Модел. и анализ информ. систем. Т. **19**, № **1** (2012) 69–83

УДК 541.1

Задача адаптации обобщенного нейронного элемента

Коновалов Е.В.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: kinnarts@mail.ru

получена 23 мая 2011

Ключевые слова: нейронные сети, модели нейронных элементов, обобщенный нейронный элемент, пачечная активность, адаптация в нейронных сетях

Изучается перспективная нейронная модель — обобщенный нейронный элемент (ОНЭ). Эта модель носит универсальный характер, объединяя свойства нейрона-автогенератора и нейрона-детектора. Ставится и решается задача адаптации обобщенного нейронного элемента автогенераторного типа.

Модель обобщенного нейронного элемента (ОНЭ) была предложена автором настоящей статьи в [1] под первоначальным названием обобщенного нейронного автомата (ОНА). Изменение названия не повлекло за собой никакого содержательного изменения самой модели, следовательно, и полученных ранее результатов. Поэтому всюду, где обсуждаются уже имеющиеся результаты, термины "элемент" и "автомат" в названии модели или соответствующих сетей будут употребляться как синонимы.

Как отмечалось в [1], модель обобщенного нейронного элемента является универсальной в том смысле, что при определенном выборе параметров элемент функционирует как детектор, а при другом выборе параметров — как автогенератор (пейсмейкер). Ранее в статье [2] изучалось поведение обобщенного нейронного элемента под действием пачечной активности, то есть периодически повторяющихся последовательностей импульсов. Было доказано, что, при выполнении ряда априорных условий, периодическая пачечная активность навязывает отдельному элементу периодический режим генерации импульсов. Параметры данного режима известны заранее. Этот результат, с незначительными изменениями, был получен для элементов как автогенераторного, так и детекторного типов. Одним из возможных применений этого результата является его использование в задачах, связанных с адаптацией обобщенных нейронных элементов. Под адаптацией здесь понимается плавное изменение некоторых синаптических весов в процессе функционирования нейронной сети из обобщенных нейронных элементов. Наиболее простой задачей такого рода является адаптация одного обобщенного нейронного элемента. Эта задача для элемента автогенераторного типа и рассматривается в настоящей статье.

Приведем формальное описание модели обобщенного нейронного элемента. Это — нейронная модель, функционирующая в непрерывном времени, которая задается набором следующих параметров:

- p — пороговое значение мембранного потенциала;
- r — равновесное значение мембранного потенциала;
- α — скоростной параметр;
- T_R — продолжительность периода рефрактерности (абсолютной невосприимчивости к внешнему воздействию);
- n — количество входов (синапсов);
- m — количество выходов (синапсов);
- $q_1, q_2, \dots, q_n$ — величины синаптических весов;
- T_m — продолжительность периода синаптического воздействия (время жизни медиаторов), $T_m < T_R$.

Положительные величины p, r, α, T_R и T_m не меняются с течением времени и одинаковы для всех элементов, входящих в состав нейронных сетей, состоящих из ОНЭ. Число входов n ($n = 1, 2, \dots$) и выходов m ($m = 0, 1, \dots$) для каждого элемента фиксировано, но, вообще говоря, может быть неодинаковым для разных элементов, в зависимости от архитектуры конкретной нейронной сети. Входы каждого элемента (как синонимы будут использоваться термины "синаптические входы" или "синапсы") характеризуются величинами $q_1, q_2, \dots, q_n$, где n — число входов данного элемента. Синаптические веса q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) определяют эффективность входного воздействия. Если вес данного конкретного синаптического входа положителен, то воздействие через данный синапс считается возбудительным, в противном случае — тормозным. Каждый такой вес характеризует однонаправленную синаптическую связь, которая соединяет выход одного элемента и вход другого. В настоящей работе рассматриваются только связи с положительными весами.

Внутреннее состояние элемента в момент времени t задается следующими функциями:

- $u(t)$ — функция зависимости величины мембранного потенциала от момента времени t;
- $s(t)$ — состояние элемента;
- $\sigma(t)$ — мгновенный выходной импульс.

Функция $s(t)$ принимает следующие значения:

$$s(t) = \begin{cases} \text{восприимчивость} \\ \text{генерация импульса} \\ \text{рефрактерность} \end{cases}.$$

Функция $\sigma(t)$ равна единице, когда элемент генерирует выходной импульс (спайк). Этот импульс поступает на все m выходов данного элемента. В остальные моменты времени $\sigma(t) = 0$.

Входные импульсы $\sigma_1(t)$,$\sigma_2(t)$,...,$\sigma_n(t)$ (n — число входов данного элемента) зависят от момента времени t. Здесь $\sigma_i(t) = 1$ во все такие моменты времени t, когда по i-му входу пришел импульс ($i = 1, 2, \ldots, n$). В остальные моменты времени $\sigma_i(t) = 0$.

Введем вспомогательные функции $\sigma_1^m(t)$,$\sigma_2^m(t)$,...,$\sigma_n^m(t)$. При каждом отдельном $i = 1, 2, \ldots, n$ положим $\sigma_i^m(t) = 1$ при всех $t \in [t^*; t^* + T_m]$, где t^* такие, что одновременно $s(t^*) = \{\text{восприимчивость}\}$ и $\sigma_i(t^*) = 1$. В остальные моменты времени $\sigma_i^m(t) = 0$. Таким образом, функции $\sigma_i^m(t)$ — ступенчатого вида. Ступени имеют единичную высоту и длину, равную величине T_m.

Опишем теперь функционирование обобщенного нейронного элемента. В произвольный момент времени t возможен один из трех вариантов:

- ОНЭ генерирует импульс, т.е. $s(t) = \{\text{генерация импульса}\}$;
- ОНЭ находится в состоянии рефрактерности, т.е. $s(t) = \{\text{рефрактерность}\}$;
- ОНЭ находится в состоянии восприимчивости, т.е. $s(t) = \{\text{восприимчивость}\}$.

I. Пусть $s(t) = \{\text{генерация импульса}\}$. При этом $u(t) = p$, $\sigma(t) = 1$. Выходной импульс распространяется по всем синаптическим выходам данного элемента. Импульс происходит мгновенно, после чего элемент переходит в состояние рефрактерности. То есть при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$: $s(t + \varepsilon) = \{\text{рефрактерность}\}$.

II. Пусть $s(t) = \{\text{рефрактерность}\}$. Тогда $u(t) = 0$, $\sigma(t) = 0$. В состоянии рефрактерности элемент невосприимчив к внешнему воздействию. Элемент находится в состоянии рефрактерности в течение промежутка времени T_R с момента генерации спайка, после чего переходит в состояние восприимчивости. То есть $s(t_1^{sp} + T_R) = \{\text{восприимчивость}\}$, где

$$t_1^{sp} = \max_{\tau < t} \{\tau : \sigma(\tau) = 1\}. \tag{1}$$

III. Пусть $s(t) = \{\text{восприимчивость}\}$. Тогда $\sigma(t) = 0$, а функция мембранного потенциала $u(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{u} = \alpha(r + q - u), \tag{2}$$

где r — равновесное значение мембранного потенциала, α — скоростной параметр, а величина q определяется следующим образом:

$$q = \sum_{i=1}^{n} q_i \sigma_i^m(t).$$

В качестве начального условия для уравнения (2) берется значение $u(t^0)$, которое определяется следующим образом:

$$u(t^0) = u(t^0 - 0),$$

$$t^0 = \begin{cases} t^*, \text{ если } t^* > t_1^{sp} + T_R \\ t_1^{sp} + T_R, \text{ если } t^* \le t_1^{sp} + T_R \end{cases},$$

где t_1^{sp} определяется из (1),

$$t^* = \max\{t^+; t^-\},$$

$$t^+ = \max_i \max_{\tau \le t}\{\tau : \sigma_i(\tau) = 1\},$$

$$t^- = \max_i \max_{\tau \le t}\{\tau : \sigma_i^m(\tau) = 1, \sigma_i^m(\tau + 0) = 0\}.$$

Здесь t_1^{sp} — момент последнего по времени импульса данного элемента, t^+ — момент последнего по времени входного сигнала на данный элемент, t^- — момент последнего по времени завершения какого-либо входного воздействия на данный элемент.

Элемент переходит в состояние генерации импульса, если величина мембранного потенциала $u(t)$ равна пороговому значению p. Т.е. $s(t_2^{sp}) = \{$генерация импульса$\}$, где

$$t_2^{sp} = \min_{\tau > t}\{\tau : u(\tau) = p\}.$$

Если $u(\tau) < p$ при всех $\tau > t$, то $s(\tau) = \{$восприимчивость$\}$ при всех $\tau > t$. В данном случае элемент не генерирует импульс.

Разобранные случаи полностью исчерпывают поведение обобщенного нейронного элемента. Формально определенная динамика мембранного потенциала обобщенного нейронного элемента соответствует развитию потенциала биологического нейрона. Она согласуется с "базовой нейронной моделью" [3]. Модель обобщенного нейронного элемента близка к модели биологического нейрона, построенной на основе дифференциальных уравнений с запаздыванием [4]. При этом модель ОНЭ отличается простотой функционирования и позволяет избежать технических трудностей, связанных с интегрированием систем дифференциальных уравнений с запаздыванием. Кроме того, модель ОНЭ носит обобщенный характер. В частности, при $p < r$ элемент ведет себя как нейрон-автогенератор, а при $p > r$ — как нейрон-детектор.

Обсудим теперь проблему адаптации, иначе называемую проблемой обучения. Способность нейронных сетей к обучению является важнейшим их свойством. В результате обучения целенаправленно меняются величины синаптических весов в сети. Поэтому вопрос о выборе синаптических весов в нейронных системах чрезвычайно важен для обучения и дальнейшей корректной работы нейронной сети. Существуют два принципиально различных подхода к решению задачи обучения.

Согласно одному из них, веса вычисляются вне нейронной сети, а затем импортируются в синапсы. Нахождение весов обычно сводится к решению некоторой оптимизационной задачи. В случае классических нейронных сетей часто минимизируют суммарное квадратичное рассогласование желаемого и реального состояния выходов нейронов. Направление, связанное с импортом весов, широко распространено, но при моделировании биологических систем не представляется естественным.

Согласно второму подходу к системе обучения, синаптические веса подстраиваются в процессе функционирования нейронной сети. Данное направление восходит к работам Д. Хэбба [5] и Ф. Розенблатта [6]. Многие авторы [7],[8],[9],[10] считают наличие механизма адаптации неотъемлемым признаком нейронной системы. Этот подход является более естественным с биологической точки зрения и далее он будет использован применительно к обобщенным нейронным элементам. В случае сложно устроенных динамических сред исследование механизма адаптации аналитическими методами затруднительно. Однако для некоторых структур из обобщенных нейронных элементов удается провести адаптацию и аналитически доказать ее результативность. В настоящей работе будет решена задача адаптации отдельного ОНЭ автогенераторного типа.

Постановка задачи. *Пусть дана нейронная сеть, состоящая из обобщенных нейронных элементов автогенераторного типа. Выделим в этой сети два ОНЭ-автогенератора, первый из которых соединен со вторым однонаправленной синаптической связью с весом $q_0 > 0$. Эти два автогенератора будем называть первым и вторым эталонными элементами. Предположим, вся сеть работает так, что два рассматриваемых элемента функционируют в периодическом режиме. А именно, импульсы этих двух элементов следуют друг за другом в порядке нумерации с одним и тем же внутренним рассогласованием ξ^0 и повторяются через промежуток времени T. Такие периодические импульсы характерны для устойчивых колебательных режимов нейронной активности, существование которых в сетях ОНЭ доказано в [1]. Поскольку устойчивые колебательные режимы нейронной активности интерпретируются как носители информации в динамическом виде, то естественно изучать адаптацию в сетях, работающих подобным образом. В этом случае механизм адаптации (для более сложных объектов, чем один элемент) может использоваться для копирования и дублирования динамической информации. Условия на величины ξ^0 и T будут выписаны ниже. Предположим также, что в момент генерации импульса первым по счету элементом второй находится в состоянии восприимчивости.*

Пусть эти два эталонных элемента соединены однонаправленными синаптическими связями с третьим ОНЭ-автогенератором, который будем называть адаптивным. Для этого элемента и будет решаться задача адаптации. Синаптический вес воздействия q второго эталонного элемента на адаптивный фиксирован и достаточно велик (подробнее об этом ниже). Синаптический вес воздействия Q первого эталонного элемента на адаптивный будет меняться в процессе функционирования сети. Первоначальное значение веса Q обозначим как Q_0. Будем решать задачу: провести с течением времени целенаправленную адаптацию веса Q так, чтобы, начиная с некоторого момента времени, адаптивный элемент функционировал в точности, как второй эталонный элемент.

Введем дополнительные обозначения и выпишем необходимые условия для процедуры адаптации. Предположим, что рассматриваемая тройка элементов (два эталонных и адаптивный) генерирует первые свои импульсы в следующем порядке: сначала первый эталонный, затем второй эталонный (с рассогласованием ξ^0), а затем адаптивный.

Приурочим нулевой момент времени к генерации импульса первым эталонным элементом. Запаздывание импульса адаптивного элемента относительно второго эталонного будем обозначать η, причем в данном предположении $\eta > 0$. Ниже будет доказана лемма о том, что существует такое начальное состояние адаптивного элемента, при котором данное предположение выполняется. Наложим на величину ξ^0 следующее условие:

$$0 < \xi^0 < T_m. \tag{3}$$

При выполнении данного условия импульсы эталонных элементов образуют пачку. Пусть величина Q_0 удовлетворяет следующему неравенству:

$$0 < Q_0 < q_0. \tag{4}$$

Наконец, величина T оказывается периодом пачечного воздействия, а потому должна удовлетворять условию

$$T_m + T_R < T < T_A, \tag{5}$$

где T_A — период автогенерации импульсов ОНЭ автогенераторного типа. Эта величина может быть вычислена по формуле

$$e^{-\alpha(T_A - T_R)} = \frac{r-p}{r},$$

которая вытекает из модели ОНЭ-автогенератора.

Формально определим область в пространстве параметров, внутри которой будем проводить процедуру адаптации. Зададим область D возможных значений параметров p, r, α, T_R, T_m следующими неравенствами:

$$\begin{gathered} 0 < p < r, \\ \alpha > 0, \\ 0 < T_m < T_R. \end{gathered} \tag{6}$$

Имеет место лемма о начальном состоянии системы.

Лемма 1. *Пусть произвольные величины рассогласования ξ^0 и синаптического веса Q_0 удовлетворяют условиям (3) — (4), а параметры сети принадлежат области D.*

Тогда существует начальное состояние адаптивного ОНЭ-автогенератора, в соответствии с которым он генерирует свой первый импульс после двух эталонных элементов, то есть $\eta > 0$. При этом вес q можно выбрать достаточно большим, чтобы выполнялось неравенство

$$0 < \xi^0 + \eta < T_m. \tag{7}$$

Доказательство. Обозначим функции мембранных потенциалов двух эталонных и адаптивного элементов как $u_1^{St}(t)$, $u_2^{St}(t)$ и $u^{Ad}(t)$ соответственно. Исходя из описания нейронной сети, выбора начального момента времени и условия (3), получаем следующее. Первый эталонный элемент в нулевой момент времени генерирует импульс и $u_1^{St}(0) = p$. Второй эталонный элемент в нулевой момент времени находится в состоянии восприимчивости и $0 < u_2^{St}(0) < p$.

Пусть адаптивный элемент в нулевой момент времени также находится в состоянии восприимчивости. Величину $u^{Ad}(0)$ определим в соответствии с формулой

$$u^{Ad}(0) = u_2^{St}(0). \tag{8}$$

Начальное состояние адаптивного элемента задано. Покажем, что в этом случае $\eta > 0$.

Первый эталонный элемент генерирует импульс в нулевой момент времени, а второй — в момент времени ξ^0, то есть $u_2^{St}(\xi^0) = p$. Сравним поведение функций мембранного потенциала $u_2^{St}(t)$ второго эталонного и $u^{Ad}(t)$ адаптивного элементов на промежутке времени $[0; \xi^0]$. Согласно модели ОНЭ и в силу условия $Q_0 < q_0$, получаем, что $u^{Ad}(\xi^0) < p$. Таким образом, на промежутке времени $[0; \xi^0]$ адаптивный элемент не может сгенерировать импульс. Поэтому $\eta > 0$.

Покажем теперь, что если фиксированный синаптический вес q достаточно велик, то будет выполняться неравенство (7). Функция мембранного потенциала $u^{Ad}(t)$ адаптивного элемента на промежутке времени $[\xi^0; \xi^0 + \eta]$ описывается, согласно модели ОНЭ, дифференциальным уравнением

$$\dot{u} = \alpha(r + q + Q_0 - u)$$

с начальным условием $u^{Ad}(\xi^0)$. Выписывая решение данного уравнения в момент $\xi^0 + \eta$ генерации импульса адаптивным элементом, получаем соотношение

$$e^{\alpha\eta} = \frac{r + q + Q_0 - u^{Ad}(\xi^0)}{r + q + Q_0 - p}. \tag{9}$$

Отсюда видно, что при увеличении величины q и постоянных остальных параметрах величина рассогласования η стремится к нулю. В силу нестрогости неравенства (3), можно подобрать такой достаточно большой вес q, чтобы имело место неравенство (7). То есть, если заранее заданный вес q достаточно велик, то реакция будет носить непосредственный характер: импульс адаптивного элемента произойдет раньше, чем завершится воздействие со стороны первого эталонного элемента. Именно такой смысл носит неравенство (7). Лемма доказана.

Из соотношения (9) видно также, что при увеличении в процессе адаптации синаптического веса Q величина η уменьшается. То есть адаптивный элемент начинает в своем функционировании "подтягиваться" ко второму эталонному элементу. На данном факте основана идея подстройки синаптических весов.

Детально опишем механизм адаптации. В нулевой момент времени происходит импульс первого эталонного элемента. В момент времени ξ^0 происходит импульс второго эталонного элемента. Как вытекает из леммы 1, в момент времени $\xi^0 + \eta$ происходит импульс адаптивного элемента. Далее, в момент времени $t = \xi^0 + \eta + T_R$ адаптивный элемент выходит из состояния рефрактерности. Модификацию синаптического веса Q естественно проводить на промежутке времени $t \in [\xi^0 + \eta; \xi^0 + \eta + T_{\mathrm{Ad}}]$ после импульса адаптивного элемента. Фиксированная положительная величина T_{Ad} задается заранее и определяет длительность каждого отдельного изменения синаптического веса Q. Поскольку адаптивный элемент находится в состоянии рефрактерности ($T_{\mathrm{Ad}} < T_R$), то на указанном промежутке времени соответствующий синапс не используется.

После каждого изменения веса Q запаздывание импульса η адаптивного элемента в ответ на следующую пачку, вообще говоря, меняется. Поэтому можно говорить о последовательности рассогласований $\eta^{(k)}$, где $k = 1, 2, \ldots$ Каждое рассогласование $\eta^{(k)}$ представляет собой запаздывание импульса адаптивного элемента после поступления k-й пачки.

Адаптацию будем проводить в соответствии с рекуррентной формулой

$$Q^{(k+1)} = Q^{(k)} + \gamma(e^{\alpha\eta^{(k+1)}} - 1). \tag{10}$$

При $k = 0$: $Q^{(1)} = Q_0 + \gamma(e^{\alpha\eta^{(1)}} - 1)$. Здесь γ — заранее выбранная малая константа, определяющая скорость адаптации. Необходимые ограничения на величину γ будут даны ниже, в теореме 1. Величины $Q^{(k)}$ и $Q^{(k+1)}$ представляют собой последовательные значения веса Q до и после адаптации соответственно. Каждая такая адаптация веса проводится на промежутке времени $t \in [T(k-1) + \xi^0 + \eta^{(k)}; T(k-1) + \xi^0 + \eta^{(k)} + T_{\mathrm{Ad}}]$. Таким образом, функция $Q(t)$ изменения веса Q — ступенчатого вида:

$$Q(t) = \begin{cases} Q_0, \text{ при } 0 \geq t \geq \xi^0 + \eta^{(1)} \\ Q^{(1)}, \text{ при } \xi^0 + \eta^{(1)} + T_{\mathrm{Ad}} \geq t \geq T + \xi^0 + \eta^{(2)} \\ Q^{(k)}, \text{ при } T(k-1) + \xi^0 + \eta^{(k)} + T_{\mathrm{Ad}} \geq t \geq Tk + \xi^0 + \eta^{(k+1)} \end{cases},$$

где $k = 2, 3, \ldots$

Независимо от адаптивного элемента пара эталонных элементов периодически генерирует пачки импульсов. В силу условия (7) реакция адаптивного элемента на первую такую пачку носит непосредственный характер. Задача поведения отдельного обобщенного нейронного элемента при непосредственном воздействии периодических пачек импульсов решена ранее в [2]. При решении данной задачи была получена формула, которая в имеющихся обозначениях принимает следующий вид:

$$e^{\alpha\eta^{(k+1)}} = A(Q)e^{\alpha\eta^{(k)}} + B(Q), \tag{11}$$

где

$$A(Q) = (re^{-\alpha(T-T_R)})/(r + q + Q^{(k)} - p), \quad B(Q) = (Q^{(k)}e^{-\alpha\xi^0} + q)/(r + q + Q^{(k)} - p).$$

Согласно лемме 1, выполнение условия (7) обеспечивается за счет выбора достаточно большого веса q перед процедурой адаптации. Поэтому далее будем считать этот вес выбранным именно таким образом. При этом условие (7), необходимое для обоснования формулы (11), будет следовать из леммы 1.

В соответствии с формулой (11), по величине $\eta^{(k)}$ определяется $\eta^{(k+1)}$ — новое запаздывание импульса адаптивного элемента в ответ на следующую $(k+1)$-ю пачку. Отметим, что эта формула может быть, вообще говоря, распространена на случай $\eta^{(k)} = \eta^{(k+1)} = 0$.

Таким образом, между величинами рассогласования $\eta^{(k)}$ и веса $Q^{(k)}$ существует взаимосвязь. А именно, исходя из величины $\eta^{(1)}$ происходит изменение веса Q с величины Q_0 на $Q^{(1)}$. Это, в свою очередь, приводит к изменению величины $\eta^{(2)}$. По значению $\eta^{(2)}$ происходит вычисление веса $Q^{(2)}$ и так далее.

Прежде чем выписать итерационный процесс и необходимые для него ограничения в явном виде, сформулируем и докажем необходимое следствие из леммы 1.

Следствие 1. *Пусть величины рассогласований* $\eta^{(k)}$ *и* $\eta^{(k+1)}$ *связаны соотношением (11) и* $\eta^{(k)} \geq 0$ *при любом* $k = 1, 2, \ldots$

Тогда при любом $k = 1, 2, \ldots$ *справедливо неравенство:* $\eta^{(k+1)} \leq \eta^{(k)}$.

Доказательство. Рассмотрим имеющуюся систему элементов после поступления k пачек. Величина рассогласования $\eta^{(k)}$ и вес $Q^{(k)}$ связаны соотношением, аналогичным формуле (9). После генерации адаптивным элементом k-го импульса происходит изменение веса $Q^{(k)}$ на величину $Q^{(k+1)}$ в соответствии с формулой (10). Поэтому если $\eta^{(k)} \geq 0$, то $Q^{(k+1)} \geq Q^{(k)}$. Как уже отмечалось, при увеличении величины Q происходит уменьшение величины η в соответствии с формулой (9). Если $Q^{(k+1)} = Q^{(k)}$, то $\eta^{(k+1)} = \eta^{(k)}$. Таким образом, неравенство $\eta^{(k+1)} \leq \eta^{(k)}$ выполняется. Следствие доказано.

Возникает итерационный процесс, отражающий последовательные такты процедуры адаптации. Выпишем теперь этот итерационный процесс и необходимые для него ограничения. Оформим результат в виде еще одного следствия из леммы 1.

Следствие 2. *Пусть произвольный адаптивный ОНЭ-автогенератор непосредственно реагирует на пачки из двух импульсов, поступающих с внутренним рассогласованием* ξ^0 *и периодом* T. *Выполняются условия (3) – (5), а параметры сети принадлежат области* D. *Пусть также выполняются неравенства*

$$\begin{cases} \eta^{(k)} \geq 0 \\ 0 < Q^{(k)} \leq q_0 \end{cases}, \tag{12}$$

при всех $k = 1, 2, \ldots$

Тогда величины $\eta^{(k)}$, $\eta^{(k+1)}$, $Q^{(k)}$ *и* $Q^{(k+1)}$ *связаны соотношениями (10) – (11).*

Доказательство. Формулы (10) – (11) применимы, если выполнены условия пачечного воздействия и непосредственной реакции на каждую пачку. А именно, $0 \leq \eta_i^{(k)} < T_m - \xi^0$ при всех $k = 1, 2, \ldots$ Покажем, что в предположениях следствия это действительно так.

Условия следствия таковы, что выполняется лемма 1. Имеет место формула $\eta_i^{(1)} < T_m - \xi^0$. Также выполняется следствие 1, поэтому $\eta^{(k+1)} \leq \eta^{(k)}$ при всех $k = 1, 2, \ldots$ Отсюда вытекает неравенство $\eta_i^{(k)} < T_m - \xi^0$. Следствие доказано.

Лемма 2. *Отображение (10) – (11) имеет неподвижную точку* $\overline{\eta} = 0$, $\overline{Q} = q_0$.

Доказательство. При $\eta^{(k+1)} = \eta^{(k)} = 0$, $Q^{(k+1)} = Q^{(k)} = q_0$ соотношение (10) обратится в очевидное тождество. Рассмотрим соотношение (11):

$$1 = \frac{re^{-\alpha(T-T_R)}}{r+q+q_0-p} + \frac{q_0 e^{-\alpha\xi^0} + q}{r+q+q_0-p}, \tag{13}$$

или

$$re^{-\alpha(T-T_R)} + q_0 e^{-\alpha\xi^0} = r + q_0 - p. \tag{14}$$

Покажем, что данное соотношение также является тождеством.

Поскольку $\eta^{(k)} = 0$, то второй эталонный и адаптивный элементы генерируют свои спайки одновременно. Поэтому второй эталонный элемент не оказывает воздействия на адаптивный элемент, и пачка, таким образом, состоит только из одного импульса первого эталонного элемента.

Рассмотрим поведение адаптивного элемента после генерации им спайка в некоторый момент времени t_{sp}^k. В момент времени $t_{sp}^k + T_R$ данный элемент выходит из состояния рефрактерности и в момент времени t^* испытывает воздействие со стороны первого эталонного элемента. Далее, в момент времени t_{sp}^{k+1} адаптивный элемент генерирует импульс (в то же время, что и второй эталонный элемент).

На промежутке времени $[t_{sp}^k + T_R; t^*]$ функция мембранного потенциала i-го адаптивного элемента описывается, согласно модели ОНЭ, дифференциальным уравнением, решение которого

$$u(t) = r - re^{-\alpha(t - t_{sp}^k - T_R)}.$$

В момент времени t^*:

$$u(t^*) = r - re^{-\alpha(t^* - t_{sp}^k - T_R)}. \tag{15}$$

На промежутке времени $[t^*; t_{sp}^{k+1}]$ адаптивный элемент находится под воздействием первого эталонного элемента (переданным по связи с весом $Q = q_0$). Поэтому функция мембранного потенциала i-го адаптивного элемента описывается дифференциальным уравнением, решение которого

$$u(t) = r + q_0 + e^{-\alpha(t - t^*)}[u(t^*) - r - q_0]. \tag{16}$$

Подставляем выражение (15) в формулу (16):

$$u(t) = r + q_0 + e^{-\alpha(t - t^*)}[-re^{-\alpha(t^* - t_{sp}^k - T_R)} - q_0].$$

В момент времени t_{sp}^{k+1} происходит генерация импульса. Поэтому

$$r + q_0 + e^{-\alpha(t_{sp}^{k+1} - t^*)}[-re^{-\alpha(t^* - t_{sp}^k - T_R)} - q_0] = p,$$

$$e^{-\alpha\xi^0}[re^{-\alpha(t^* - t_{sp}^k - T_R)} + q_0] = r + q_0 - p. \tag{17}$$

Приравниваем левые части формул (14) и (17):

$$re^{-\alpha(T - T_R)} = re^{-\alpha\xi^0}e^{-\alpha(t^* - t_{sp}^k - T_R)},$$

$$T = T_R + (t^* - t_{sp}^k - T_R) + \xi^0.$$

Последнее соотношение является тождеством. Действительно, величина периода пачечного воздействия T (в случае $\eta = 0$) как раз и складывается из периода рефрактерности T_R, временного промежутка восприимчивости адаптивного элемента при отсутствии внешнего воздействия $t^* - t^k_{sp} - T_R$ и рассогласования ξ^0. Поэтому верно и соотношение (14). Таким образом, оба соотношения отображения (10) – (11) обратились в тождество. Лемма доказана.

Теперь исследуем вопрос о сходимости итерационного процесса, который априорно будем рассматривать в области: $0 < Q \le q_0$, $0 \le \eta^{(k)} < T_m - \xi^0$, где $k = 1, 2, \ldots$

Теорема 1. *Пусть произвольный адаптивный ОНЭ-автогенератор непосредственно реагирует на пачки из двух импульсов, поступающих с внутренним рассогласованием ξ^0 и периодом T. Выполняются условия (3) – (5), а параметры сети удовлетворяют ограничениям (6).*

Если синаптический вес q и малая константа γ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} q > p \\ \gamma p < (q_0 - Q_0)(r + q + Q_0 - p) \\ \gamma\varphi(0)/q_0 < (1 - \sqrt{A(0)})^2 \end{cases}, \tag{18}$$

где

$$\varphi(0) = (p - r(1 - e^{-\alpha(T-T_R)}))/(r + q - p), \qquad A(0) = (re^{-\alpha(T-T_R)})/(r + q - p),$$

то итерационный процесс (10) – (11) сходится к точке $\overline{\eta} = 0$, $\overline{Q} = q_0$.

Доказательство. Условия (3) – (4) дают возможность применить лемму 1. Из результата данной леммы вытекает условие $0 \le \eta^{(k)} < T_m - \xi^0$ на первом такте адаптации (при $k = 1$). Правомерность предположения $0 < Q \le q_0$ вытекает из условия (4). Кроме того, в силу первого из условий системы (18), $Q^{(1)} = Q_0 + \gamma(e^{\alpha\eta^{(1)}} - 1) < q_0$. Таким образом, первая модификация веса Q также не нарушает условий предположений (12).

Сделаем априорное предположение, что условия (12) выполнены на любом такте процесса адаптации. О выполнимости такого допущения позаботимся позднее.

По следствию 2 итерационный процесс описывается формулами (10) – (11). Преобразуем (11)

$$e^{\alpha\eta^{(k+1)}} - 1 = (e^{\alpha\eta^{(k)}} - 1)\frac{re^{-\alpha(T-T_R)}}{r + Q + q - p} + \frac{re^{-\alpha(T-T_R)}}{r + Q + q - p} + \frac{Qe^{-\alpha\xi^0} + q}{r + Q + q - p} - 1. \tag{19}$$

Обозначим

$$\varphi(Q) = \frac{Q(e^{-\alpha\xi^0} - 1) + p - r + re^{-\alpha(T-T_R)}}{r + Q + q - p}.$$

Из формулы (13) следует, что в предельной точке $\varphi(Q) = \varphi(q_0) = 0$. Кроме того, при $Q < q_0$ функция $\varphi(Q)$ является убывающей. Первая производная отрицательна и равна

$$\varphi'(Q) = \frac{-re^{-\alpha(T-T_R)} + e^{-\alpha\xi^0}(r + q - p) - q}{(r + Q + q - p)^2}. \tag{20}$$

Вторая производная положительна и равна

$$\varphi''(Q) = \frac{-2(-re^{-\alpha(T-T_R)} + e^{-\alpha\xi^0}(r+q-p) - q)}{(r+Q+q-p)^3}. \tag{21}$$

Функция $\varphi(Q)$ является выпуклой вниз. Справедлива оценка

$$\varphi(Q) \le \frac{\varphi(0)}{q_0}(q_0 - Q). \tag{22}$$

В отображении (19) положим

$$x = e^{\alpha\eta} - 1, \qquad A(Q) = (re^{-\alpha(T-T_R)})/(r+Q+q-p).$$

Перепишем систему (10) – (11) в новых обозначениях:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = A(Q)x^{(k)} + \varphi(Q) \\ Q^{(k+1)} = Q^{(k)} + \gamma x^{(k+1)} \end{cases}. \tag{23}$$

Отметим, что $0 < A(Q) \le A(0)$. Кроме того, в силу второго из условий системы (18), $A(0) < 1$.

Рассмотрим в плоскости $(Q; x)$ треугольную область $0 < Q \le q_0$, $0 \le x \le C(q_0 - Q)$, где $C > 0$. Покажем, что данная область является инвариантной для отображения (23). Тем самым априорное предположение (12) окажется верным на любом такте процесса адаптации.

Для величины $x^{(k+1)}$, с учетом оценки (22), справедливо неравенство

$$x^{(k+1)} \le A(Q)C(q_0 - Q) + \frac{\varphi(0)}{q_0}(q_0 - Q).$$

$$x^{(k+1)} \le (q_0 - Q)[A(0)C + \frac{\varphi(0)}{q_0}]. \tag{24}$$

В силу данного неравенства, из системы (23) получаем

$$Q^{(k+1)} \le Q^{(k)} + \gamma(q_0 - Q^{(k)})[A(0)C + \frac{\varphi(0)}{q_0}],$$

$$q_0 - Q^{(k+1)} \ge (q_0 - Q^{(k)})[1 - \gamma(A(0)C + \frac{\varphi(0)}{q_0})].$$

В силу малости величины γ можно считать, что

$$1 - \gamma(A(0)C + \frac{\varphi(0)}{q_0}) > 0.$$

Поэтому

$$q_0 - Q^{(k)} \leq (q_0 - Q^{(k+1)})/[1 - \gamma(A(0)C + \frac{\varphi(0)}{q_0})]. \qquad (25)$$

Из (24) вытекает требуемое ограничение $Q^{(k+1)} < q_0$. Далее, из неравенства (24), с учетом оценки (25), получим

$$x^{(k+1)} \leq (q_0 - Q^{(k+1)})(A(0)C + \frac{\varphi(0)}{q_0})/[1 - \gamma(A(0)C + \frac{\varphi(0)}{q_0})]. \qquad (26)$$

Для того, чтобы указанная выше область была инвариантной относительно отображения (23), необходимо выполнение неравенства

$$(A(0)C + \frac{\varphi(0)}{q_0})/[1 - \gamma(A(0)C + \frac{\varphi(0)}{q_0})] \leq C$$

для некоторого положительного C. Покажем, что такое C существует. Преобразуем данное неравенство

$$\gamma A(0)C^2 - C(1 - A(0) - \gamma\frac{\varphi(0)}{q_0}) + \frac{\varphi(0)}{q_0} \leq 0. \qquad (27)$$

В силу третьего из условий системы (18), дискриминант левой части, а также величина $1 - A(0) - \gamma\varphi(0)/q_0$, положительны. Поэтому существует такое положительное C, при котором неравенство (27) будет выполняться. Рассмотренная область является инвариантной относительно отображения (23).

Для полного доказательства теоремы остается показать, что не существует другой предельной точки, кроме $\overline{\eta} = 0$, $\overline{Q} = q_0$. Предположим противное: для величины Q существует предел итераций $\widetilde{Q} < q_0$. Из соотношения $Q^{(k+1)} = Q^{(k)} + \gamma x^{(k+1)}$ следует, что $x^{(k)} \to 0$. Следовательно, $A(Q)x^{(k)} + \varphi(Q) \to 0$ при $Q \to \widetilde{Q}$. Но функция $\varphi(Q)$, как было показано выше, имеет единственный ноль, а именно, в точке $Q = q_0$. Предположение оказывается неверным. Теорема доказана.

Отметим, что исследованная схема адаптации не является единственно возможной. В качестве формулы (10) можно взять, например, одно из следующих выражений:

$$Q^{(k+1)} = Q^{(k)} + \gamma\eta^{(k+1)},$$

$$Q^{(k+1)} = Q^{(k)} + \gamma(1 - e^{-\alpha\eta^{(k+1)}}).$$

Оба эти соотношения реализуют идею пошаговой модификации синаптического веса $Q^{(k)}$ в зависимости от величины рассогласования $\eta^{(k+1)}$ так, чтобы в результате адаптации величина $Q^{(k)}$ стала равна эталонному весу q_0. При этом величина рассогласования $\eta^{(k)}$ стремится с течением времени к нулю.

Обсудим полученные результаты. Описанный процесс адаптации и теорема 1 существенно дополняют представления о свойствах обобщенных нейронных элементов. Оказалось, что такие элементы, будучи объединены в нейронные структуры, могут не только хранить волновые пакеты (как это было показано в [1]), но и подстраиваться в своем функционировании друг к другу. Это свойство позволяет проводить целенаправленную адаптацию в более сложных нейронных структурах, в частности, кольцевых.

Схему адаптации допустимо рассматривать как модель запоминания и дублирования информации, представленной в волновом виде. При этом совершенно не важна природа эталонной последовательности импульсов. В качестве эталонной может выступать последовательность спайков, порожденная сенсорными структурами мозга, или же, например, каким-нибудь кольцевым образованием. В последнем случае речь может идти о воспроизводстве идентичных колец. На основе описанного механизма адаптации в процессе обмена информацией между нейронными системами оказывается возможным создание копий. Проведенные в настоящей статье исследования показывают перспективность использования обобщенных нейронных элементов в задачах воспроизведения информации.

Литература

1. Майоров В.В., Коновалов Е.В. Обобщенный нейронный автомат в задаче распространения волны возбуждения по нейронной сети // Нейрокомпьютер. М.: Радиотехника, 2007. № 7. С. 3–8.

2. Коновалов Е.В. Задача о пачечном воздействии на обобщенный нейронный автомат // Моделирование и анализ информационных систем. 2007. Т. 14, №3. С. 43–49.

3. Крюков В.И., Борисюк Г.Н., Борисюк Р.М., Кириллов А.Б., Коваленко Е.И. Метастабильные и неустойчивые состояния в мозге. Пущино: НЦБИ АН СССР, 1986. 112 с.

4. Майоров В.В., Мышкин И.Ю. Математическое моделирование нейронов сети на основе уравнений с запаздыванием // Математическое моделирование. 1990. Т. 2, № 11. С. 64–76.

5. Hebb D.O. The organization of behaviour: a neuropsychological theory. N.Y.: J. Wiley and Sons, 1949. 436 c.

6. Розенблат Ф. Принципы нейродинамики. М.: Мир, 1965. 480 с.

7. Дунин-Барковский В. Л. Информационные процессы в нейронных структурах. М.: Наука, 1978. 166 с.

8. Маунткасл В., Эдельмен Д. Разумный мозг. М.: Мир, 1981. 135 с.

9. Kohonen T. Self-organized formation of topologically correct feature maps // Biological Cybernetics. 1982. № 43. P. 59–69.

10. Фролов А. А., Муравьев И. П. Нейронные модели ассоциативной памяти. М.: Наука, 1987. 160 с.

The Problem of Adaptation of the Generalized Neural Element

Konovalov E.V.

Keywords: neural networks, models of neural element, generalized neural element, neuronal bursting, adaptation in neural networks

A perspective model of the neuron cell — the generalized neural element (GNE) is studied in this article. This model has the universal character. It combines properties of the neuron-oscillator and the neuron-detector. The problem of adaptation of the generalized neural element is formulated and solved.

Сведения об авторе:
Коновалов Евгений Владиславович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд. физ.-мат. наук, ст. преп. кафедры компьютерных сетей