

УДК 517.9

## Асимптотика установившихся режимов конечно-разностных аппроксимаций логистического уравнения с запаздыванием и с малой диффузией

Кащенко С. А.<sup>\*,\*\*</sup>, Фролов В. Е.<sup>\*\*</sup>

*\* Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова  
150000, Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14*

*\*\* Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
115409, Россия, г. Москва, Каширское шоссе, 31*

*e-mail: kasch@uniyar.ac.ru, onsol.tu@gmail.com*

*получена 5 января 2014*

**Ключевые слова:** логистическое уравнение, аттрактор, ведущий центр, спиральные волны, асимптотика, устойчивость

Исследуется динамика конечно-разностной аппроксимации по пространственным переменным логистического уравнения с запаздыванием и диффузией. Предполагается, что коэффициент диффузии является малым, а мальтузианский коэффициент — большой. Специальными асимптотическими методами исследован вопрос о существовании и асимптотике аттракторов.

Показано, что в фазовом пространстве существует богатое множество аттракторов различных типов: ведущие центры, системы спиральных волн и т.д. Приведены основные асимптотические характеристики всех решений из соответствующих аттракторов. Представлены типовые графики движения фронтов волн различной структуры.

### 1. Постановка задачи

В ряде прикладных задач, например, в задачах математической экологии [1–18] важную роль играет логистическое уравнение с запаздыванием и диффузией

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\Delta N + \lambda[1 - N_{t-h}]N, \quad \frac{\partial N}{\partial \nu} \Big|_{x \in \Gamma} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $N = N(t, x, y) > 0$  характеризует плотность популяции,  $\Delta$  — оператор Лапласа, коэффициенты  $D$ ,  $\lambda$  и  $h$  положительны,  $N_{t-h} = N(t-h, x, y)$ ,  $\Gamma$  — граница области  $\Omega$ ,  $\nu$  — направление внешней нормали к  $\Gamma$ . Здесь рассматривается вопрос об асимптотике установившихся режимов системы дифференциально-разностных уравнений

$$\dot{N} = D\Delta_n N + \lambda[I - N(t-1)]N, \quad (2)$$

в которую преобразуется краевая задача (1) в результате замены времени  $t \rightarrow ht$  (с переобозначением  $lh$  опять через  $\lambda$ ) и стандартной разностной аппроксимации оператора Лапласа (с учетом граничных условий). Здесь  $N(t) \in R^n$ ,  $I$  — вектор, все координаты которого равны 1, а умножение векторов — покоординатное. За элементами  $N(t)$  сохраним термин “численность” в соответствующих точках ареала  $\Omega$ . Отметим, что систему (2) можно интерпретировать как модель, описывающую динамику популяции, обитающей в  $h$  локальных ареалах. Считая при этом, что миграций внутри ареалов нет, а обмен особями между соседними ареалами описывает оператор  $D\Delta_n$ .

Настоящая работа базируется на результатах работ [14, 19, 20]. Для изучения системы (2) используется метод большого параметра. Основное предположение состоит в том, что параметр  $\lambda$  достаточно велик, т.е. в отсутствие диффузии ( $D = 0$ ) колебания интенсивны. Каждое из уравнений системы (2) в этом случае имеет медленно осциллирующее экспоненциально орбитально устойчивое периодическое решение  $M_0(t)$  периода  $T_0(\lambda) = \exp \lambda(1 + o(1))$  (при  $\lambda \rightarrow \infty$ ). При условии  $D > D_{kp} = \exp[-\lambda(1 + o(1))]$  решение  $M_0(t)$  краевой задачи устойчиво, а при  $D < D_{kp}$  — неустойчиво. В системе (2) критическое значение коэффициента диффузии в задаче об устойчивости решения  $N_0(t) = M_0(t)I$  тоже имеет асимптотику  $\exp[-\lambda(1 + o(1))]$ . Эти результаты получены в [19]. Таким образом, наибольший интерес представляет изучение установившихся режимов в случае малой диффузии  $D = \exp[-\lambda\sigma]$  ( $\sigma > 0$ ).

Ниже показано, что и более простая по сравнению с (1) модель (2) имеет достаточно богатое множество аттракторов и получены асимптотики важнейших характеристик решений из этих множеств. Оказалось, что при уменьшении коэффициента диффузии происходит усложнение колебаний, и ниже некоторого порога имеет место явление, называемое “диффузионный хаос”. Отметим, что ряд результатов численного счёта приведен в работах [18] и [22, 23].

Полученные в настоящей работе выводы имеют, конечно, лишь характер тенденции для систем с реальными значениями мальтузианских коэффициентов. Ясно еще, что найденные здесь режимы далеко не исчерпывают всех возможных установившихся режимов. Кроме этого, не удастся перенести аналогии приводимых ниже утверждений на краевую задачу (1): при увеличении размерности  $n$  системы (2) для справедливости приводимых в статье результатов необходимо увеличение параметра  $\lambda$ .

Приведем здесь наиболее важные с биологической точки зрения характеристики решений  $N(t) = (N_1(t), \dots, N_n(t))$  системы (2):

$$N_{cp}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n N_j(t), \quad M[N_{cp}(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T N_{cp}(t) dt,$$

$$N_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{t \geq T} N_{cp}(t), \quad N_M = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \sup_{t \geq T} N_{cp}(t),$$

а через  $T(N)$  будем обозначать биологический период — характерное время между всплесками функции  $N_{cp}(t)$ . Увеличение значений  $N_{cp}(t)$ ,  $M(N_{cp}(t))$ ,  $N_m$  и уменьшение  $T(N)$  способствует повышению экологической стабильности популяции. При описании асимптотического поведения решений ниже будем ограничиваться изучением приведенных здесь показателей. Отметим, что на решении  $N \equiv N_0(t)$  эти

показатели такие:  $N_{cp}(t) = M_0(t)$ ,  $M(N_{cp}(t)) = 1$ ,  $T(N_0(t)) = \exp \lambda(1 + o(1))$ ,  $N_m = \exp[-\exp \lambda(1 + o(1))]$ ,  $N_M = \exp \lambda(1 + o(1))$ .

## 2. Колебания в одномерной области типа отрезка

**2.1.** Пусть  $\Omega = [0, 1]$  — “одномерный” ареал. В разностной модели (2) ему отвечает система

$$\dot{N}_j = d[N_{j+1} - 2N_j + N_{j-1}] + \lambda N_j[1 - N_j(t-1)], \quad (3)$$

где  $1 \leq j \leq n$ ,  $N_0 \equiv N_1$ ,  $N_{n+1} \equiv N_n$ ,  $d = \exp(-\lambda\sigma)$ .

Все описанные ниже установившиеся режимы имеют структуру ведущих центров: повторяющийся процесс пространственно-временного движения пиков численности от некоторого центра к обоим концам отрезка  $[0, 1]$ . Параметры этих ведущих центров определяются значением  $\sigma$ . Фиксируем номер  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) и положим  $\alpha_1 = \alpha_n = (n-1)^{-1}$ ,  $\alpha_k = (\max[(k-1), (n-k)])^{-1}$  ( $2 \leq k \leq n-1$ ). В зависимости от  $\sigma$  выделим три существенно различных случая: 1)  $0 < \sigma < \alpha_k$ , 2)  $\alpha_k < \sigma < 1$ , 3)  $\sigma > 1$ .

**2.2.** Пусть сначала  $0 < \sigma < \alpha_k$ . Для описания в этом случае наборов аттракторов введем в рассмотрение множество  $S_k$  начальных функций

$$\varphi(s) = (\varphi_1(s), \dots, \varphi_n(s)) \in C_{[-1,0]}(R^n),$$

которые удовлетворяют условиям:

$$1) \varphi_k(0) = 1, \quad 0 < \varphi_k(s) \leq 2 \exp \frac{1}{2} \lambda s, \quad s \in [-1, 0],$$

$$2) 0 < \varphi_j(s) \leq \sigma \exp[-n\sigma\lambda], \quad s \in [-1, 0], \quad j \neq k.$$

Через  $N_\varphi(t, k) = (N_{1\varphi}(t, k), \dots, N_{n\varphi}(t, k))$  обозначено решение системы (3) с начальными условиями  $\varphi(s) \in S_k$ , заданными при  $t = 0$ . Пусть  $t_k(\varphi)$  — первый на промежутке  $[2, \infty)$  корень (если он существует) уравнения  $N_{k\varphi}(t, \varphi) = 1$ . Введем в рассмотрение оператор последования  $\pi$ :

$$\pi(\varphi(s)) = N_\varphi(s + t_k(\varphi), k) \quad (s \in [-1, 0]).$$

Сформулируем два основных результата для случая  $\sigma < \alpha_k$ .

**Теорема 1.** Пусть  $(1 + \alpha_k)^{-1} \alpha_k < \sigma < \alpha_k$ . Тогда найдется такое  $\lambda_0 > 0$ , что при  $\lambda \geq \lambda_0$  выражение  $t_k(\varphi)$  определено, непрерывно зависит от  $\varphi(s) \in S_k$  и

$$\pi(\varphi(s)) \in S_k. \quad (4)$$

Из (4) следует, что оператор  $\pi : S_k \rightarrow S_k$  имеет неподвижную точку  $\varphi_0(s)$ , которой отвечает периодическое с периодом  $t_k(\varphi_0)$  решение  $N_0(t, k) = N_{\varphi_0}(t, k)$ .

**Теорема 2.** В условии теоремы 1 решение  $N_0(t, k)$  экспоненциально орбитально устойчиво, и при  $t \rightarrow \infty$  к нему стремятся все решения с начальными условиями из  $S_k$ .

Асимптотические (при  $\lambda \rightarrow \infty$ ) формулы для  $N_0(t, k)$  громоздки. Не приводя их, опишем лишь основные характеристики  $N_0(t, k)$ . Период  $t_k(\varphi_0)$  имеет тот же главный член асимптотики, что и  $T_0(\lambda)$ , то  $T_0(\lambda) - t_k(\varphi_0) \rightarrow \infty$  ( $\lambda \rightarrow \infty$ ). Значения каждой из функций  $N_{j\varphi_0}(t, k)$  на отрезке  $[0, t_k(\varphi_0)]$  совершают один всплеск; начало которого совпадает примерно с  $t = |j - k|\sigma$ , а длительность близка к 1. Наибольшее на каждом всплеске значение равно  $O(\exp \lambda)$ . На отрезке  $[0, t_k(\varphi_0)]$  до начала и после конца всплеска значения  $N_{j\varphi_0}(t, k)$  асимптотически малы.

Интересно отметить, что по сравнению с  $N_0(t)$  колебания в режиме  $N_{\varphi_0}(t, k)$  существенно стабильнее: меньше значения  $T(N_{\varphi_0}(t, k))$  и в несколько раз выше значений  $M[N_{cp}(t)]$ ,  $N_m$  и  $N_M$ . Все эти преимущества проявляются тем более ярко, чем ближе номер  $k$  к значениям 1 или  $n$ . При увеличении параметра  $\sigma$  (т.е. при уменьшении коэффициента  $d$ ) в рамках неравенства  $\sigma < \alpha_k$  на решении  $N \equiv N_{\varphi_0}(t, k)$  значение  $N_m$  тоже возрастает, а  $M[N_{cp}(t)]$ ,  $N_M$  и  $T(N_{\varphi_0}(t, k))$  убывают.

**2.3.** При  $\alpha_k < \sigma < 1$  стабилизирующая роль диффузии выражена еще более сильно. Для описания структуры аттракторов здесь в чисто техническом плане удобно немного изменить понятие решения. Рассмотрим множество  $S_0$  всех положительных функций  $\psi(s) \in C_{[-1, 0]}$ , удовлетворяющих условиям  $\psi(s) \leq \exp \frac{1}{2}\lambda s$  и  $\psi(0) = 1$ . Фиксируем затем произвольно элементы  $g_1(s), \dots, g_n(s) \in S_0$  и параметры  $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  из отрезка  $[\sigma - \lambda^{-1/2}, \sigma + \lambda^{-3/2}]$ . Для  $t \in [0, \xi_1]$  через  $N_1(t, g, \xi, 1)$  обозначим решение (в обычном смысле) уравнения

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= d[g_2(t - \xi_1) - N_1] + f(N_1), \quad f(N) = \lambda N[1 - N(t - 1)], \\ N_1(s, g, \xi, 1) &= g_1(s), \quad s \in [-1, 0]. \end{aligned}$$

При  $t \in [\xi_1, \xi_1 + \xi_2]$  определим  $N_1(t, g, \xi, 1)$  и  $N_2(t, g, \xi, 1)$  как решения (3) при  $j = 1$  и уравнения

$$\dot{N}_2 = d[N_1 + g_3(t - (\xi_1 + \xi_2)) - 2N_2] + f(N_2)$$

с начальными условиями  $N_1(s + \xi_1, g, \xi, 1)$  и  $g_2(s)$  при  $t = \xi_1$ . Аналогично для  $t \geq \sum_{j=1}^n \xi_j$  определим  $N_j(s + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j, g, \xi, 1)$  как решения системы (3) с начальными

условиями  $N_1\left(s + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j, g, \xi, 1\right), \dots, N_{n-1}(s + \xi_{n-1}, g, \xi, 1), g_n(s)$  при  $t = \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j$ . Биологический смысл здесь такой: при  $t = 0$  начинается резкий всплеск  $N_1$ , через время  $\xi_1 \approx \sigma$  — всплеск  $N_2$  и т.д. Последний аргумент функций  $N_j(t, g, \xi, 1)$  указывает, что первый при  $t \geq 0$  всплеск совершает функция с номером 1, т.е.  $N_1$ . Аналогично, с точностью до переобозначений, определяются функции  $N_j(t, g, \xi, n)$ : здесь волна всплесков идет, начиная от точки с номером  $n$  до точки с номером 1. При  $1 < k < n$  волны всплесков идут в сторону как убывания, так и возрастания номеров  $j$ , начиная от  $j = k$ . Определение решения здесь чуть сложнее. Достаточно привести его для  $k = 2$ . Сначала на отрезке  $[0, \min(\xi_1, \xi_2)]$  находим  $N_2(t, g, \xi, 2)$  как решение уравнения

$$N_2 = d[g_1(t - \xi_1) + g_3(t - \xi_2) - 2N_2] + f(N_2)$$

с начальным условием  $g_2(s)$  при  $t = 0$ . Рассмотрим два случая. Если  $\xi_1 \leq \xi_2$ , то для  $t \in [\xi_1, \xi_2]$  функции  $N_{1,2}(t, g, \xi, 2)$  находим из системы уравнений (3) при  $j = 1$  и

$$\dot{N}_2 = d[N_1 + g_3(t - \xi_2) - 2N_2] + f(N_2)$$

с начальными условиями (при  $t = \xi_1$ )  $g_1(s)$  и  $N_2(s + \xi_1, g, \xi, 2)$ . На отрезке  $t \in [\xi_2, \xi_2 + \xi_3]$  функции  $N_{1,2,3}(t, g, \xi, 2)$  являются решением системы (3) при  $j = 1, 2$  и уравнения

$$\dot{N}_3 = d[N_2 + g_4(t - (\xi_2 + \xi_3)) - 2N_3] + f(N_3) \quad (5)$$

с соответствующими начальными условиями. При  $t > \xi_2 + \xi_3$  определение  $N_j(t, g, \xi, 2)$  полностью аналогично приведенному выше определению  $N_j(t, g, \xi, 1)$ .

Если же  $\xi_1 > \xi_2$ , то на отрезке  $[\xi_2, \xi_1]$  сначала строим решения системы (3) ( $j = 2$ ) и (5) с начальными (при  $t = \xi_2$ ) условиями  $N_2(s + \xi_2, g, \xi, 2)$  и  $g_3(s)$ . Для  $t > \xi_1$  функция  $N_1(t, g, \xi, 2)$  является решением уравнения (3) (при  $j = 1$  с начальными условиями  $g_1(s)$  при  $t = \xi_1$ ), а все остальные функции определяются так же, как и в рассмотренных выше случаях.

Обозначим, наконец, через  $t_j(g, \xi, k)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) наименьший на промежутке  $[2+ |k - j| \sigma, \infty)$  корень (если он существует) уравнения  $N_j(t, g, \xi, k) = 1$ . Отметим, что значение  $t_j(g, \xi, k)$  указывает момент начала очередного всплеска значений  $N_j(t, g, \xi, k)$ . Набор функций  $g(s) = (g_1(s), \dots, g_n(s))$  будем называть начальными условиями.

Имеет место следующий промежуточный результат.

**Лемма 1.** Пусть  $\alpha_k < \sigma < 1$ . Найдется такое  $\lambda_0$ , что при  $\lambda \geq \lambda_0$  значения  $t_j(g, \xi, k)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) определены и непрерывно зависят от первых двух аргументов.

Положим

$$\bar{\xi}_j = [t_{j+1}(g, \xi, k) - t_j(g, \xi, k)] \operatorname{sgn} (j - k + \frac{1}{2}) \quad (j = 1, \dots, n - 1),$$

$$\bar{g}_j(s) = N_j(s + t_j(g, \xi, k), g, \xi, k) \quad (j = 1, \dots, n; s \in [-1, 0]).$$

Основной результат состоит в следующем.

**Теорема 3.** Пусть  $\alpha_k < \sigma < 1$ . Тогда найдется такое  $\lambda_0$ , что при  $\lambda \geq \lambda_0$  выполнены условия

$$\bar{\xi}_j \in [\sigma - \lambda^{-1/2}, \sigma + \lambda^{-1/2}] \quad (j = 1, \dots, n - 1), \quad (6)$$

$$\bar{g}_j(s) \in S_0 \quad N_j(t, g, \xi, k) = N_j(t - t_k(g, \xi, k), \bar{g}, \bar{\xi}, k) \quad (7)$$

при  $t \geq t_k(g, \xi, k)$  и  $j = 1, \dots, n$ ,  $\bar{g} = (\bar{g}_2(s), \dots, g_n(s))$ ,  $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_{n-1})$ .

Таким образом, через отрезок времени  $t_k(g, \xi, k)$  ситуация примерно повторяется, но с той разницей, что роль величин  $g_j(s)$  и  $\xi_j$  теперь играют величины  $\bar{g}_j(s)$  и  $\bar{\xi}_j$  (из того же множества  $S_0$  и отрезка  $[\sigma - \lambda^{-1/2}, \sigma + \lambda^{-1/2}]$ ).

Из приведенного здесь результата, конечно, следует вывод о существовании таких наборов  $g_{j_0}(s) \in S_0$  и  $\xi_{j_0} \in [\sigma - \lambda^{-1/2}, \sigma + \lambda^{-1/2}]$ , что решение  $N(t, g_0, \xi_0, k)$  будет периодически с периодом  $t_k(g_0, \xi_0, k)$ . Исследовать устойчивость этого решения не удается. По-видимому, оно неустойчиво.

Важным является то обстоятельство, что  $t_k(g, \xi, k) = O(1)$ , т.е. по сравнению с рассмотренным выше случаем  $\sigma < \alpha_k$  временной промежуток между всплесками каждой из функций  $N_j(t, g, \xi, k)$  существенно короче  $T(N(t, g, \xi, k)) \ll T(N_{\varphi_0}(t, k))$ . Длительность всплесков близка к 1, а при  $N = N(t, g, \xi, k)$  имеют место равенства  $M[N_{cp}(t)] = O(\exp \lambda)$ ,  $N_M = O(\exp \lambda)$ ,  $N_m = \exp(-j\lambda)$  ( $j > 0$ ). Отметим, наконец, что при увеличении  $\sigma$  (в интервале  $(\alpha_k, 1)$ ) значения  $T(N(t, g, \xi, k))$  и  $N_M$  монотонно

убывают,  $N_m$  монотонно растет. За изменением величины  $M[N_{cp}(t)]$  (при увеличении  $\sigma$ ) проследить не удается.

Решение  $N(t, g, \xi, k)$  можно интерпретировать как повторяющийся через определенное время и движущийся от точки с номером “ $k$ ” (к крайним точкам  $j = 1$  и  $j = n$ ) импульс.

**2.4.** Осталось рассмотреть случай  $\sigma > 1$ . И в этом случае для определенного, как и выше, решения  $N(t, g, \xi, k)$  системы (3) остается справедливым утверждение о существовании и непрерывной зависимости выражений  $t_j(g, \xi, k)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) от первых двух аргументов.

Основное утверждение здесь таково.

**Теорема 4.** Пусть  $\sigma > 1$ . Найдется такое  $\lambda_0 > 0$ , что при  $\lambda \geq \lambda_0$  выполнены условия (6), (7) и неравенства

$$|t_k(g, \xi, k) - 2\sigma| \leq \lambda^{-1/2},$$

$$|t_{k+j}(g, \xi, k) - (\xi_k + \dots + \xi_{k+j-1}) - 2\sigma| \leq \lambda^{-1/2} \quad (j = 1, \dots, n - k), \quad (8)$$

$$|t_{k-j}(g, \xi, k) - (\xi_{k-1} + \dots + \xi_{k-j}) - 2\sigma| \leq \lambda^{-1/2} \quad (j = 1, \dots, k - 1). \quad (9)$$

Неравенства (8), (9) означают, что все функции  $N_j$  с нечетными номерами почти одновременно (с расхождением по времени не более, чем на  $\lambda^{-1/2}$ ) начинают всплеск, длительность которого близка к 1. После этого значения всех указанных функций падают до асимптотически малых величин. Через время  $\sigma + O(\lambda^{-1/2})$  после начала всплесков функций с нечетными номерами совершают всплески (длительностью  $1 + o(1)$ ) все функции с четными номерами, а еще через отрезок времени  $\sigma + o(1)$  — опять идут всплески функций с нечетными номерами и т.д. Обратим внимание, что описанные здесь установившиеся режимы являются максимально изломанными по “пространственной” переменной  $j$ . Интересен еще тот факт, что при  $\sigma > 1$  главные члены асимптотик всех основных характеристик  $N(t, g, \xi, k)$  не зависят от номера  $k$ .

Заметим, что при  $\alpha_k < \sigma < 1$  и при  $\sigma > 1$  решения (в обычном смысле) системы (3) с начальными условиями из множества  $S_k$  через некоторое время приобретают структуру описанных выше функций  $N(t, g, \xi, k)$ .

Приведем итоговые для рассматриваемого случая данные об основных характеристиках решений  $N(t, g, \xi, k)$ :

$$T(N(t, g, \xi, k)) = t_k(g, \xi, k) = 2\sigma + o(1),$$

$$M[N_{cp}(t)] = (2\sigma)^{-1}(1 + o(1)) \exp \lambda, \quad N_M = \exp \lambda(1 + o(1)), \quad N_m = \exp[-j\lambda] \quad (j > 0).$$

Таким образом, при увеличении  $\sigma$  биологический период растет,  $N_M$  практически не меняется, а  $M[N_{cp}]$  и  $N_m$  убывают.

### 3. О колебаниях на “окружности”

**3.1.** Снова рассматриваем систему (3), где теперь считаем, что

$$N_0 \equiv N_n, \quad N_{n+1} \equiv N_1. \quad (10)$$

И здесь, конечно, каждая точка с номером  $j$  может выступать как ведущий центр, от которого в обоих направлениях (с примерно равной скоростью) распространяются всплески численностей. Тем самым полностью сохраняются все выводы пункта 2, причем для каждого номера  $j$  имеем  $\alpha_j = \alpha_0 = [n + \frac{1}{2}(1 - (-1)^n)]^{-1}$ .

**3.2.** Для случая окружности при условии  $\sigma > 2n^{-1}$  удастся установить существования режимов принципиально иной структуры — типа бегущих волн. Опишем аттракторы, решения из которых имеют отмеченную структуру. Для большей наглядности сначала условно “разорвем” в одной точке окружность, т.е. рассмотрим систему (3) для случая “отрезка”:  $N_0 \equiv N_1, N_{n+1} \equiv N_n$ . Выше были определены функции  $N_j(t, g, \xi, 1)$ . Введем здесь функции  $N_j(t, g, \xi)$  по правилу:

$$N_j(t, g, \xi) \equiv N_j(t, g, \xi, 1) \quad (1 \leq j \leq n-1) \quad \text{при } t \leq t_0 = \xi_1 + \dots + \xi_{n-1},$$

а при  $t > t_0$  через  $N_j(t, g, \xi)$  ( $1 \leq j \leq n$ ) обозначим решение системы (3), (10) с начальными (при  $t = t_0$ ) условиями  $N_j(s) = N_j(t_0 + s, g, \xi)$  ( $1 \leq j \leq n-1$ ),  $N_n(s) = g_n(s)$ .

Используя обозначения из пункта 2, сформулируем основной результат.

**Теорема 5.** *Найдутся такие значения  $\beta_0 \in (2n^{-1}, 1)$  и  $\lambda_0$ , что при  $2n^{-1} < \sigma < \beta_0$  и  $\lambda \geq \lambda_0$  выполнены условия (6), (7) (индекс “ $k$ ” в которых теперь можно не учитывать). Кроме этого, равномерно относительно  $g_s$  и  $\xi$  имеет место равенство  $t_1(g, \xi) = n\sigma + o(1)$ .*

Этот результат означает, что волна  $N(t, g, \xi)$  бесконечно долго бегает по окружности, совершая полный оборот за время, близкое к  $n\sigma$ . И в этом случае вопрос об устойчивости существующего здесь периодического решения остается открытым. Тем не менее, полезно подчеркнуть, что все решения из выведенных здесь аттракторов при  $\lambda \rightarrow \infty$  близки к периодическим равномерно на любом конечном отрезке времени. Отметим еще равенства

$$M[N_{cp}(t)] = c_1(1 + o(1)) \exp \lambda, \quad N_M = c_2(1 + o(1)) \exp \lambda, \quad N_m = \exp[c_3(1 + o(1))\lambda],$$

где  $c_1, c_2 > 1$ , а  $0 < c_3 < 1$ . При увеличении  $\sigma$  значения  $N_M$  и  $T(N(t, g, \xi))$  растут, а  $M[N_{cp}(t)]$  и  $N_m$  — убывают.

Тем самым случай окружности (при  $2/n < \sigma < \beta_0$ ) обладает большими преимуществами по сравнению с отрезком.

**3.3.** Бегущие волны, описанные в предыдущем пункте, можно назвать однопиковыми: по окружности движется волна с одним всплеском. Обобщая теорему 5, можно показать, что найдется такое  $\beta_1$ ,  $\beta_1 \in (\beta_0, 1)$ , что при условии  $4n^{-1} < \sigma < \beta_1$  система (2) имеет двухпиковые бегущие волны, а при условии  $8n^{-1} < \sigma < \beta_2$  ( $\beta_2 \in$

$(\beta_1, 1)$ ) – трехпиковые и т.д. Кроме таких режимов, при условии  $\beta_0 < \sigma < 1$  появляются некоторые гибридные структуры, занимающие промежуточное положение между бегущими волнами и ведущими центрами.

Поясним эту ситуацию. Рассмотрим снова решения  $N_j(t, g, \xi)$ . От точки с номером 1 всплеск движется (в одном направлении) к точке с номером  $n$ . При условии  $\alpha_0 < \sigma < 1$  “родится” новый всплеск, волна от которого пойдет в обоих направлениях. Двигаясь по одному из этих направлений, новая волна столкнется с движущейся ей навстречу “бегущей” волной, и они обе аннигилируют. Двигаясь по другому направлению, волна будет обегать окружность. Затем ситуация повторяется: до того, как движущаяся волна достигнет точки с номером 1, из нее родится новая волна и т.д.

При условии  $\sigma > 1$  ситуация полностью аналогична случаю отрезка: все рассматриваемые режимы становятся максимально изломанными по пространственной переменной. Всплески происходят поочередно (через время  $\approx \sigma$ ) в соседних точках.

**3.4.** В порядке обсуждения полученных в этом параграфе результатов остановимся еще раз на простейшей системе вида (3)

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= d(N_2 - N_1) + \lambda[1 - N_1(t - 1)]N_1, \\ \dot{N}_2 &= d(N_1 - N_2) + \lambda[1 - N_2(t - 1)]N_2, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\lambda \gg 1$ . При  $d = 0$  (без взаимосвязи между двумя ареалами) средние значения численностей  $N_1$  и  $N_2$  (в устойчивом режиме) равны 1. При  $d = \exp[-\lambda\sigma]$  и при фиксированном  $\sigma > 1$  их средние значения достигают больших значений – порядка  $\exp \lambda$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Таким образом, слабое воздействие на каждое из двух уравнений резко увеличивает средние значения. Подобное явление наблюдается и для уравнения Хатчинсона с малым внешним воздействием. Например, для уравнения

$$N = \lambda[1 - N(t - 1)]N + \exp(-\lambda\sigma) \quad (\lambda \gg 1, \sigma > 0)$$

установившиеся режимы имеют конечный (при  $\lambda \rightarrow \infty$ ) период, а среднее значение растет, как  $\exp \lambda$ . Конечно, можно, по-разному организовав малое воздействие между обоими уравнениями системы (11) или малое воздействие на каждое из этих уравнений, получать подобные эффекты. Таким образом с помощью “разумных” малых воздействий на высокоплодовитую популяцию достигается существенное изменение свойств установившихся режимов. Отметим, что локальная динамика системы (11) при значениях параметра  $\lambda$  близких к  $\pi/2$  подробно изучена в статьях [23, 24].

#### 4. О доказательстве результатов

Во всех утверждениях, приведенных в разделе 1, четко указан класс начальных функций рассматриваемых решений. Обоснование этих утверждений основано на построении асимптотики (равномерной относительно рассматриваемых начальных условий) решений при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Задача облегчается тем, что, в силу специфики уравнений с запаздыванием, можно действовать “шагами” длины (по времени) 1. При этом на каждом “шаге” получаем линейно неоднородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которой легко выписать в явном виде. В

настоящем параграфе на примере доказательства только одного из простейших результатов изложим детальную схему обоснования всех утверждений, приведенных в разделе 1.

Рассмотрим для простоты систему двух уравнений

$$\dot{N}_1 = \exp(-\lambda\sigma)[N_2 - N_1] + \lambda[1 - N_1(t - 1)]N_1, \quad (12)$$

$$\dot{N}_2 = \exp(-\lambda\sigma)[N_1 - N_2] + \lambda[1 - N_2(t - 1)]N_2 \quad (13)$$

и будем считать, что  $\sigma > 2$ . Фиксируем произвольно три параметра  $c$ ,  $c_1$  и  $c_2$  и так, чтобы  $0 < c < 1$ ,  $0 < c_1 < 1$ ,  $c_2 > 1$ . Введем два множества функций

$$S_1 = \{\varphi(s) \in C_{[-1,0]} : 0 < \varphi(s) \leq (1 + c) \exp \lambda s, \varphi(0) = 1\},$$

$$S_2 = \{\psi(s) \in C_{[-1,0]} : c_1 \exp \lambda(s - \sigma) \leq \psi(s) \leq c_2 \exp \lambda(s - \sigma)\}.$$

Обозначим через  $N_j(t)$  ( $j = 1, 2$ ) решения системы (12), (13) с начальными условиями  $N_1(s) = \varphi(s) \in S_1$ ,  $N_2(s) = \psi(s) \in S_2$  и пусть  $\tau_1$  – первый положительный корень уравнения  $N_2(t) = 1$ .

**Теорема 6.** Для каждой  $c$ ,  $c_1 \in (0, 1)$  и  $c_2 \geq \sigma$  найдется такое  $\lambda_0 > 0$ , что при  $\lambda \geq \lambda_0$  выражение  $\tau_1$  определено, равномерно относительно  $\varphi(s) \in S_1$  и  $\psi(s) \in S_2$ , выполнено равенство

$$\tau_1 = \sigma + o(1), \quad (14)$$

и имеют место включения

$$N_1(s + \tau_1) \in S_2, \quad N_2(s + \tau_1) \in S_1. \quad (15)$$

Отсюда следует, что через отрезок времени, равный  $\tau_1 = \sigma + o(1)$ , ситуация повторяется с заменой  $N_1 \leftrightarrow N_2$ . Пусть  $\tau_2$  – первый на промежутке  $[\tau_1, \infty)$  корень уравнения  $N_1(t) = 1$ . Из теоремы следует, что  $\tau_2 = 2\sigma + o(1)$  и

$$N_1(s + \tau_2) \in S_1, \quad N_2(s + \tau_2) \in S_2.$$

Доказательство теоремы составляют следующие 5 промежуточных утверждений, которые сформулируем в виде лемм. Все фигурирующие ниже оценки выполняются равномерно для указанных значений  $t$ .

**Лемма 2.** Пусть  $t \in [0, 2\sigma + 1]$ . Тогда при всех достаточно больших  $\lambda$  имеют место оценки

$$N_1(t) \leq 2 \exp \lambda t, \quad (16)$$

$$N_2(t) \leq c_0 \exp \lambda(t - \sigma), \quad c_0 = c_2 + 2(2\sigma + 1). \quad (17)$$

Для обоснования леммы заметим, что из (12), (13) следуют неравенства:

$$\dot{N}_1 \leq N_2 \exp(-\lambda\sigma) + \lambda N_1, \quad \dot{N}_2 \leq N_1 \exp(-\lambda\sigma) + \lambda N_2.$$

Отсюда получаем:

$$\dot{N}_1 + \dot{N}_2 \leq (\lambda + \exp(-\lambda\sigma))(N_1 + N_2),$$

$$N_1(t) \leq (1 + c + o(1)) \exp \lambda t \leq 2 \exp \lambda t.$$

Для функции  $N_2(t)$  верна формула

$$N_2(t) = N_2(\tau) \exp \left[ (\lambda - \exp(-\lambda\sigma))(t - \tau) - \lambda \int_{\tau}^t N_2(s - 1) ds \right] + \\ + \exp(-\lambda\sigma) \int_{\tau}^t N_1(s) \exp \left[ (\lambda - \exp(-\lambda\sigma))(t - s) - \lambda \int_s^t N_2(\xi - 1) d\xi \right] ds. \quad (18)$$

Из нее при  $\tau = 0$  и с учетом (16) приходим к нужной оценке

$$N_2(t) \leq N_2(0) \exp \lambda t + \exp \lambda(t - \sigma) \int_0^t N_1(s) \exp(-\lambda s) ds \leq c_0 \exp \lambda(t - \sigma).$$

**Лемма 3.** Пусть  $t \in [0, 1]$ . Тогда для достаточно больших  $\lambda$  верны оценки

$$\exp(\lambda t - 2) \leq N_1(t), \quad (19)$$

$$c_1(1 - c) \exp \lambda(t - \sigma) \leq N_2(t). \quad (20)$$

Обоснование леммы вытекает из неравенств

$$N_1(t) \geq N_1(0) \exp [(\lambda - \exp(-\lambda\sigma))t] - \lambda \int_0^t N_1(s - 1) ds \geq \exp[\lambda t - 2],$$

$$N_2(t) \geq N_2(0) \exp \left[ \lambda(1 - \exp(-\lambda\sigma))t - \lambda \int_0^t c_0 \exp \lambda(s - \sigma) ds \right],$$

в которых учтено, что  $N_1(0) = 1$  и  $N_2(0) = c_1 \exp(-\lambda\sigma)$ .

**Лемма 4.** Пусть  $t \in [1, 2]$ . Тогда при достаточно больших  $\lambda$  имеем оценку

$$N_2(t) \geq c_1(1 - c)^2 \exp \lambda(t - \sigma). \quad (21)$$

Для обоснования достаточно в (18) положить  $\tau = 1$ , отбросить второе слагаемое (положительное), а в первом для  $N_2(s - 1)$  учесть неравенство (17).

Ниже через  $\delta$  будем обозначать произвольную достаточно малую (независимо от  $\lambda$ ) постоянную.

**Лемма 5.** Пусть  $t \in [1 + \delta, 2]$ . Тогда при достаточно больших  $\lambda$  верно неравенство

$$N_1(t) \leq \exp \lambda(1 - 2\sigma). \quad (22)$$

Обоснование леммы следует из формулы

$$N_1(t) = N_1(\tau) \exp \left[ (\lambda - \exp(-\lambda\sigma))(t - \tau) - \lambda \int_{\tau}^t N_1(s - 1) ds \right] + \\ + \exp(-\lambda\sigma) \int_{\tau}^t N_2(s) \exp \left[ (\lambda - \exp(-\lambda\sigma))(t - s) - \lambda \int_s^t N_1(\xi - 1) d\xi \right] ds, \quad (23)$$

(аналогичной (18)). Чтобы убедиться в этом, положим здесь  $\tau = 1$ , и для стоящих в правой части (23) функций  $N_1(s - 1)$ ,  $N_2(s)$  воспользуемся предыдущими оценками. В результате приходим к неравенствам

$$N_1(t) \leq 2 \exp \left[ \lambda - \lambda \int_1^t \exp[\lambda(s - 1) - 2] ds \right] + (\exp \lambda(t - \sigma)) \int_1^t c_0 \exp \left[ \lambda(s - \sigma) - \lambda s - \right. \\ \left. - \lambda \int_s^t \exp[\lambda(\xi - 1) - 2] d\xi \right] ds \leq 2 \exp[-\exp \lambda \delta (1 + o(1))] + \lambda^{-1} c_0 (\exp 2) \exp \lambda(1 - 2\sigma),$$

из которых и получаем утверждение леммы.

**Лемма 6.** Пусть  $t \in [2, \sigma + \delta]$ . Тогда для достаточно больших  $\lambda$  имеют место соотношения

$$N_1(t) \leq N_2(2)(t - 2) \exp \lambda(t - 2 - \sigma) + \exp \lambda(t - 1 - 2\sigma), \quad (24)$$

$$N_2(t) = c(\lambda) \exp \lambda(t - \sigma) [1 + O(\exp(-\lambda\delta))], \quad (25)$$

где

$$c_1(1 - c)^2 \leq c(\lambda) \leq c_0. \quad (26)$$

**Доказательство леммы 6.** Сначала из формулы (23) при  $\tau = 2$  получаем оценку

$$N_1(t) \leq N_1(2) \exp \lambda(t - 2) + \exp \lambda(t - \sigma) \int_2^t N_2(s) \exp(-\lambda s) ds.$$

Учитывая здесь неравенства (17) и (22), приходим к соотношению

$$N_1(t) \leq c_0 \sigma \exp \lambda(t - 2\sigma). \quad (27)$$

Затем в формуле (18) положим  $\tau = 2$  и воспользуемся оценками (27), (21) и (17). В результате получаем равенство (25), в котором удовлетворяющая неравенствам (26) величина  $c(\lambda)$  определяется выражением  $c(\lambda) = N_2(2) \exp \lambda(\sigma - 2)$ . Для завершения обоснования леммы осталось воспользоваться равенством (25) и оценкой (22) в формуле (23) при  $\tau = 2$ .

Из леммы 6 сразу следует существование величины  $\tau_1$  и оценка (14). (Для доказательства простоты этого корня, кроме соотношений (24)–(26), необходимо лишь воспользоваться равенством (13)).

Из приведенных выше оценок и из равенства (14) приходим к выводу, что для каждого фиксированных  $c, c_1 \in (0, 1)$  и при достаточно больших  $\lambda$  имеют место неравенства

$$\begin{aligned} N_2(s + \tau_1) &\leq (1 + c) \exp \lambda s \quad (s \in [-1, 0]), \\ c_1 \exp \lambda(s - \sigma) &\leq N_1(s + \tau_1) \leq \sigma \exp \lambda(s - \sigma). \end{aligned}$$

Таким образом, при  $0 < c, c_1 < 1, c_2 \geq \sigma$  верны включения (15).

## 5. О колебаниях в двумерной области

**5.1. О структурах типа “ведущий центр”.** Рассмотрим систему уравнений (2). Координаты решения  $N(t)$  в случае двумерной области удобнее нумеровать двумя индексами  $i$  и  $j$  (по  $x_1$  и  $x_2$ ), пределы изменения которых стандартно определяются геометрией области  $\Omega_0 = \{(x_{1i}, x_{2j}) \in \Omega\}$ . Как оказывается, на систему (2) распространяются все выводы раздела 2, а фигурирующая там величина  $\alpha_k$  вычисляется по следующему правилу. Пусть  $0 < \sigma < 1$ . Фиксируем произвольную точку  $(x_{1i}, x_{2j})$  из  $\Omega_0$  и присвоим ей индекс 1, а всем точкам из  $\Omega_0$  с номерами  $i+1, j, i-1, j; i, j+1, i, j-1$  присвоим индекс 2. Индекс 3 присвоим всем тем точкам из  $\Omega_0$ , у которых только один (из двух) номер отличается, причем на 1, от номера хотя бы одной из точек с индексом 2 и т.д. Для точки  $(x_{1i}, x_{2j})$  число  $\alpha_{ij}$  – аналог  $\alpha_k$  – равной величине, обратной наибольшему для рассматриваемой точки индексу. Аттрактор  $S_k$  из раздела 2 аналогичен аттрактору  $S_{ij}$  системы (2), решения которого ведут себя так: сначала происходит резкий всплеск значений в точке  $(x_{1i}, x_{2j})$  функции  $N_{ij}(t)$ , через время  $\approx \sigma$  – всплеск значений в точке с индексом 2, еще через отрезок времени  $\approx \sigma$  – в точках с индексом 3 и т.д. Если  $(1 + \alpha_{ij})^{-1} \alpha_{ij} < \sigma < \alpha_{ij}$ , то через асимптотически большой промежуток времени происходит всплеск в точке  $(x_{1i}, x_{2j})$  и ситуация повторяется. В этом случае все решения из  $S_{ij}$  стремятся к периодическому при  $t \rightarrow \infty$ . Если же  $\alpha_{ij} < \sigma < 1$ , то всплеск в точке  $(x_{1i}, x_{2j})$  и повторение ситуации происходит через конечное (при  $\lambda \rightarrow \infty$ ) время. Таким образом, здесь описаны установившиеся режимы типа “ведущих центров”. Обратим внимание, что таким центром может быть любая точка множества  $\Omega_0$ .

В случае  $\sigma > 1$  ситуация тоже полностью аналогична рассмотренной в разделе 2: реализуются “максимально изломанные по пространственным переменным” колебания. Даже приведенные в этом разделе асимптотические характеристики установившихся режимов не меняются.

**5.2. О “спиральных” волнах в системе (2).** Синтезируя изученные выше структуры типа ведущих центров и бегущих волн, удается построить существенно более сложные режимы, являющиеся аналогом систем спиральных волн. Как оказывается, их можно описать с помощью довольно простого отображения множества  $\Omega_0$  в себя. Для этого фиксируем сначала целое  $m_0 = \{\sigma^{-1}\}$  ( $0 < \sigma < 1$ ) и через  $K_{-m_0}, \dots, K_{-1}, K_0$  обозначим произвольные множества точек из  $\Omega_0$ . Определим оператор  $\Phi : K \subset \Omega_0 \rightarrow \bar{K} \subset \Omega_0$  по правилу

$$\Phi K = \{(x_{1i}, x_{2j+1}), (x_{1i}, x_{2j-1}), (x_{1i+1}, x_{2j}), (x_{1i-1}, x_{2j}),$$

где  $(x_{1i}, x_{2j}) \in K$  и  $(x_{1s}, x_{2p}) = \emptyset$ , если  $(x_{1s}, x_{2p}) \notin \Omega_0\}$ .

Рассмотрим отображение

$$K_{r+1} = \Phi K_r - \left( \bigcup_{i=r-m_0}^r K_i \right), \quad j = 0, 1, \dots \quad (28)$$

Следующее простое утверждение говорит о периодичности всех установившихся режимов отображения (28).

**Лемма 7.** Для каждого набора множества  $K_{-m_0}, \dots, K_0$  найдутся такие  $j_0$  и  $k_0$ , что

$$K_{r+K_0} \text{ при } r \geq r_0.$$

Задание множеств  $K_r$  при  $-m_0 \leq r \leq 0$  определяется заданием начальных при  $t \in [-1, 0]$  условий. Для  $r \geq r_0$  множество  $K_r$  определяет положение фронта воли численности, а  $K_{r+1}$  – положение этого фронта через отрезок времени  $\approx \sigma$ . Отметим, что ведущим центрам отвечает (при достаточно больших  $r$ ) последовательность множеств  $K_r = \emptyset$  ( $r \geq r_0$ ). Можно учесть тот факт, что после того, как в некоторой точке ареала начался всплеск численности (который длится в течение интервала времени порядка 1), через некоторый отрезок времени порядка  $n_0\sigma$  в этой же точке опять происходит начало всплеска. Поэтому отображение (27) можно дополнить слагаемым  $K_{r-n_0} - \left( \bigcup_{j=0}^{n_0-1} K_{r-j} \right)$ . В итоге приходим к отображению множеств из  $\Omega_0$

$$K_{r+1} = \Phi K_r - \left( \bigcup_{j=0}^n K_{r-j} \right) + K_{r-n_0} - \left( \bigcup_{j=0}^{n_0-1} K_{r-j} \right) \quad (29)$$

Именно это отображение задаёт движение фронта начала волны в ареале. Напомним, что  $n$  здесь играет роль времени: при этом “времени”, равному единице в (29), соответствует временной отрезок длительности  $\sigma + o(1)$  в реальном времени  $t$ .

Такое соответствие между установившимися режимами системы (2) и отображения (28) удастся обосновать только для значений  $\sigma$  из некоторого интервала  $(\alpha, \beta)$ , где  $0 < \alpha < \beta < 1$  и числа  $\alpha$  и  $\beta$  зависят от номера  $n$  и от самих множеств  $K_{-m_0}, \dots, K_0$ . Для примера укажем, что, выбирая при  $m_0 = 1$  множества  $K_{-1}$  и  $K_0$  в виде одинаковых и параллельных отрезков, расположенных на минимальном расстоянии друг от друга (и не совпадающих друг с другом), в качестве установившихся режимов отображения (28) получаем наборы сосуществующих спиральных волн.

Примеры структур типа “ведущий центр” изображены на рис. 1.а. и 1.б.

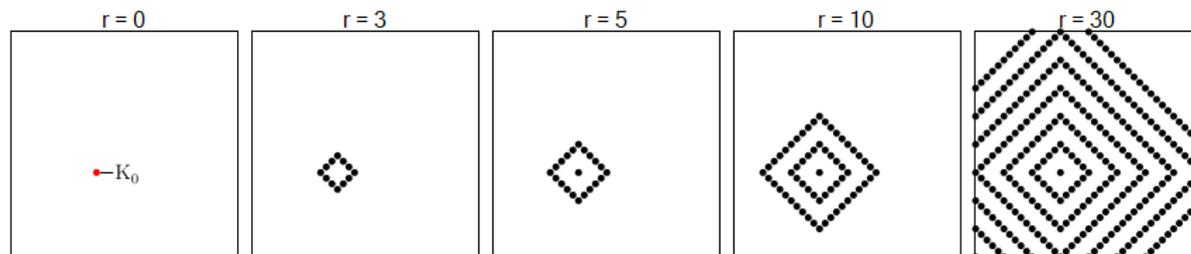


Рис. 1.а. Множество  $\Omega_0$  - квадрат

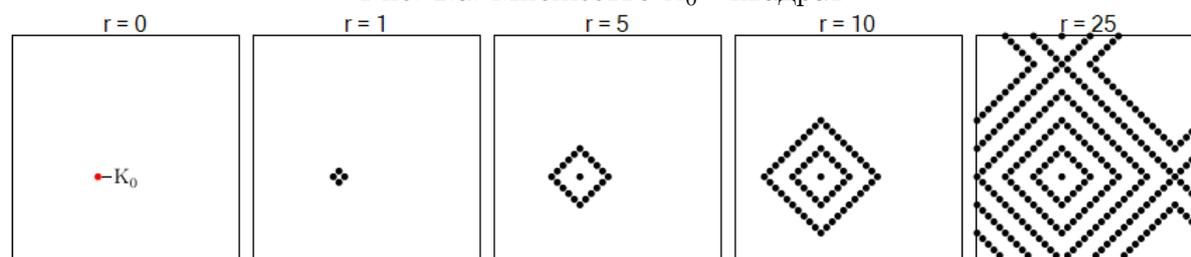


Рис. 1.б. Множество  $\Omega_0$  — тор

Далее на рисунках в качестве примеров показан процесс выхода на спиральные волны и на систему спиральных волн.

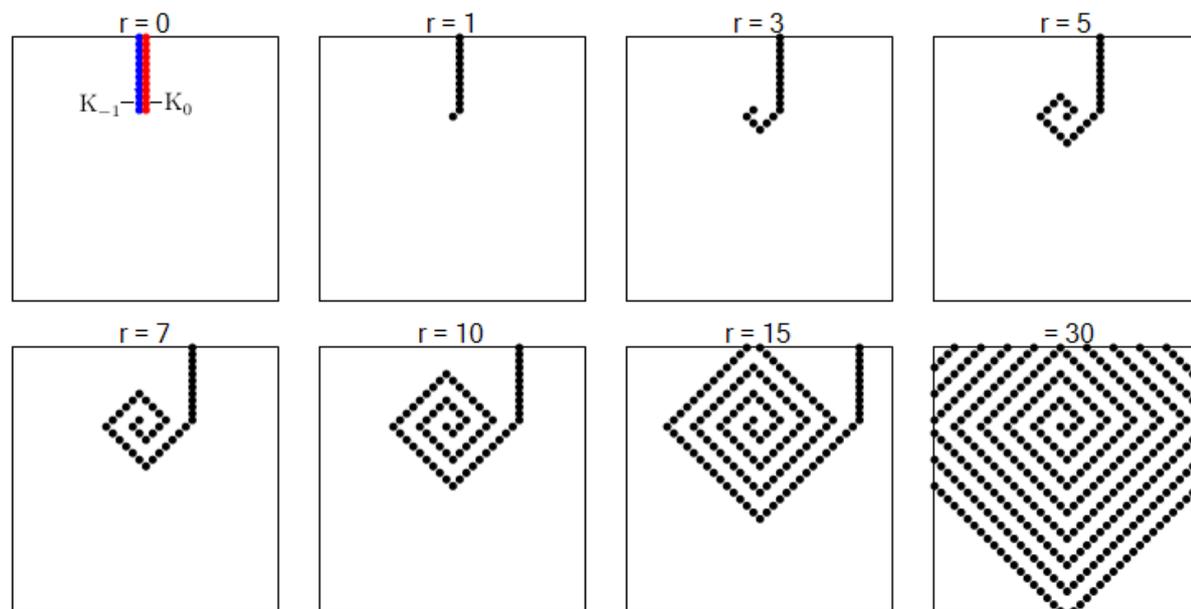


Рис. 2.

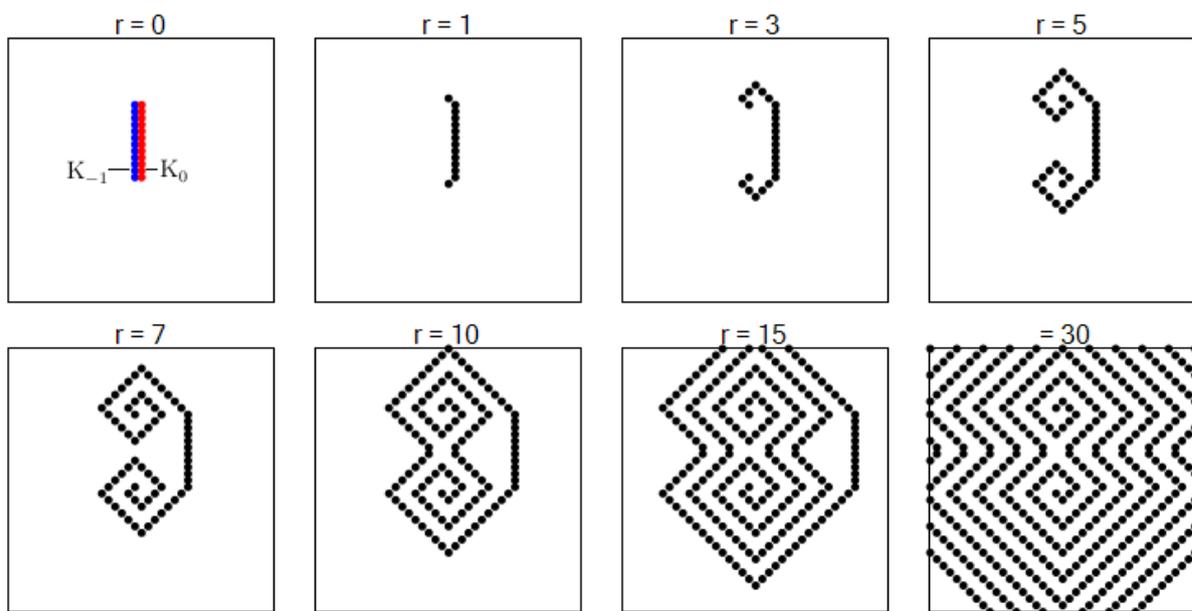


Рис. 3.

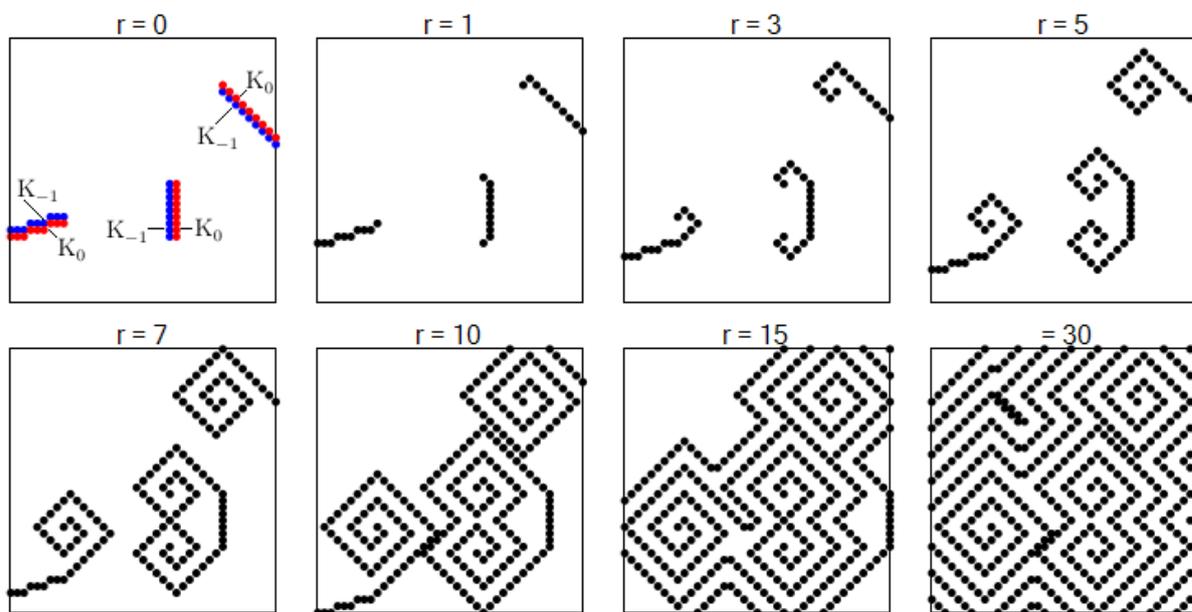


Рис. 4.

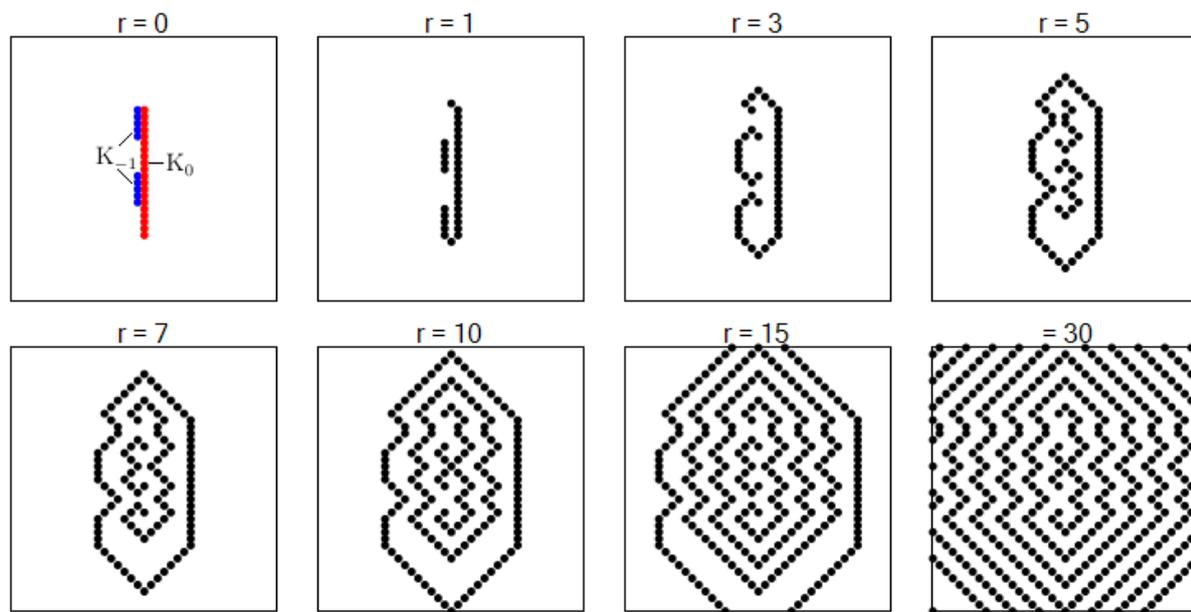


Рис. 5.

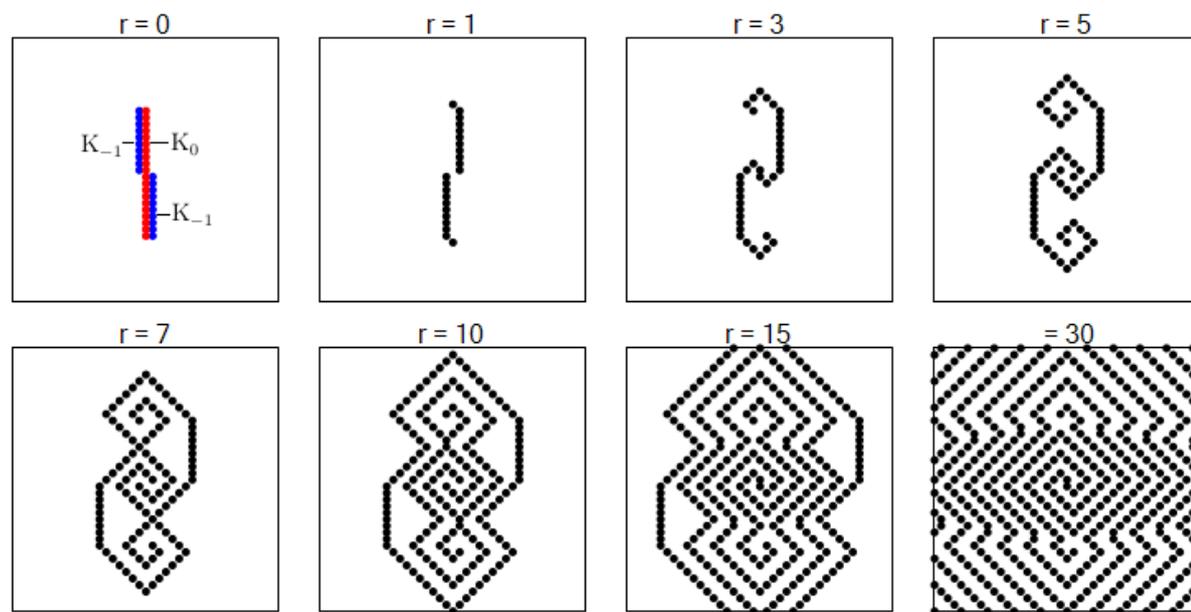


Рис. 6.

На рис. 7 показано сосуществование спиральной волны и ведущего центра для случая, когда множество  $\Omega_0$  является квадратом.

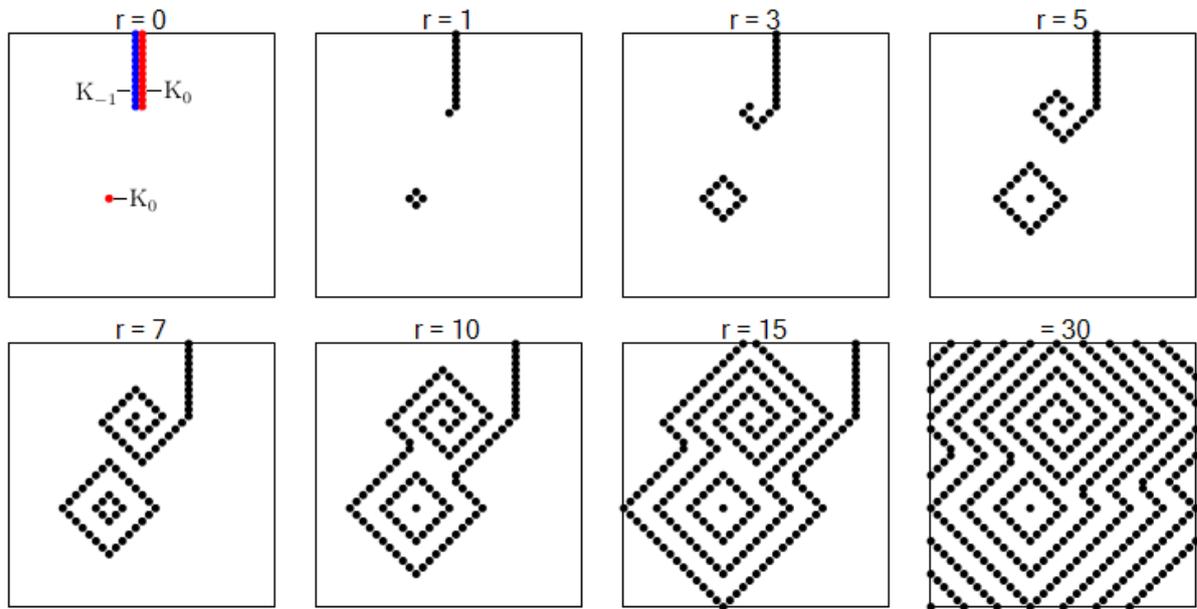


Рис. 7.

На рис. 8–10 показано развитие спиральных волн для случая, когда множество  $\Omega_0$  является тором.

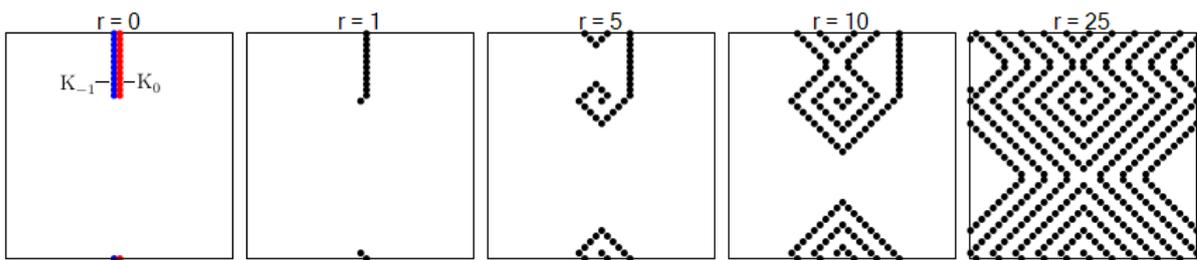


Рис. 8.

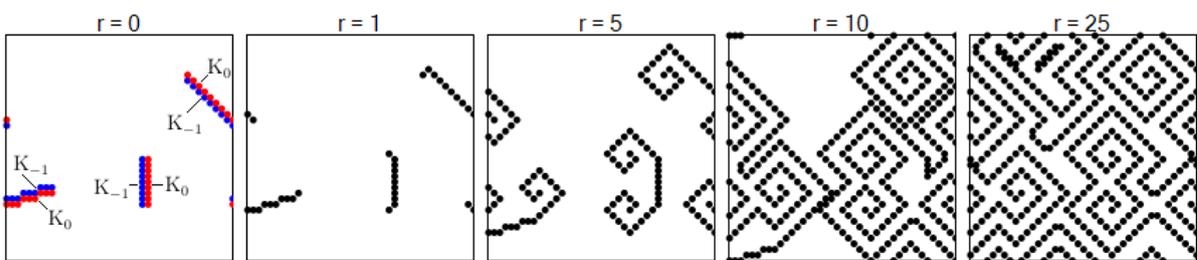


Рис. 9.

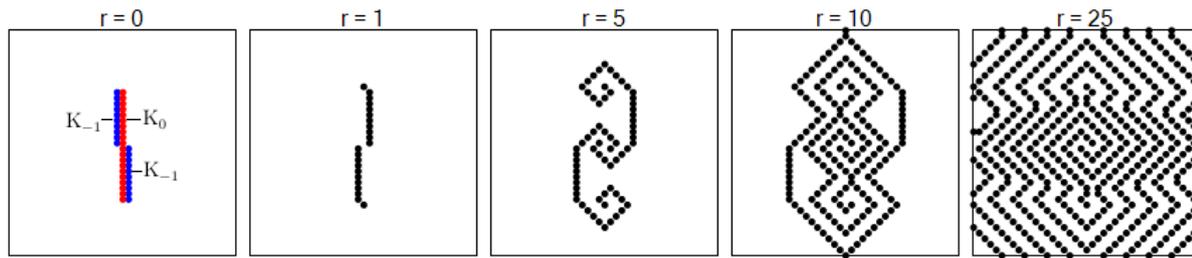


Рис. 10.

Таким образом, показано, что в фазовом пространстве исходной системы при определенных условиях могут сосуществовать множества аттракторов различной, причем довольно сложной, структуры. Приведены основные асимптотические характеристики всех решений из соответствующих аттракторов. На основании этих результатов в [25] сформулирован ряд интересных выводов биологического характера.

## Список литературы

1. Diekmann O. Run for your life, a note on the asymptotic speed of propagation of an epidemic // J. Differ. Equations. 1979. V. 33. С. 58–73.
2. Kuang Y. Delay differential equations with applications in population dynamics // Mathematics in science and engineering. New York: Academic Press, 1993. 191 p.
3. May R.M. Stability and complexity in model ecosystems. Princeton: Princeton University Press, 1975.
4. Murray J.D. Mathematical biology. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1993.
5. Wu J.H. Theory and applications of partial functional differential equations // Appl. Math. Sci. 1996. 119 p.
6. Wu J.H., Zou X.F. Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay // J. Dyn. Differ. Equations. 2001. 13. P. 651–687.
7. Zou X.F., Wu J.H. Existence of traveling wave fronts in delay reaction-diffusion system via monotone iteration method // Proc. Am. Math. Soc. 1997. 125. P. 2589–2598.
8. Gopalsamy K. Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. Dordrecht: Kluwer, 1992.
9. Gourley S. A., So J. W.-H., Wu Jian Hong. Nonlocality of Reaction-Diffusion Equations Induced by Delay // Biological Modeling and Nonlinear Dynamics. Part 1, CMFD, 1, MAI, M., 2003. P. 84–120.
10. Kolmogorov K., Petrovskii I., Piskunov N. Étude de l'équations de la diffusion avec croissance de la quantité et son application a un probleme biologique // Buul. Univ. Moscow, Ser. Intenat. Sec. 1937. 1, №6. P. 1–250.

11. Колесов Ю.С., Майоров В.В. Пространственная и временная самоорганизация в одновидовом биоценозе // Динамика биологических популяций: Межвуз. сб. Горький, 1986. С. 3–13 (*Kolesov Yu.S., Maiorov V.V. Prostranstvennaja i vremennaja samoorganizacija v odnovidovom biocenoze // Dinamika biologicheskikh populjacij: Mejevuz. sb. Gorkii, 1986. S. 3–13 [in Russian]*).
12. Колесов Ю.С. Математические модели в экологии // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1979. С. 3–40 (*Kolesov Yu.S. Matematicheskie modeli v ekologii // Issledovanija po ustojchivosti i teorii kolebanij. Yaroslavl, 1979. S. 3–40 [in Russian]*).
13. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987 (*Svirejev Yu. M. Nelinejnye volny, dissipativnye struktury i katastrofy v ekologii. M.: Nauka, 1987 [in Russian]*).
14. Кащенко С.А. Пространственно-неоднородные структуры в простейших моделях с запаздыванием и диффузией // Мат. модел. 1990. Т. 2, №9 (English transl.: *Kashchenko S.A. Spatial heterogeneous structures in the simplest models with delay and diffusion // Matem. mod. 1990. V. 2, №9. P. 49–69*).
15. Горяченко В.Д., Колчин В.А. К динамике численности отдельной популяции с учётом запаздывания в размножении // Нелинейные колебания в задачах экологии: Межвуз. сб. Ярославль, 1985. С. 23–44 (*Goryachenko V.D., Kolchin V.A. K dinamike chislenosti otdel'noj populjacji s uchjotom zapazdyvanija v razmnozhenii // Nelinejnye kolebanija v zadachah ekologii: Mejevuz. sb. Yaroslavl, 1985. S. 23–44 [in Russian]*).
16. Горяченко В.Д., Золотарев С.Л. Исследование двухточечной модели динамики численности популяции // Динамика биологических популяций: Межвуз. сб. Горький, 1986. С. 24–31. (*Goryachenko V.D., Zolotarev S.L. Issledovanie dvoutochechnoj modeli dinamiki chislenosti populjacji // Dinamika biologicheskikh populjacij: Mejevuz. Sb. Gorkii, 1986. S. 24–31 [in Russian]*).
17. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Конечномерные модели диффузионного хаоса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50, № 5. С. 860–875. (English transl.: *Glyzin S.D., Kolesov A.Yu., and Rozov N.Kh. Finite-dimensional models of diffusion chaos // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2010. V. 50. No 5. P. 816–830*).
18. Глызин С.Д. Размерностные характеристики диффузионного хаоса // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т. 20, № 1. С. 30–51. (*Glyzin S.D. Dimensional Characteristics of Diffusion Chaos // Modeling and Analysis of Information Systems. 2013. V. 20, No 1. P. 30–51 [in Russian]*).
19. Кащенко С.А. Исследование методами большого параметра системы нелинейных дифференциально-разностных уравнений, моделирующих задачу хищник-жертва // ДАН СССР. 1982. Т. 266, №4. С. 792–795 (*Kashchenko S.A. Issledovanie metodami bol'shogo parametra sistemy nelinejnyh differencial'no raznostnyh uravnenij, modelirujushhih zadachu hishchnik-zhertva // DAN SSSR. 1982. T. 266, No 4. S. 792–795 [in Russian]*).
20. Кащенко С.А. Об установившихся режимах уравнения Хатчинсона с диффузией // ДАН СССР. 1987. Т. 292. №2. С. 327–330 (*Kashchenko S.A. Ob ustanovivshihhsja rezhimakh uravnenija Hatchinsona s diffuziej // DAN SSSR. 1987. T. 292. №2. S. 327–330 [in Russian]*).

21. Колесов А.Ю. Об устойчивости пространственно однородного цикла в уравнении Хатчинсона с диффузией // Математические модели в биологии и медицине. Вып. 1. Вильнюс: Ин-т математики АН Лит. ССР. С. 93–103. (*Kolesov Yu.S. Ob ustojchivosti prostranstvenno odnorodnogo cikla v uravnenii Hatchinsona s diffuziej // Matematicheskie modeli v biologii i medicine. Vilnius: In-t. math. An Lit. SSR. T. 1. S. 19 [in Russian].*)
22. Bestehorn M., Grigorieva E. V., Haken H. and Kaschenko S. A. Order parameters for class-B lasers with a long time delayed feedback // *Physica D*. 2000. V. 145. P. 111–129.
23. Глызин С.Д. Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, № 3. С. 96–116. (*Glyzin S. D. Difference approximations of “reaction – diffusion” equation on a segment // Modeling and Analysis of Information Systems. 2009. V. 16, № 3. P. 96–116 [in Russian].*)
24. Глызин С.Д. Динамические свойства простейших конечноразностных аппроксимаций краевой задачи «реакция-диффузия» // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, № 6. С. 805–811. (English transl.: *Glyzin S. D. Dynamic properties of the simplest finite-difference approximations of the “reaction-diffusion” boundary value problem // Differ. Equations. 1997. V. 33, No. 6. P. 808–814.*)
25. Владимиров В.В. и др. Управление риском. М.: Наука, 2000. 432 с. (*Vladimirov V. V. Upravlenie riskom. M.: Nauka, 2000. 432 p. [in Russian].*)

## Asymptotics of a Steady-State Condition of Finite-Difference Approximation of a Logistic Equation with Delay and Small Diffusion

Kaschenko S. A.<sup>\*,\*\*</sup>, Frolov V. E.<sup>\*\*</sup>

*\*P.G. Demidov Yaroslavl State University,*

*Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia*

*\*\*National Research Nuclear University MEPhI,*

*Kashirskoye shosse, 31, Moscow, 115409, Russia*

**Keywords:** logistic equation, attractor, guiding center, helicon waves, asymptotics, stability

We study the dynamics of finite-difference approximation on spatial variables of a logistic equation with delay and diffusion. It is assumed that the diffusion coefficient is small and the Malthusian coefficient is large. The question of the existence and asymptotic behavior of attractors was studied with special asymptotic methods. It is shown that there is a rich array of different types of attractors in the phase space: leading centers, spiral waves, etc. The main asymptotic characteristics of all solutions from the corresponding attractors are adduced in this work. Typical graphics of wave fronts motion of different structures are represented in the article.

### Сведения об авторах:

**Кащенко Сергей Александрович,**

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,

д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования

**Фролов Валерий Евгеньевич,**

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,

аспирант