Модел. и анализ информ. систем. Т. **21**, № **1** (2014) 89–93

УДК 517.9

Применение принципа усреднения к логистическому уравнению с быстро осциллирующим запаздыванием

Быкова Н. Д.[1]*, Григорьева Е. В.**

**Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»*
115409, Россия, г. Москва, Каширское шоссе, 31
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14
***Белорусский государственный экономический университет,*
220070 Минск, Республика Беларусь, Партизанский проспект, 26

e-mail: n.bykova90@gmail.com

получена 28 декабря 2013

Ключевые слова: усреднение, устойчивость, нелинейная динамика, метод нормальных форм

Рассматривается вопрос о локальной динамике логистического уравнения с быстро осциллирующим периодическим по времени кусочно-постоянным коэффициентом запаздывания. Показано, что усредненным уравнением является логистическое уравнение с двумя запаздываниями. Получен критерий устойчивости состояния равновесия. Рассмотрен вопрос о динамических свойствах исходного уравнения при условии, когда в усредненном уравнении реализуется критический случай в задаче об устойчивости стационара. Установлено, что при увеличении частоты колебаний коэффициента запаздывания может происходить неограниченный процесс «рождения» и «гибели» установленных режимов.

1. Рассматривается логистическое уравнение с запаздыванием

$$\dot{u} = r[1 - u(t - T)]u \quad (r > 0, T > 0). \tag{1}$$

Функция $u(t)$ положительна. Отметим, что исследованию этого уравнения посвящена значительная литература (см., например, библиографию в [1]). Здесь будут рассмотрены вопросы, связанные с применением известного [2] принципа усреднения. Для уравнений с запаздыванием принцип усреднения по переменной t применялся в [3, 4].

[1]Работа выполнена при поддержке проекта № 984 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

Здесь будем предполагать, что коэффициент r является постоянной величиной, а коэффициент запаздывания T в (1) быстро осциллирует по времени:

$$T = T_0 + af(\omega t), \quad \omega \gg 1, \quad a > 0, \quad f(\tau) = \mathrm{sign}(\sin\tau). \tag{2}$$

Усредненное уравнение в этом случае имеет вид

$$\dot v = r\left[1 - \frac{1}{2}\Big(v(t-h_1) + v(t-h_2)\Big)\right] v \tag{3}$$

и представляет собой частный случай учета возрастных групп в уравнении Хатчинсона (см. [5]). Здесь $h_1 = T_0 - a$, $h_2 = T_0 + a$. Условием корректности уравнения (3) является неравенство

$$a < T_0.$$

Сначала определим область устойчивости состояния равновесия $u_0 \equiv 1$ уравнения (1) при условии (2). Для этого выпишем уравнение (3), линеаризованное на этом состоянии равновесия

$$\dot v = -\frac{r}{2}\big[v(t-h_1) + v(t-h_2)\big],$$

и соответствующий ему характеристический квазиполином

$$\lambda = -\frac{r}{2}\big[\exp(-\lambda h_1) + \exp(-\lambda h_2)\big]. \tag{4}$$

При условии

$$r < \frac{\pi}{2T_0\cos\frac{a\pi}{2T_0}} \tag{5}$$

все корни (4) имеют отрицательные вещественные части, в случае равенства в (5) уравнение (4) имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\pi/(2T_0)$, а при выполнении в (5) противоположного (строгого) неравенства существует корень с положительной вещественной частью. Отметим, что при постоянных r и T условие устойчивости состояния равновесия u_0 формулируется в виде неравенства $rT < \pi/2$. Тем самым, область устойчивости состояния равновесия u_0 расширяется при наличии быстрых осцилляций по t.

2. Рассмотрим затем вопрос об устойчивости решений линеаризованного на u_0 уравнения (1) при условии (2)

$$\dot u = -ru(t - T_0 - af(\omega t)), \tag{6}$$

в критических случаях, когда

$$r = \frac{\pi}{2T_0\cos\frac{a\pi}{2T_0}}. \tag{7}$$

В [6] разработан алгоритм исследования устойчивости в критических случаях в задачах с быстро осциллирующими по времени коэффициентами. На основе этого алгоритма получим асимптотику наибольшего характеристического показателя линеаризованного уравнения.

Для этого будем искать решения уравнения (6), отвечающие наибольшему характеристическому показателю, в виде

$$u(t,\omega) = \big(1 + \omega^{-1}V_1(\omega t) + \dots\big)\exp\left[\left(i\frac{\pi}{2T_0} + \lambda_1(\omega)\omega^{-1} + \dots\right)t\right]. \tag{8}$$

Считаем, что $V_j(\tau)$ – периодичны и имеют нулевое среднее ($\tau = \omega t$).

Подставим (8) в (6) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ω^{-1}, на первом шаге при ω^0 получаем уравнение относительно функции $V_1(\tau)$

$$\frac{dV_1}{d\tau} + i\frac{\pi}{2T_0} = ri\exp\left[-\frac{a\pi}{2T_0}if(\tau)\right].$$

Интегрируя полученное уравнение в классе 2π–периодических функций с нулевым средним, получаем явный вид функции V_1. На отрезке $[0,2\pi]$ она определяется формулой

$$V_1(\tau) = \left(\frac{\pi}{2} - |\tau - \pi|\right)\frac{\pi}{2T_0}\operatorname{tg}\frac{a\pi}{2T_0}.$$

Приравнивая коэффициенты при ω^{-1} и используя явное представление функции $V_1(\tau)$, получаем уравнение относительно $V_2(\tau)$ вида

$$\frac{dV_2}{d\tau} = g(\tau). \tag{9}$$

Условием разрешимости уравнения (9) в классе 2π–периодических функций с нулевым средним является равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(s)\,ds = 0,$$

исходя из которого можно найти $\lambda_1(\omega)$, явная формула которого слишком громоздка, поэтому приведем здесь только действительную часть $\lambda_1(\omega)$. Она является двухпериодической знакопеременной функцией ω и представлена формулой

$$\operatorname{Re}\lambda_1(\omega) = -A\left\{F\big(\omega h_2\big)\left[B\operatorname{tg}\frac{a\pi}{2T_0} + \frac{\pi}{2}\right] + F\big(\omega h_1\big)\left[B\operatorname{tg}\frac{a\pi}{2T_0} - \frac{\pi}{2}\right]\right\}. \tag{10}$$

Здесь

$$A = \frac{\pi}{8T_0^2}\left(B^2 + \frac{\pi^2}{4}\right)^{-1}\operatorname{tg}\frac{a\pi}{2T_0}, \qquad B = 1 + \frac{a\pi}{2T_0}\operatorname{tg}\frac{a\pi}{2T_0},$$

$F(x)$ — 2π–периодическая функция и

$$F(x) = \begin{cases} -x(x-\pi), & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ (x-\pi)(x-2\pi), & \pi \leqslant x \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ на периоде изображен на рис. 1. А на рис. 2 примерный вид функции $\operatorname{Re}\lambda_1(\omega)$.

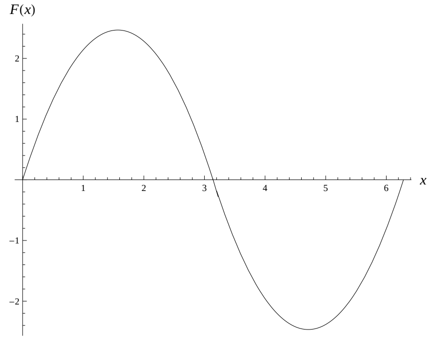

Рис. 1. $F(x)$.

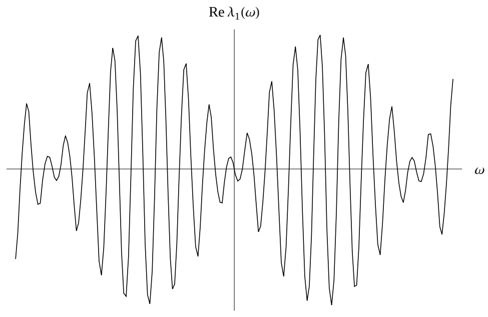

Рис. 2. $\operatorname{Re}\lambda_1(\omega)$.

Выражение (10) позволяет исследовать задачу о поведении решений нелинейного уравнения (1) с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности состояния равновесия $u_0 \equiv 1$ в случае (7). Для рассмотренной задачи в окрестности u_0 имеется двумерное устойчивое локальное инвариантное интегральное многообразие, на котором эта задача принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения для комплексной переменной $\xi = \xi(t)$, характеризующей амплитуду отклонения решений от u_0:

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda\xi + d|\xi|^2\xi, \tag{11}$$

где $\lambda = \lambda_1(\omega)/\omega + O(\omega^{-2})$, а d – некоторая постоянная величина.

Сделав полярную замену в последнем уравнении $\xi(t) = \rho(t)\exp(i\varphi(t))$, получим уравнение на ρ:

$$\dot\rho = \operatorname{Re}\lambda\,\rho + \operatorname{Re}d\,\rho^3,$$

состояниями равновесия которого являются $\rho \equiv 0$ и $\rho \equiv (-\operatorname{Re}\lambda/\operatorname{Re}d)^{1/2}$, причем последнее не всегда существует. Учитывая знакопеременность $\operatorname{Re}\lambda_1(\omega)$, можно сделать вывод о том, что при $\omega \to \infty$ в уравнении (11) (а следовательно, и в уравнении (1)) происходит неограниченный процесс «рождения» из состояния равновесия и «гибели» устойчивого цикла.

Список литературы

1. *Wu J.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. Springer-Verlag, 1996.

2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматлит, 1958. 408 с. (English transl.: *Bogoliubov N.N., Mitropolsky Y.A.* Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations. New York, Gordon and Breach, 1961. 573 p.)

3. *Колесов Ю.С., Колесов В.С., Федик И.И.* Автоколебания в системах с распределенными параметрами. Киев: Наукова думка, 1979. 162 с. (*Kolesov Yu.S., Kolesov V.S., Fedik I.I.* Avtokolebaniya v sistemakh s raspredelennymi parametrami. Kiev: Naukova dumka, 1979. 162 s. [in Russian]).

4. *Колесов Ю.С., Майоров В.В.* Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1974. 10. № 10. С. 1778–1788. (*Kolesov Yu.S., Mayorov V.V.* Novyy metod issledovaniya ustoychivosti resheniy lineynykh differentsial'nykh uravneniy s blizkimi k postoyannym pochti periodicheskimi koeffitsientami // Differentsialnye uravneniya. 1974. 10. № 10. S. 1778–1788 [in Russian]).

5. *Глызин С.Д.* Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона // Моделирование и анализ информационных систем. 2007. Т. 14, № 3. С. 29 – 42. (*Glyzin S. D.* A registration of age groups for the Hutchinson's equation // Modeling and Analysis of Information Systems. 2007. V. 14, № 3. P. 29 – 42 [in Russian]).

6. *Кащенко С.А., Майоров В.В.* Алгоритм исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с последействием и быстро осциллирующими коэффициентами // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1977. С. 70–81. (*Kashchenko S.A., Mayorov V.V.* Algoritm issledovaniya ustoychivosti resheniy lineynykh differentsial'nykh uravneniy s posledeystviem i bystro ostsilliruyushchimi koeffitsientami // Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy. Yaroslavl, 1977. S. 70–81 [in Russian]).

Applying the Averaging Principle to a Logistic Equation with Rapidly Oscillating Delay

Bykova N. D.*, Grigorieva E. V.**

**National Research Nuclear University MEPhI*
Kashirskoye shosse, 31, Moscow, 115409, Russia
P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia
***Belarus State Economical University,*
Partizanskii av., 26, Minsk, 220070, Belarus

Keywords: averaging, stability, nonlinear dynamics, normal form

The problem about the local dynamics of the logistic equation with rapidly oscillating time-periodic piecewise constant coefficient of delay was considered. It was shown that the averaged equation is a logistic equation with two delays. The criterion of equilibrium point stability was obtained. Dynamical properties of the original equation was considered provided that the critical case of equilibrium point stability problem was implemented. It was found that an increase of delay coefficient oscillation frequency may lead to an unlimited process of "birth" and "death" steady mode.

Сведения об авторах:
Быкова Надежда Дмитриевна,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
аспирант,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ассистент;
Григорьева Елена Викторовна,
Белорусский государственный экономический университет,
доктор физ.-мат. наук, профессор.