложения 1, приведённого выше, сразу следует (рассмотрев $m = 0$), что применительно к исследованию равномерной (k,∞)-дифференцируемости это равносильно использованию пространства $B[I]$.

Определение 2. *(k,p)-дифференцируемая $(0 < p \le \infty)$ во всех точках отрезка I функция f называется равномерно (k,p)-дифференцируемой на I, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для каждой точки $x \in I$ выполняется $\|f-\pi\|_{X_p[J_{x,h}]} < \varepsilon \cdot h^{k+\frac{1}{p}}$ при $0 < h < \delta$, $J_{x,h} = [x-h;\ x+h] \cap I$, где π – многочлен из условия (k,p)-дифференцируемости в точке x.*

Теорема 1 ([3]). *Если функция f равномерно (k,p)-дифференцируема на I при некотором $p \ge 1$, то $f \in C^k[I]$, $f_p^{(k)} = f^{(k)}$ (находится в классе эквивалентных функций).*

Любая функция f из $C^k[I]$ является, конечно, равномерно (k,p)-дифференцируемой на I при всех $0 < p \le \infty$.

Изучение (k,p)-дифференцируемости функции на отрезке тесно связано с продолжением оператора k-кратного дифференцирования $(\Lambda_p^k,\ 0 < p < \infty,)$ первоначально определённого на пространстве C^k (см. [4]), а также разработкой численных алгоритмов исследования дифференциальных моделей.

2. Вычисление производных в пространствах $L_p, p \geq 1$

Актуальным вопросом в обсуждаемой тематике является вычисление тейлоровских производных (коэффициентов многочлена, определяющего гладкость функции).

Пусть $f \in L_1[a;b]$. Рассмотрим для $h>0$ и $x \in [a;\ b-h]$ «одностороннюю» функцию Стеклова: $S_h(f,x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} f(t)dt$. Далее, для $x \in [a;\ b-(k+1)h]$, положим

$$\Delta_h^k(f,x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} S_h(f, x+jh). \tag{1}$$

Отметим, если $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, то $S_h(f,x) = \dfrac{\Delta_h^1(F,\ x)}{h}$ и

$$\Delta_h^k(f,x) = \Delta_h^k\left(\frac{1}{h}\ \Delta_h^1(F), x\right) = \frac{1}{h}\ \Delta_h^{k+1}(F,x),$$

где

$$\Delta_h^m(F,x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} F(x+jh), \quad m \in \mathbf{N},$$

– обычная m-я разность функции F в точке x.

Для $h<0$ в формуле (1) рассматриваются значения $x \in [a+(k+1)h;\ b]$.

Замечание. Конструкции на основе функции Стеклова применялись в пространствах L_p при построении разностных выражений и аналогов модулей гладкости (см., например, [5]), но они включают в себя и значения функции в отдельных точках, от чего в некоторых ситуациях логично отказаться. В статье [6] вычислительная конструкция на основе только $S_h(f,x)$ применялась для нахождения k-ой производной функции $f \in C^k$.

Предложение 2. *Если функция f является (k,p)-дифференцируемой, $p \geq 1$, в точке $x \in (a;b)$, то существуют*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_h^m(f,x)}{h^m} = f_p^{(m)}(x), \quad m = 1, \ldots, k.$$

Для $x=a$ или $x=b$ рассматриваются односторонние пределы.

Доказательство. При $p>1$, естественно, $f_p^{(m)}(x) = f_1^{(m)}(x)$. Без потери общности будем считать $x=a=0$ и рассматривать $h>0$. Из условия получаем, что выполняется

$$\left\| f - (a_0 + \cdots + a_m t^m + \cdots + a_k t^k) \right\|_{L_1[0;\,(k+1)h]} = o(h^{k+1}) \text{ при } h \to 0.$$

Применяя Предложение 1 при $m=1, \ldots, k$, запишем
$f(t) = a_0 + \cdots + a_m t^m + \gamma_m(t)$, где функция γ_m такова, что
$\int\limits_0^{(m+1)\cdot u} \left|\gamma_m(t)\right| dt = o(u^{m+1})$, $u>0$. Получаем

$$\frac{\Delta_h^m(f,0)}{h^m} = \frac{\Delta_h^{m+1}(F,0)}{h^{m+1}} = \frac{1}{h^{m+1}}\ \Delta_h^{m+1}\left(a_0 u + \cdots + a_m \frac{u^{m+1}}{m+1} + \int_0^u \gamma_m(t)dt,\ 0\right).$$

Для конечных разностей хорошо известно соотношение (см., например, [7], с. 159 или [8], с. 54):

$$\Delta_h^{m+1}(u^j, x) = (m+1)!\ h^{m+1}\ \delta_{j,\ m+1}, \quad j = 0,\ 1,\ \dots,\ m+1,$$

где $\delta_{j,i}$ – символ Кронекера. Если $\Gamma_m(u) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^u \gamma_m(t)dt = o\Big(\big(\frac{u}{m+1}\big)^{m+1}\Big)$, то $\Delta_h^{m+1}\big(\Gamma_m, 0\big) = o(h^{m+1})$. Что влечёт

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h^m(f,0)}{h^m} = m!\ a_m = f_p^{(m)}(0).$$

□

По заданной функции $f \in L_1[a;b]$ и разбиению $\tau_n = \{[x_{i-1};x_i)\}_{i=1}^n$ полуинтервала $[a;b)$ на равные полуинтервалы построим ступенчатую функцию, определяемую формулой

$$\Lambda_n^m[f](x) = \frac{\Delta_h^m(f,\ x_{i-1})}{h^m} \quad \text{при } x \in [x_{i-1}; x_i)$$

(заключительный справа полуинтервал замыкаем), где $h = \frac{b-a}{n(m+1)}$.

Теорема 2. *Пусть $p \geq 1$. Если функция f является (k,p)-дифференцируемой в точке $x \in [a;b]$, то в этой точке последовательность $\big\{\Lambda_n^m[f]\big\}$ при $n \longrightarrow \infty$ сходится к $f_p^{(m)}(x)$, $m = 1, \dots, k$. Если f равномерно (k,p)-дифференцируема на $[a;b]$, то $f \in C^k$ и $\big\{\Lambda_n^m[f]\big\}$ сходится равномерно к $f^{(m)}$, $m = 1, \dots, k$.*

Доказательство. По условию для $m = 1, \dots, k$ имеем

$$f(t) = a_0(x) + a_1(x)\cdot(t-x) + \dots + a_m(x)\cdot(t-x)^m + \gamma_m(x,t),$$

где функция γ_m такова, что $\big\|\gamma_m\big\|_{L_1[J_{x,u}]} = o(u^{m+1})$ для $J_{x,u} = [x-(m+1)\cdot u;\ x+(m+1)\cdot u] \cap [a;b]$, $u > 0$.

При доказательстве первого утверждения без потери общности будем считать, что $a < 0$, $b > 0$, $x = 0$. Для краткости вместо $\gamma_m(0,t)$ пишем $\gamma_m(t)$. Рассмотрим некоторое разбиение τ_n отрезка $[a;b]$. Пусть полуинтервал $J_i = [x_{i-1}; x_i)$, $1 \leq i \leq n$, (при $i = n$ – отрезок $[x_{n-1}; x_n]$) из τ_n содержит точку 0. Получаем

$$\left|\Lambda_n^m[f](0) - f_p^{(m)}(0)\right| = \left|\frac{\Delta_h^m\left(a_m t^m + \gamma_m(t)\right),\ x_{i-1})}{h^m} - m!\ a_m\right| = \left|\frac{\Delta_h^m\left(\gamma_m(t)\right),\ x_{i-1})}{h^m}\right|.$$

Пусть $(m+1)\cdot u = \max\{-x_{i-1},\ x_i\}$, тогда $u \leq h \leq 2u$ и, следовательно (см. Предложение 2),

$$\Delta_h^m\left(\gamma_m(t)\right), x_{i-1}) = o(h^m).$$

Поскольку условие $n \longrightarrow \infty$ влечёт $h \longrightarrow 0$, то получаем нужное утверждение.

Если f равномерно (k,p)-дифференцируема на отрезке, из Теоремы 1 следует $f \in C^k$. Поэтому $f_p^{(m)} = f^{(m)}$, $m = 1, \dots, k$, и равномерно по x выполняется $\big\|\gamma_m(x,t)\big\|_{L_1[J_{x,t-x}]} = o((t-x)^{m+1})$, значит, $\big\{\Lambda_n^m[f]\big\}$ сходится равномерно к $f^{(m)}$. □

Следствие 1. *Если $f \in W_1^k$, то $\big\{\Lambda_n^k[f]\big\} \xrightarrow{\text{п.в.}} f^{(k)}$ при $n \longrightarrow \infty$.*

Теорема 3. *Если $f \in W_p^k$, то $\left\{ \Lambda_n^k[f] \right\}$ сходится в пространстве L_p.*

Доказательство. Оценим сначала в условиях теоремы $\left\| \Lambda_n^k[f] \right\|_p$ при произвольном значении $n \in \mathbf{N}$. По определению,

$$\left\| \Lambda_n^k[f] \right\|_p = \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\Delta_h^k(f,\ x_{i-1})}{h^k} \right|^p (k+1)h \right)^{\frac{1}{p}} = (k+1)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\Delta_h^{k+1}(F,\ x_{i-1})}{h^{k+1}} \right|^p h \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Для $(k+1)$-й разности функции из W_1^{k+1} выполняется (см. [8], с. 137)

$$\Delta_h^{k+1}(F, x) = h^{k+1} \int\limits_0^{(k+1)h} \frac{N_{k+1}(t/h)}{h} F^{(k+1)}(x+t)\, dt,$$

где N_{k+1} – нормализованный B-сплайн порядка $k+1$ с узлами в точках $0,\ 1, \cdots, k+1$. То есть N_{k+1} – неотрицательная кусочно-полиномиальная функция степени k, принадлежащая пространству $C^{k-1}(-\infty; \infty)$, имеющая носитель $(0;\ k+1)$ с $k+2$ равноотстоящими узлами на нём (включая конечные точки интервала) и обладающая свойством $\int\limits_0^{k+1} N_{k+1}(t)\ dt = 1$ ([8], с. 128, формула (4.40)). Кроме того, $\|N_{k+1}\|_{B[0;\ k+1]} \le 1$ ([8], с. 125, формула (4.32)).

Рассмотрим отдельно случай $p = 1$. Очевидно

$$\left\| \Lambda_n^k[f] \right\|_1 = (k+1) \sum_{i=1}^n \left| \int\limits_0^{(k+1)h} N_{k+1}(t/h)\, f^{(k)}(x_{i-1}+t)\, dt \right| \le (k+1) \cdot \left\| f^{(k)} \right\|_1.$$

Пусть $1 < p < \infty$. Тогда по интегральному неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \left\| \Lambda_n^k[f] \right\|_p &\le (k+1)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\int\limits_0^{(k+1)h} \left(\frac{N_{k+1}(t/h)}{h} \right)^{\frac{p}{p-1}} dt \right)^{p-1} \left(\int\limits_0^{(k+1)h} \left| f^{(k)}(x_{i-1}+t) \right|^p dt \right) h \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (k+1)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^{(k+1)h} \left(N_{k+1}(t/h) \right)^{\frac{p}{p-1}} d(t/h) \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left| f^{(k)}(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \le \\ &\le (k+1)^{\frac{1}{p}} \cdot \left\| f^{(k)} \right\|_p. \end{aligned} \tag{2}$$

Заключительное неравенство в преобразованиях основано на том, что из свойств $\|N_{k+1}\|_{B[0;\ k+1]} \le 1$ и $\|N_{k+1}\|_{L_1[0;\ k+1]} = 1$ вытекает $\|N_{k+1}\|_{L_q[0;\ k+1]} \le 1$ при любом $1 < q < \infty$.

Для заданных функции $f \in W_p^k$ и $\varepsilon > 0$ найдётся функция $f_\varepsilon \in C^k$ такая, что $\left\| f^{(k)} - f_\varepsilon^{(k)} \right\|_p < \varepsilon$. Получаем, что в неравенстве

$$\left\| \Lambda_n^k[f] - f^{(k)} \right\|_p \le \left\| \Lambda_n^k[f] - \Lambda_n^k[f_\varepsilon] \right\|_p + \left\| \Lambda_n^k[f_\varepsilon] - f_\varepsilon^{(k)} \right\|_p + \left\| f^{(k)} - f_\varepsilon^{(k)} \right\|_p$$

первое и третье слагаемые в правой части могут быть сделаны одновременно достаточно малыми за счёт выбора функции f_ε (неравенство (2)), а второе слагаемое станет меньше любой требуемой величины, начиная с некоторого соответственно большого номера n. □

References

[1] S. Bernstein, “On the Question of Local Best Approximation of Functions”, in *Dokl. USSR Acad. Sci*, vol. 26, 1940, pp. 839–842.

[2] A. Calderón and A. Zygmund, “Local properties of solutions of elliptic partial differential equations”, in *Selected Papers of Antoni Zygmund*, Springer, 1989, pp. 285–339.

[3] A. Morozov, “On Taylor Differentiability in the Spaces L_p, $0 < p \leq \infty$”, *Modeling and analysis of inform. systems*, vol. 25, no. 3, pp. 323–330, 2018.

[4] A. Morozov, “Local approximations of differentiable functions.”, *Math. Notes*, vol. 100, no. 2, pp. 256–262, 2016.

[5] V. Abilov and F. Abilova, “Problems in the approximation of 2π-periodic functions by Fourier sums in the space $L_2(2\pi)$”, *Math. Notes*, vol. 76, pp. 749–757, 2004.

[6] A. Khromov and G. Khromova, “Discontinuous Steklov operators in the problem of uniform approximation of derivatives on an interval”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 54, no. 9, pp. 1389–1394, 2014.

[7] V. Dzyadyk, *Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials*. Nauka, 1977.

[8] L. Schumaker, *Spline Functions: Basic Theory*. Wiley, New York, 1981.