Модел. и анализ информ. систем. Т. **21**, № **1** (2014) 115–120

УДК 517.9

Асимметричное взаимодействие пары осцилляторов типа ФитцХью–Нагумо

Марушкина Е. А.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: lenochka_s24@mail.ru

получена 10 декабря 2013

Ключевые слова: уравнение ФитцХью–Нагумо, связанные осцилляторы, нормальная форма, диффузионное взаимодействие, бифуркация

Рассматривается пара диффузионно связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо с асимметричным взаимодействием. Поставленная задача исследуется в случае близком к критическому, когда матрица линейной части системы имеет пару чисто мнимых собственных значений. Строится нормальная форма и определяются зависимости ее коэффициентов от исходных параметров. Показано, что в исходной системе могут наблюдаться две различные ситуации: либо сосуществуют устойчивые одночастотные колебания с различными частотами, либо от состояния равновесия ответвляется одночастотный режим. Полученные асимптотические результаты дополнены численным анализом.

Для описания динамики нервной клетки на качественном уровне обычно используются так называемые феноменологические модели, представляющие собой различные упрощения модели Ходжкина–Хаксли [1], которая с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений математически описывает процесс формирования нервного импульса. Одним из таких распространенных упрощений является модель ФитцХью–Нагумо [2,3], сохраняющая некоторые принципиальные свойства исходной динамической системы (см. также вариант данной модели, изученный в [4]). Отметим, что задача о взаимодействии близких осцилляторов ФитцХью–Нагумо изучена достаточно хорошо и по данной тематике опубликовано большое количество работ (см. библиографию в статье [5]). Вместе с тем, представляет интерес рассмотрение иной связи между парциальными осилляторами, а именно, несимметритричное взаимодействие, позволяющее получить некоторые новые эффекты для изучаемой системы.

Рассмотрим пару связанных осцилляторов типа ФитцХью—Нагумо с асимметричным взаимодействием:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1 - \frac{{x_1}^3}{3} - y_1 + \gamma_1 x_2\,,\\
\dot{y}_1 &= \varepsilon(x_1 + a_1)\,,\\
\dot{x}_2 &= x_2 - \frac{{x_2}^3}{3} - y_2 - \gamma_2 x_1\,,\\
\dot{y}_2 &= \varepsilon(x_2 + a_2)\,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

В данной системе полагаем связь между отдельными осцилляторами несимметричной: второй из элементов оказывает возбуждающее действие на первый, в то время как первый, в свою очередь, осуществляет тормозящее воздействие на второй осциллятор. Данное обстоятельство объясняет выбор знака перед коэффициентами связи γ_1 и γ_2.

В системе (1) переменные $x_1(t)$, $x_2(t)$ представляют собой нормированные мембранные потенциалы нервной клетки, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ характеризуют связь между клетками, а $\varepsilon > 0$ фиксирован (часто он берется малым).

Состояние равновесия системы (1) единственно и определяется формулами:

$$\begin{aligned} {x_1}^* &= -a_1, \quad {y_1}^* = \frac{{a_1}^3}{3} - a_1 - \gamma_1 a_2; \\ {x_2}^* &= -a_2, \quad {y_2}^* = \frac{{a_2}^3}{3} - a_2 + \gamma_2 a_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Линеаризуем систему (1) на состоянии равновесия (2) и выпишем характеристический многочлен полученной системы:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3(2 - {a_1}^2 - {a_2}^2) + \lambda^2(2\varepsilon + (1 - {a_1}^2)(1 - {a_2}^2) + \gamma_1\gamma_2) - \\ - \lambda\varepsilon(2 - {a_1}^2 - {a_2}^2) + \varepsilon^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Найдем критические значения параметров, при которых полученный многочлен имеет две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$. Для этого рассмотрим уравнение $p(\lambda) = 0$, подставим значение $\lambda = i\omega$ и приравняем вещественные и мнимые части равенства. Вследствие чего получим следующую систему для определения величины ω:

$$\begin{aligned} &\omega^4 - \omega^2(2\varepsilon + (1 - {a_1}^2)(1 - {a_2}^2) + \gamma_1\gamma_2) + \varepsilon^2 = 0\,, \\ &\omega^3(2 - {a_1}^2 - {a_2}^2) - \omega\varepsilon(2 - {a_1}^2 - {a_2}^2) = 0\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Из второго равенства системы могут быть определены условия существования двух пар чисто мнимых корней $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$ характеристического многочлена (3)

$$\begin{aligned} &{a_1}^2 + {a_2}^2 = 2\,, \\ &\gamma_1\gamma_2 - (1 - {a_1}^2)^2 > 0\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Значения ω_1, ω_2 могут быть найдены по формуле:

$$\omega_{1,2} = \frac{\sqrt{-1 + 2\gamma_1\gamma_2 + 4\varepsilon - \cos 4\varphi \pm \sqrt{(1 - 2\gamma_1\gamma_2 + \cos 4\varphi)(1 - 2\gamma_1\gamma_2 - 8\varepsilon + \cos 4\varphi)}}}{2}.$$

Параметризуем полученные критические значения параметров (5) следующим образом: $a_1^* = \sqrt{2}\cos\varphi$ и $a_2^* = \sqrt{2}\sin\varphi$, где $0 \le \varphi \le \pi/2$ и рассмотрим возмущенную задачу в близком к критическому случае. Положим $a_1 = \sqrt{2 - \mu}\cos\varphi$, $a_2 = \sqrt{2 - \alpha\mu}\sin\varphi$, считая параметр $0 < \mu \ll 1$ достаточно малым, а в случае малости ε дополнительно предположим, что $0 < \mu \ll \varepsilon$.

В системе (1) выполним сдвижку на состояние равновесия (2) и приведем ее к стандартному виду:

$$\dot{u} = (A_0 + \mu A_1)u + F_2(u, u) + F_3(u, u, u), \tag{6}$$

где $u = \left(x_1 - x_1{}^*, y_1 - y_1{}^*, x_2 - x_2{}^*, y_2 - y_2{}^*\right)^T$. В системе (6) матрицы линейной части определены следующим образом:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1+(a_1^*)^2 & -1 & \gamma_1 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_2 & 0 & 1+(a_2^*)^2 & -1 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -\mu\cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а функции $F_2(u,u) = \left(-au_1^2, 0, -au_2^2, 0\right)^T$ и $F_3(u,u,u) = \left(-u_1^3/3, 0, -u_2^3/3, 0\right)^T$ линейны по каждому из своих аргументов и представляют собой квадратичную и кубическую нелинейности системы.

Для построения нормальной формы выполним стандартную замену [6]:

$$u(t,s,\mu) = \sqrt{\mu}\Big(z_1(s)e^{i\omega_1 t}c_1 + z_2(s)e^{i\omega_2 t}c_2 + \text{к.с.}\Big) + \mu u_1(s,t) + \mu^{3/2}u_2(s,t) + \ldots, \quad (7)$$

где $s = \mu t$ — медленное время, каждая компонента функций $u_1(s,t), u_2(s,t)$ представляет собой тригонометрический многочлен по t, под к.с. подразумевается выражение комплексно сопряженное данному в той же скобке, c_1 и c_2 – собственные векторы матрицы A_0, соответствующие собственным числам $i\omega_1$ и $i\omega_2$.

На третьем шаге алгоритма в результате приравнивания коэффициентов при $\mu^{3/2}$ из условий разрешимости задачи для $u_2(s,t)$ среди тригонометрических многочленов по t с частотами ω_1 и ω_2 получим следующую нормальную форму:

$$\begin{aligned} z_1' &= \gamma_1 z_1 + (d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1, \\ z_2' &= \gamma_2 z_2 + (d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Штрихом в системе (8) обозначена производная по s, а ее коэффициенты могут быть найдены стандартным образом (см. [6]) по формулам:

$$\begin{aligned} \gamma_j = (A_1\mathrm{c}_j, b_j),\ j = 1,2, \quad d_{11} &= (2F_2(\mathrm{c}_1, w_5) + 2F_2(\overline{\mathrm{c}_1}, w_1) + 3F_3(\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_1, \overline{\mathrm{c}_1}), b_1), \\ d_{12} &= (2F_2(\mathrm{c}_1, w_6) + 2F_2(\mathrm{c}_2, w_4) + 2F_2(\overline{\mathrm{c}_2}, w_2) + 6F_3(\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \overline{\mathrm{c}_2}), b_1), \\ d_{21} &= (2F_2(\mathrm{c}_1, \overline{w_4}) + 2F_2(\mathrm{c}_2, w_5) + 2F_2(\overline{\mathrm{c}_1}, w_2) + 6F_3(\mathrm{c}_2, \mathrm{c}_1, \overline{\mathrm{c}_1}), b_2), \\ d_{22} &= (2F_2(\mathrm{c}_2, w_6) + 2F_2(\overline{\mathrm{c}_2}, w_3) + 3F_3(\mathrm{c}_2, \mathrm{c}_2, \overline{\mathrm{c}_2}), b_2). \end{aligned}$$

Здесь b_j — решения сопряженных систем $A_0^T b_j = -i\omega_j b_j$ нормированные так, что $(a_j, b_j) = 1$, $j = 1,2$; тригонометрические многочлены w_k, $k = 1,\ldots,6$ представляют собой компоненты решения задачи для $u_1(s,t)$ на предпоследнем шаге алгоритма. Поскольку выражения для коэффициентов d_{kj}, $k,j = 1,2$ достаточно сложны, для их вычисления использовался программный комплекс Mathematica.

Выполняя в системе (8) полярную замену $z_j = \xi_j e^{i\varphi_j}$ и выделяя амплитудные составляющие, получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \varphi_1\xi_1 + (a_{11}\xi_1^2 + a_{12}\xi_2^2)\xi_1, \\ \xi_2' &= \varphi_2\xi_2 + (a_{21}\xi_1^2 + a_{22}\xi_2^2)\xi_2, \end{aligned} \quad (9)$$

где ξ_1 и ξ_2 — амплитудные переменные.

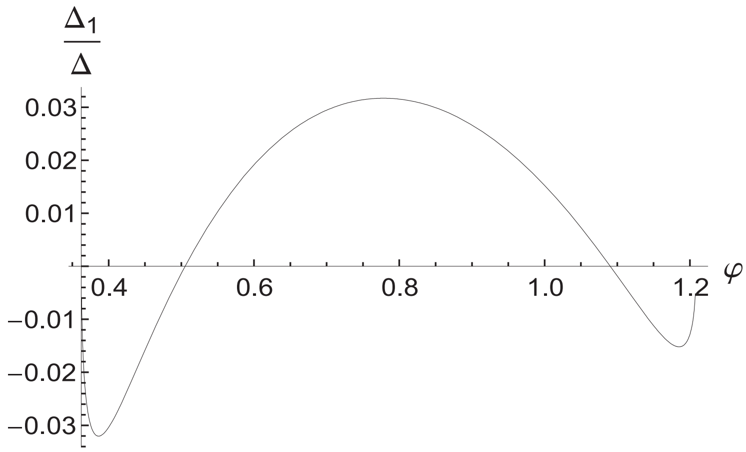

Рис. 1. Зависимость $\frac{\Delta_1}{\Delta}(\varphi)$

При фиксированных значениях параметров системы (1): $\varepsilon = 0.5$, $\gamma_1 = 0.8$, $\gamma_2 = 0.7$, на промежутке изменения $\varphi \in (0.3626, 1.2074)$, выбранном исходя из условия существования у характеристического многочлена двух пар корней на мнимой оси, все величины a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} отрицательны, поэтому нормальная форма (9) диссипативна.

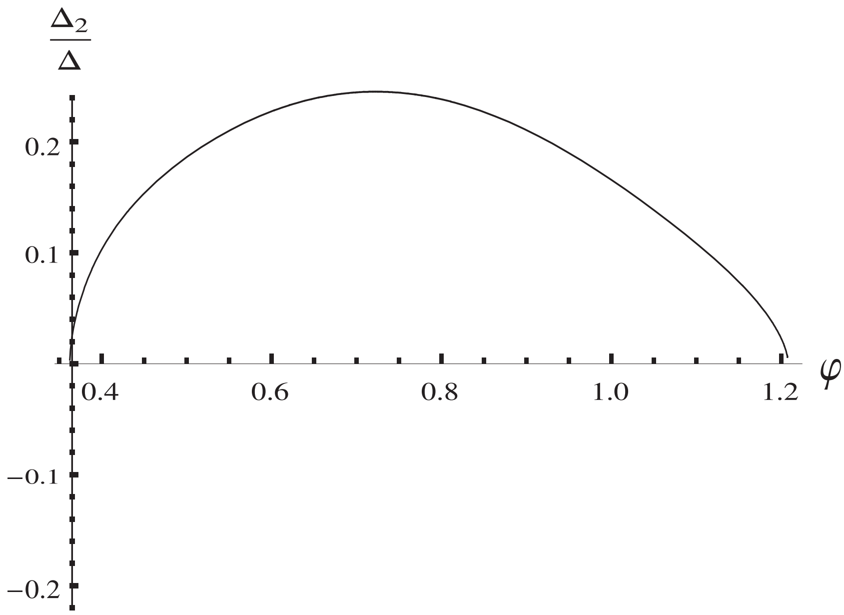

Рис. 2. Зависимость $\frac{\Delta_2}{\Delta}(\varphi)$

Теперь обратимся к вопросу существования и устойчивости состояний равновесия системы (9). Кроме нулевого состояния равновесия, у нее могут существовать еще три неподвижные точки: $\left(0, \sqrt{-\frac{\varphi_2}{a_{22}}}\right)$, $\left(\sqrt{-\frac{\varphi_1}{a_{11}}}, 0\right)$, $\left(\sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta}}, \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta}}\right)$, где $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $\Delta_1 = -\varphi_1 a_{22} + \varphi_2 a_{12}$, $\Delta_2 = -\varphi_2 a_{11} + \varphi_1 a_{21}$. На рисунке изображены кривые зависимостей $\frac{\Delta_1}{\Delta}(\varphi)$ и $\frac{\Delta_2}{\Delta}(\varphi)$ для изучаемой нами системы. При этом

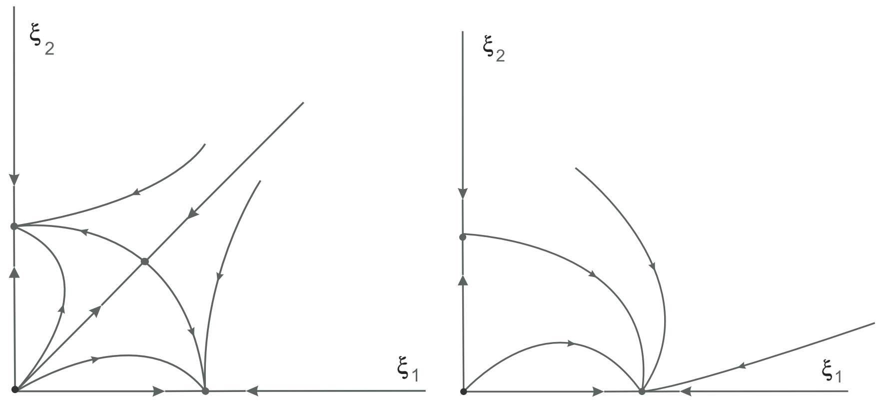

Рис. 3.

$\frac{\Delta_1}{\Delta}(\varphi) > 0$ при $\varphi \in (\varphi^*, \varphi^{**})$, $\frac{\Delta_1}{\Delta}(\varphi) < 0$ при $\varphi \in (0.3626, \varphi^*) \cup (\varphi^{**}, 1.2074)$, $\varphi^* \approx 0.5052$, $\varphi^{**} \approx 1.0903$; $\frac{\Delta_2}{\Delta}(\varphi) > 0$ при всех $\varphi \in (0.3626, 1.2074)$. Отметим, что $\Delta(\varphi) < 0$ при всех φ из рассматриваемого промежутка.

В зависимости от значения φ в системе (7) могут наблюдаться две различные ситуации.

1. Пусть $\varphi \in (\varphi^*, \varphi^{**})$, тогда величины $\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $\frac{\Delta_2}{\Delta}$ положительны и нормальная форма (7) имеет следующие состояния равновесия: $(0,0)$, $\left(0, \sqrt{-\frac{\varphi_2}{a_{22}}}\right)$, $\left(\sqrt{-\frac{\varphi_1}{a_{11}}}, 0\right)$, $\left(\sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta}}, \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta}}\right)$, причем состояние $\left(\sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta}}, \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta}}\right)$ неустойчиво и его устойчивое многообразие разделяет области устойчивости двух состояний равновесия, лежащих на координатных осях (см. рис. 3). В этом случае у исходного уравнения (1) сосуществуют устойчивые одночастотные колебания с частотами ω_1 и ω_2.

2. Пусть теперь $\varphi \in (0.3626, \varphi^*) \cup (\varphi^{**}, 1.2074)$, то есть величины $\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $\frac{\Delta_2}{\Delta}$ имеют разные знаки. Тогда система (7), кроме нулевого, имеет еще два состояния равновесия $\left(0, \sqrt{-\frac{\varphi_2}{a_{22}}}\right)$, $\left(\sqrt{-\frac{\varphi_1}{a_{11}}}, 0\right)$, одно из которых устойчиво (см. рис. 3). В этом случае у исходного уравнения (1) от состояния равновесия ответвляется одночастотный режим.

Полученные асимптотические результаты дополнены численным анализом. Для фиксированных значений ε, γ_1 и γ_2 и $\varphi \in (0.5052, 1.0903)$ при $\mu = 0$ имеем критические значения $a_1 = \sqrt{2}\cos\varphi$ и $a_2 = \sqrt{2}\sin\varphi$, при которых в системе (1) рождаются два устойчивых цикла. С дальнейшим увеличением возмущения μ один из циклов превращается в устойчивый тор, который сосуществует со вторым циклом в достаточно широкой области изменения параметра. Далее тор исчезает и остается один устойчивый цикл, который претерпевает каскад бифуркаций удвоения периода, приводящий к образованию хаотического аттрактора. Установившийся хаотический режим впоследствии исчезает, а дальнейшее увеличение μ приводит к устойчивому релаксационному циклу.

Автор благодарит Глызина С.Д. за внимание к работе и полезное обсуждение результатов.

Список литературы

1. *Hodgkin A.L.* A quantitative description of membrane current and application to conduction and excitation in nerve / *A.L. Hodgkin and A.F. Huxley* // Journal Physiol. 1952. 117. P. 500–544.

2. *FitzHugh R.* Threshold and plateaus in the Hodgkin-Huxley nerve equations // The Journal of Generical Physiology. 1960. 43. P. 867–896.

3. *Nagumo J.* An active pulse transmission line simulating nerve axon / *J. Nagumo, S. Arimoto, and S. Youshizawa*// Proc IRE. 1962. 50. P. 2061–2070.

4. *Глызин С. Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Об одной модификации нейронной модели ФитцХью – Нагумо // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 3. С. 61–80. (English transl.: *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* On a Modification of the FitzHugh–Nagumo Neuron Model // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. V. 54, No. 3. P. 443–461. DOI: 10.1134/S0965542514030063).

5. *Izhikevich E. M.* Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting. Cambridge, Mass.: MIT Press, 2007.

6. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю.* Локальные методы анализа динамических систем: учебное пособие // Ярославль: ЯрГУ, 2006. 92 с. (*Glyzin S.D., Kolesov A.Yu.* Lokalnye metody analiza dinamicheskikh sistem: uchebnoe posobie // Yaroslavl: YarGU, 2006. 92 c. [in Russian]).

Asymmetric Interaction of a Pair FitzHugh–Nagumo Oscillators

Marushkina E. A.

P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: FitzHugh–Nagumo equation, connected oscillators, normal form, diffusion interaction, bifurcation

A pair of diffusion connected FitzHugh–Nagumo oscillators with an asymmetric interaction are considered. The problem is investigated in the close to critical case, where the matrix of the linear part of the system has a pair of purely imaginary eigenvalues. The normal form is constructed and its coefficients are determined depending on the initial parameters. The source system may be in two different situations: stable single-frequency oscillations with two different frequencies coexist or a single-frequency mode branches from the equilibrium. The obtained asymptotic results are supplemented by the numerical analysis.

Сведения об авторе:
Марушкина Елена Александровна,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ассистент кафедры компьютерных сетей