Модел. и анализ информ. систем. Т. **21**, №**1** (2014) 121–132

УДК 517.9

О работе семинара «Нелинейная динамика»

В 2013 году в рамках научно-образовательного центра «Нелинейная динамика» продолжил работу научный семинар, посвященный исследованиям поведения, а также методам анализа динамических систем. За прошедший учебный год на нем было заслушано более тридцати сообщений по тематике исследований научно-образовательного центра. Ниже представлены тезисы наиболее интересных докладов, прозвучавших на семинаре.

Нестеров П.Н. Метод центральных многообразий в задаче асимптотического интегрирования одного класса систем функционально-дифференциальных уравнений[1]. В работе изучается вопрос о построении асимптотики при $t \to \infty$ решений следующей системы функционально-дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = B_0(x_t) + B(t, x_t) + R(t, x_t). \tag{1}$$

Здесь $x \in \mathbb{C}^m$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ $(-h \leqslant \theta \leqslant 0)$ — элемент пространства $C_h \equiv C\big([-h, 0], \mathbb{C}^m\big)$ непрерывных на $[-h, 0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^m$. Далее, $B_0(\cdot)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из C_h в $\mathbb{C}^m$; $R(t, \cdot)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из C_h в $\mathbb{C}^m$, такой, что при любом фиксированном $\varphi \in C_h$ функция $R(t, \varphi)$ измерима по Лебегу при $t \geqslant t_0$ и

$$|R(t, \varphi)| \leqslant \gamma(t)\|\varphi\|_{C_h}, \quad \gamma(t) \in L_1[t_0, \infty) \quad \Big(\|\varphi\|_{C_h} = \sup_{-h \leqslant \theta \leqslant 0} |\varphi(\theta)|\Big).$$

Наконец,

$$B(t, x_t) = v_1(t)B_1(t, x_t) + v_2(t)B_2(t, x_t) + \ldots + v_n(t)B_n(t, x_t),$$

где $B_i(t, \cdot)$ — линейные ограниченные операторы, действующие из пространства C_h в пространство $\mathbb{C}^m$, относительно которых предполагается, что

$$B_i(t, \varphi) = \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j^{(i)}(t)\ell_j^{(i)}(\varphi), \qquad \varphi \in C_h. \tag{2}$$

В формуле (2) $\ell_j^{(i)}(\cdot)$ — линейные ограниченные операторы, не зависящие от t, и действующие из C_h в $\mathbb{C}^m$, а $\Gamma_j^{(i)}(t)$ — матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены. Кроме того, $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ — скалярные функции такие, что

1^0. $v_1(t) \to 0, v_2(t) \to 0, \ldots, v_n(t) \to 0$ при $t \to \infty$;

2^0. $\dot{v}_1(t), \dot{v}_2(t), \ldots, \dot{v}_n(t) \in L_1[t_0, \infty)$;

3^0. Произведение $v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)\ldots v_{i_{k+1}}(t) \in L_1[t_0, \infty)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и любого набора $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_{k+1} \leqslant n$.

Задача асимптотического интегрирования системы (1) в случае нулевого оператора B_0 была изучена в статье [2]. Основное предположение, при котором система (1) рассматривается в данной работе, состоит в следующем. У квазиполинома $p(\lambda) = \det\big(\lambda I - B_0(e^{\lambda\theta}I)\big)$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ № МК-80.2013.1.

имеется l корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ на мнимой оси с учетом их кратностей, а остальные корни имеют отрицательные вещественные части. Данное обстоятельство позволяет для асимптотического интегрирования системы (1) воспользоваться известным методом центральных многообразий [1]. Адаптации этого метода к задаче асимптотического интегрирования системы (1) и посвящена данная работа.

Нами предложен алгоритм построения для достаточно больших t так называемого критического многообразия

$$\mathcal{W}(t) = \Big\{ \varphi(\theta) \in C_h \;\Big|\; \varphi(\theta) = \Phi(\theta)u + H(t,\theta)u,\ u \in \mathbb{C}^l \Big\} \tag{3}$$

в фазовом пространстве C_h системы (1), притягивающего с экспоненциальной скоростью траектории этой системы. В выражении выше $\Phi(\theta)$, $H(t,\theta)$ – некоторые $(m \times l)$-матрицы, непрерывные по переменной $\theta \in [-h, 0]$, а матрица $H(t,\theta)$ непрерывна по t при $t \geqslant t_*$ и $\|H(t,\cdot)\|_{C_h} \to 0$ при $t \to \infty$. Многообразие $\mathcal{W}(t)$ положительно инвариантно относительно траекторий $x_t(\theta)$ системы (1) при достаточно больших t. Поведение траекторий $x_t(\theta)$ системы (1), расположенных на данном многообразии, определяется некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = \Big(A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i(t) v_i(t) + \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant n} A_{i_1 i_2}(t) v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n} A_{i_1 \ldots i_k}(t) v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}(t) + \hat{R}(t) \Big) u, \qquad u \in \mathbb{C}^l. \tag{4}$$

Здесь A_0, $A_{i_1 \ldots i_s}(t)$, $\hat{R}(t)$ — квадратные $(l \times l)$-матрицы: A_0 — постоянная матрица, собственными значениями которой являются критические собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$, элементами матриц $A_{i_1 \ldots i_s}(t)$ являются тригонометрические многочлены, а матрица $\hat{R}(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Асимптотика всех решений системы (4) может быть построена с помощью метода, изложенного в работе [3].

С учетом вышесказанного асимптотика всех решений системы (1) при $t \to \infty$ может быть описана с помощью следующей формулы:

$$x(t) = x_t(0) = \sum_{i=1}^{l} C_i \big(\Phi(0) + H(t,0) \big) u_i(t) + O\big(e^{-\beta t}\big), \tag{5}$$

где $C_1, \ldots, C_l$ — произвольные действительные постоянные, $u_1(t), \ldots, u_l(t)$ — фундаментальные решения системы (4), и $\beta > 0$ — некоторое действительное число. В качестве примера использования указанного алгоритма в работе строится асимптотика при $t \to \infty$ решений уравнения

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2} x(t-1) + \frac{a \sin \lambda t}{t^\rho} x(t-h),$$

где $a, \lambda \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ и $h > 0$.

Список литературы

1. *Carr J.* Applications of centre manifold theory. New York: Springer-Verlag, 1981.

2. *Nesterov P.* Asymptotic integration of functional differential systems with oscillatory decreasing coefficients // Monatsh. Math. 2013. Vol. 171, No. 2. P. 217–240.

3. *Нестеров П.Н.* Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, №6. С. 731–742. (English transl.: *Nesterov P.N.* Averaging method in the asymptotic integration problem for systems with oscillatory-decreasing coefficients // Differ. Equ. 2007. V. 43, No. 6. P. 745–756.)

Глызин Д.С. О динамике распределенного нелинейного осциллятора с вырожденным параболическим оператором. Рассмотрим следующую задачу, представляющую собой простейший распределенный нелинейный осциллятор в нормальной форме [1] с вырожденным параболическим оператором [2]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\left(z_1\frac{\partial}{\partial y_1} + z_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)^2 u + \alpha u + \sigma|u|^2 u, \tag{1}$$

$$u(t, y_1 + 1, y_2) = u(t, y_1, y_2 + 1) = u(t, y_1, y_2), \tag{2}$$

$$u(0, y_1, y_2) = \varphi(y_1, y_2), \tag{3}$$

где $u = u(t, y_1, y_2) = u_1(t, y_1, y_2) + iu_2(t, y_1, y_2)$, $d = d_1 + id_2$, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$.

Заметим, что если искать решения в виде $u(t, y_1, y_2) = v(t, z_2y_1 - z_1y_2)$, то уравнение (1) сведется к уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha u + \sigma|u|^2 u, \tag{4}$$

не зависящему от пространственных переменных. Таким образом, выбрав начальное условие в виде $\varphi(y_1, y_2) = \psi(z_2y_1 - z_1y_2)$, в случае, если оно удовлетворяет (2), мы получим задачу, решение которой $u(t, y_1, y_2)$ зависит только от начального значения в данной точке: $u(t, y_1, y_2) = V^t\psi(z_2y_1 - z_1y_2)$, где V^t — поток, порождаемый уравнением (4).

Зафиксируем $z_1 = z_2 = 1$. Для численного исследования выберем разностную аппроксимацию производных по пространственным переменным, сохраняющую указанное свойство. А именно, фиксировав шаг $\Delta y_1 = \Delta y_2 = \Delta y$, построим диагональную сетку $(y_1^k, y_2^j) = (k\Delta y, j\Delta y)$ для $k, j = 0, 1 \ldots N-1$, удовлетворяющих $k + j \equiv 0 \mod 2$. Положим $u_{k,j}(t) = u(t, y_1^k, y_2^j)$ и зададим приближения:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2}\right|_{(y_1^k, y_2^j)} \approx \frac{u_{k+1,j+1} + u_{k-1,j-1} - u_{k+1,j-1} - u_{k-1,j+1}}{4\Delta y^2},$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}\right|_{(y_1^k, y_2^j)} \approx \frac{u_{k+2,j} - 2u_{k,j} + u_{k-2,j}}{4\Delta y^2}, \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2}\right|_{(y_1^k, y_2^j)} \approx \frac{u_{k,j+2} - 2u_{k,j} + u_{k,j-2}}{4\Delta y^2}.$$

Численное исследование проводилось при значениях параметров $\alpha = 1$, $\sigma = -1 + i$, обеспечивающих наличие колебательного режима с амплитудой 1 в уравнении (4).

На рис. 1–2 изображены компоненты u_1 характерных решений задачи (1)–(3) при $t = 5000$ для разных начальных значений $\varphi(y_1, y_2)$ и различных соотношений между d_1 и d_2.

Рис. 1 содержит графики решения при количестве узлов сетки $N = 64$ (слева) и $N = 32$ (справа) по каждому направлению. Негладкий вид решения здесь определяется соотношением $d_2/d_1 = 10 > 1$ и сохраняется для широкого круга начальных условий.

На рис. 2 продемонстрирован эффект существования выделенного направления $y_1 + y_2 \equiv c \mod 1$ у вырожденного параболического оператора в правой части уравнения (1). При $d_1 = d_2 = 0.01$ и начальном условии $\varphi(y_1, y_2) = \psi(y_1 - y_2) = 0.1 + 0.5\exp(2\pi i(y_1 - y_2))$, равном константе вдоль выделенного направления (слева), система сохраняет структуру начального условия, а решение в отдельных узлах сетки колеблется, подчиняясь закону (4), и не зависит от соседних узлов.

При начальном условии $\varphi(y_1, y_2) = 0.1 + 0.5\exp(\pi i(2y_1 + 1.5y_2))$ (справа) параболический оператор вынуждает решение повернуться так, что направление, вдоль которого оно неизменно, будет совпадать с выделенным направлением оператора.

Отметим, что в обоих случаях, проиллюстрированных на рис. 2, величина $|u(t, y_1, y_2)|^2$ постоянна и равна единице, в то время как в случае на рис. 1 $|u(t, y_1, y_2)|^2$ имеет такую же негладкую структуру, как и само u_1.

Также заметим, что при выборе начального условия $\varphi(y_1, y_2) = 0.1+0.5\exp(2\pi i(y_1+y_2))$ система выходит на пространственно однородный колебательный режим.

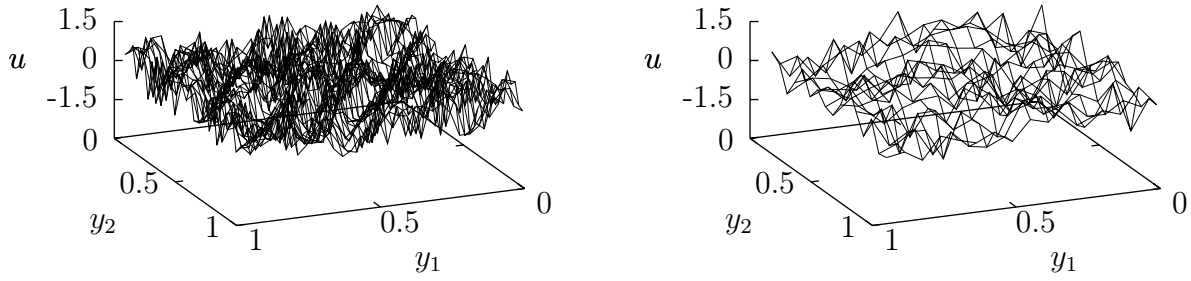

Рис. 1. $d_1 = 0.001$, $d_2 = 0.01$

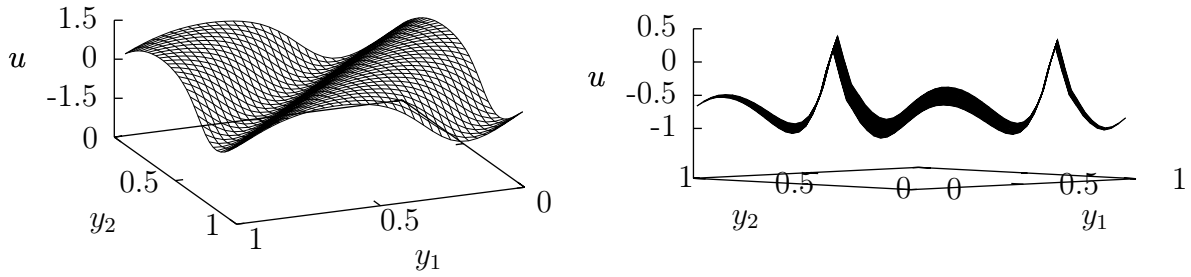

Рис. 2. $d_1 = d_2 = 0.01$

Список литературы

1. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория Колебаний. М., 1959. (English transl.: *Andronov A.A., Vitt A.A. and Khaikin S.E.* Theory of Oscillators. Pergamon Press: Oxford, 1966.)

2. *Кащенко И.С.* Мультистабильность в нелинейных параболических системах с малой диффузией // Доклады Академии наук. 2010. Т. 435, № 2. С. 164–167. (English transl.: *Kashchenko I.S.* Multistability in nonlinear parabolic systems with low diffusion // Doklady Mathematics. 2010. V. 82, No 3. P. 1064–5624.)

Кубышкин Е.П., Морякова А.Р.[1] **Автоколебательные решения дифференциально-разностного уравнения второго порядка в одном критическом случае.**

$$\ddot{x} + A\dot{x} + x + f(x(t-h)) = 0, \tag{1}$$

в котором $A, h > 0, f(x)) = f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + ...$ гладкая при $|x| \leqslant x_0$ функция.

Изучается характер автоколебательных решений, бифурцирующих из нулевого состояния равновесия при изменении параметров в одном критическом случае, для описания которого изучим расположение корней характеристического уравнения $\lambda^2 + A\lambda + 1 + f_1 \exp(-\lambda h) = 0$ линейной части уравнения (1). Для этого воспользуемся методом D-разбиений [1], положив $\lambda = i\sigma, \sigma > 0$ и выделив вещественную и мнимую части, из которых находим

$$\begin{cases} f_1(\sigma) = \sigma A/\sin(\sigma h(\sigma)), \quad \sigma > 0, \quad -\infty < f_1(\sigma) < \infty \\ h(\sigma) = \begin{cases} \sigma^{-1}(\mathrm{arctg}(\sigma A/\sigma^2 - 1) + \pi n), \quad 0 < \sigma < 1 \\ \sigma^{-1}(\mathrm{arctg}(\sigma A\sigma^2 - 1) - \pi + \pi n), \quad 1 < \sigma < \infty \;\; n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \end{cases}$$

Эти соотношения определяют границы областей D-разбиений в пространстве параметров исходного уравнения. При этом оказалось, что при $A = A_0 \approx 1.275$, $f_1 = f_{10} \approx 0.986$, $h = h_0 \approx 8.595$ характеристическое уравнение имеет две пары комплексно сопряженных корней $\pm i\sigma_1, \pm i\sigma_2 (\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0)$, которые проходят при изменении параметров через резонансное соотношение 1:3, имея ($\sigma_1 \approx 0.318$, $\sigma_2 \approx 0.954$). Все остальные корни характеристического уравнения при этом имеют отрицательные действительные части. Этот критический случай изучается в работе.

Положим в (1) $A = A_0 + \varepsilon A_1, f_1 = f_{10} + \varepsilon f_{11}, h = h_0 + \varepsilon h_1$ и обозначим через $S(r_0)$ шар радиуса r_0 фазового пространства $C[-h, 0] \oplus R$ уравнения (1) с центром в нуле. Уравнение (1) имеет (см., например, [2]) в рассматриваемом случае локальное асимптотически устойчивое гладкое инвариантное четырехмерное многообразие $M(\varepsilon) \in S(r_0)$ (центральное многообразие), поведение решений на котором определяет поведение решений исходного уравнения с начальными условиями из $S(r_0)$. В свою очередь поведение решений на $M(\varepsilon)$ может быть описано поведением траекторий следующей гладко зависящей от своих переменных и параметров системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_1 = (i\sigma_1 + \lambda_1^1\varepsilon + d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1 + d_1\bar{z}_1^2 z_2 + \ldots = Z_1(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2; \varepsilon), \tag{2}$$

$$\dot{z}_2 = (i\sigma_2 + \lambda_2^1\varepsilon + d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2 + d_2 z_1^3 + \ldots = Z_2(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2; \varepsilon), \tag{3}$$

в которой $z_j(t) \in C$, комплексные коэффициенты $\lambda_j = \tau_j^1 + i\sigma_j^1, d_{ij} = a_{ij} + ib_{ij}, d_j = |d_j| \exp(i\gamma_j)$ эффективно вычисляются через параметры системы, точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости ε и z_1, z_2.

Положим $z_j = \varepsilon^{1/2}\rho_j \exp(i\tau_j), \rho_j \geqslant 0, (j = 1, 2)$ и перейдем (2),(3) к "медленным" переменным $\rho_1, \rho_2, \theta = 3\tau_1 - \tau_2$. Выполнив нормировку времени $t \to t/\varepsilon$, рассмотрим укороченную систему уравнений "медленных" переменных

$$\dot{\rho}_1 = (\tau_1^1 + a_{11}\rho_1^2 + a_{12}\rho_2^2)\rho_1 + |d_1|\cos(-\theta + \gamma_1)\rho_1^2\rho_2,$$

$$\dot{\rho}_2 = (\tau_2^1 + a_{21}\rho_1^2 + a_{22}\rho_2^2)\rho_2 + |d_2|\cos(\theta + \gamma_2)\rho_1^3,$$

$$\dot{\theta} = 3\sigma_1^1 - \sigma_2^1 + (3b_{11} - b_{21})\rho_1^2 + (3b_{12} - b_{22})\rho_2^2 + 3|d_1|\sin(-\theta + \gamma_1)\rho_1\rho_2 - |d_2|\sin(\theta + \gamma_2)\rho_1^3/\rho_2.$$

[1]Работа выполнена при поддержке проекта № 984 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

Система “медленных” переменных анализировалась численно для разных значений параметров с использованием программы Tracer [3], в которой реализованы алгоритмы из [4]. При этом отмечено существование устойчивых состояний равновесия, что соответствует устойчивым периодическим решениям исходного уравнения; устойчивых периодических решений, что соответствует существованию в исходном уравнении устойчивых инвариантных двумерных торов; а также серии бифуркаций удвоения периода периодического решения, приводящей к возникновению хаотического аттрактора. Для аттрактора вычислены ляпуновские показатели и ляпуновская размерность, которая оказалось дробной.

Список литературы

1. *Неймарк Ю. И.* D-разбиение пространства квазиполиномов (к устойчивости линеаризованных распределенных систем) // ПММ. 1949. Т. 13, № 4. С. 349–380. (*Neymark Yu. I.* D-razbienie prostranstva kvazipolinomov (k ustoychivosti linearizovannykh raspredelennykh sistem) // PMM. 1949. T. 13, № 4. S. 349–380 [in Russian].)

2. *Мардсен Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с. (Englich trans.:*Marsden J. E., McCracken M.* The Hopf Bifurcation and Its Applications. New York: Springer-Verlag, 1976.)

3. *Глызин Д.С.* Пакет программ для анализа динамических систем "Tracer“. Версия 3.70. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2008611464. (*Glyzin D. S.* Paket programm dlya analiza dinamicheskikh sistem "Tracer". Versiya 3.70. Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM 2008611464 [in Russian].)

4. *Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 2. С. 268–273. (English transl.: *Glyzin D.S., Glyzin S.D., Kolesov A. Yu., and Rozov N.Kh.* The Dynamic Renormalization Method for Finding the Maximum Lyapunov Exponent of a Chaotic Attractor // Differential Equations. 2005. V. 41. No. 2. P. 284–289.)

Лоханин М. В. Экспериментальное исследование колебаний балки с потерей устойчивости. Одной из интереснейших и практически важных разновидностей нелинейных колебаний являются колебания упругих тел с потерей устойчивости (buckling oscillations). В работе был поставлен эксперимент, в котором исследовались вынужденные колебания продольно сжатого стержня с заделанным и свободным (по отношению к поперечным смещениям) концами. Сжатие осуществлялось при помощи кевларовой нити, натянутой между заделанным и свободным концами. Помимо строительной механики, из которой первоначально происходит интерес к подобным структурам, они неизбежно возникают в микромеханике, например в сенсорах инерциальной навигации. Результаты представлены в виде фазовых кривых, зарегистрированных при различных частотах внешней силы (см. рис. 1–3). На первых рисунках серии отчетливо видны бифуркации удвоения периода. Утверждать, что колебания на рисунках из середины серии являются хаотическими, невозможно, поскольку запись является недостаточно длинной и оценка ляпуновских показателей не производилась. Измерения показывают, что экспериментальное исследование прецизионных упругих структур должно производиться с полной регистрацией закона движения. Отметим, что измерения таких показателей, как амплитуда, фазовый и частотный сдвиги, оказываются в данном случае как минимум неполными.

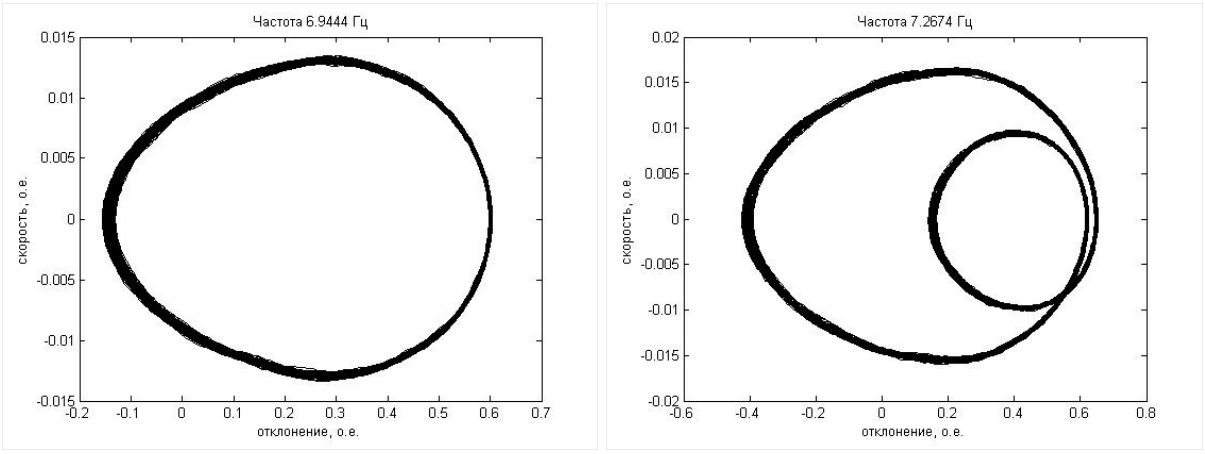

Рис. 1.

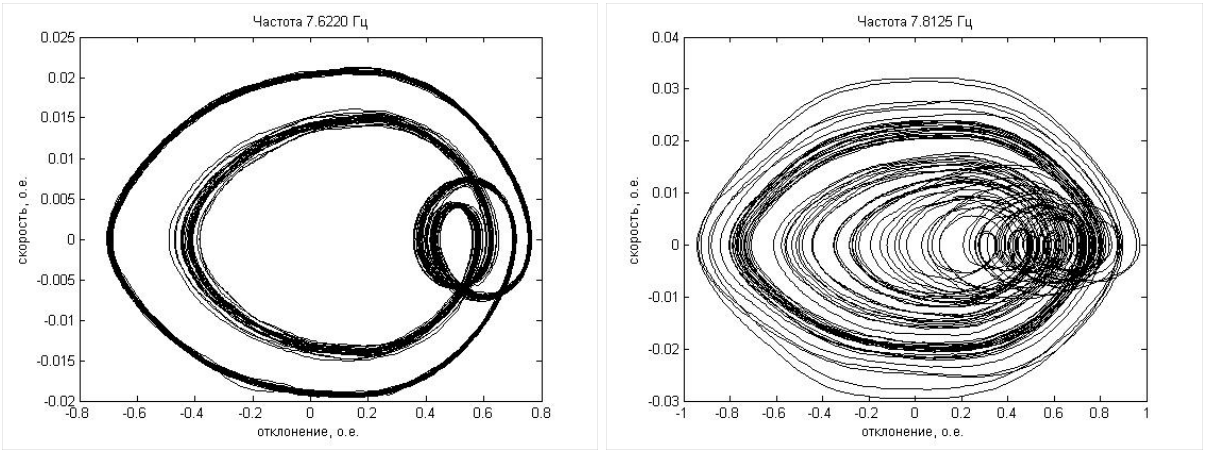

Рис. 2.

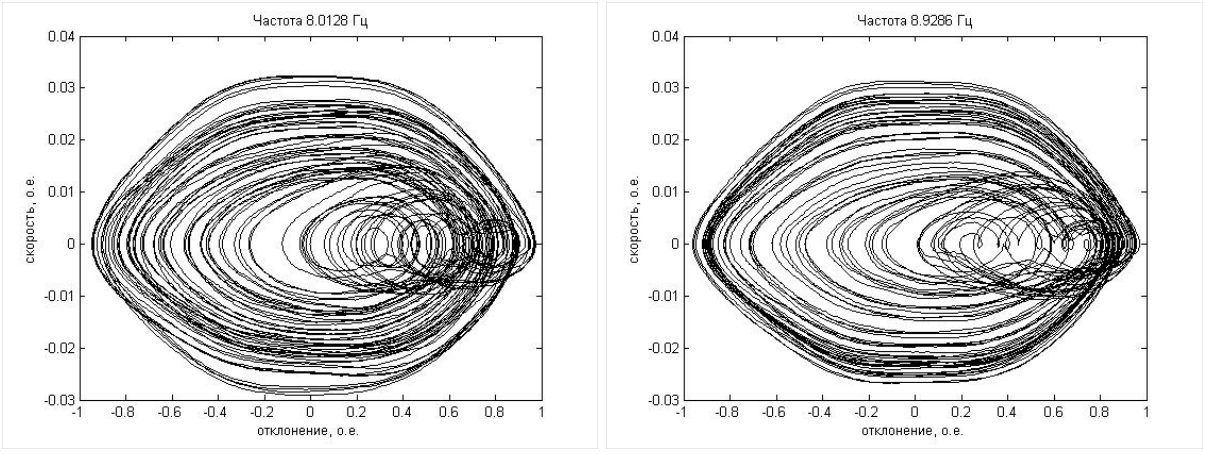

Рис. 3.

Кащенко А. А. Устойчивость непрерывных волн для одной лазерной модели с запаздыванием[1]**.** Рассмотрим модель лазера, предложенную в работе [1],

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{a} + a &= \sqrt{\kappa}e^{(1-i\alpha)g(t-1)/2}a(t-1)e^{-i\Delta/\varepsilon}, \\ \varepsilon\dot{g} &= \gamma(g_0 - g - g|a|^2). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь все параметры действительные, $0 < \kappa < 1$, $\gamma > 0$, $g_0 > 0$, $\kappa e^{g_0} > 1$, параметр ε положителен и достаточно мал $0 < \varepsilon \ll 1$.

У данной системы существуют решения вида непрерывных волн

$$a = R\exp(i\Lambda t), \quad g = G_0.$$

Здесь Λ, R, G_0 — действительные константы, $R > 0$ и $G_0 > 0$. Выразим из второго уравнения (1) g как функцию от $|a|^2$ и подставим ее в первое уравнение (1). Тогда получим следующее уравнение:

$$\varepsilon\dot{a} + a = \sqrt{\kappa}\exp\left(\frac{(1-i\alpha)g_0}{2(1+|a(t-1)|^2)}\right)a(t-1)e^{-i\Delta/\varepsilon}, \tag{2}$$

которое в дальнейшем будем рассматривать как исходный объект исследования.

Для формулировки теоремы о существовании решений введем следующие обозначения. Назовем $\Gamma(\kappa, g_0)$ множество точек (δ, ρ^2), удовлетворяющих равенству

$$\delta^2 = \kappa\exp(g_0(1+\rho^2)^{-1}) - 1.$$

Обозначим за Ω действительный корень уравнения

$$i\delta + 1 = \sqrt{\kappa}\exp\left(1/2g_0(1-i\alpha)(1+\rho^2)^{-1} - i\Omega\right)$$

из полуинтервала $[0, 2\pi)$. Обозначим за $\theta = \theta(\varepsilon)$ такую функцию со значениями из полуинтервала $[0, 2\pi)$, что $\theta + (\Delta + \delta)/\varepsilon$ нацело делится на 2π.

Верна следующая теорема о существовании решений.

Теорема 1. *Пусть точка (δ, ρ^2) принадлежит множеству $\Gamma(\kappa, g_0)$. Тогда для каждого натурального n существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ у уравнения* (2) *существует автомодельное решение*

$$a = (\rho + \varepsilon v)\exp(i(\delta/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d)t), \tag{3}$$

где функции $v(\varepsilon)$ и $d(\varepsilon)$ ограничены при $\varepsilon \to 0$.

Для формулировки результатов об устойчивости решений вида (3) введем в рассмотрение систему неравенств:

$$\begin{cases} 2(1+\rho^2)^2\delta^2(1+\alpha^2) - g_0\rho^2(1+\alpha\delta)^2 < 0, \\ g_0\rho^2(1+\rho^2)^{-2} < 2, \\ -1 < \alpha\delta < \min\left\{4(1+\rho^2)^2 g_0^{-1}\rho^{-2} - 1; 2\right\} \end{cases} \tag{4}$$

и следующее уравнение относительно вспомогательной переменной z, изменяющейся на отрезке $[-1, 1]$:

$$\begin{aligned} &4w(-1+y)^2z^3 - 4(1-y)(2+w-(1+\alpha\delta)y)z^2 + w(-2+y)^2 - 2(4-2(1+\alpha\delta)y+(1+\alpha\delta)y^2) + \\ &+ (16 - 8(2+\alpha\delta)y + 2(2+3\alpha\delta+\alpha^2\delta^2)y^2 - (1+\alpha\delta)^2y^3 + w(-4+8y-3y^2))z = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

[1]Работа выполнена при поддержке проекта № 984 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

Здесь $w = \kappa \exp(g_0(1+\rho^2)^{-1})$ и $y = g_0\rho^2(1+\rho^2)^{-2}$.

Верна следующая теорема об устойчивости.

Теорема 2. *Пусть в верхней точке кривой* $\Gamma(\kappa, g_0)$ *выполнено второе неравенство системы* (4). *Пусть в точке* (δ_0, ρ_0^2) *кривой* $\Gamma(\kappa, g_0)$ *выполнена система неравенств* (4). *Пусть уравнение* (5) *не имеет корней на отрезке* $[-1, 1]$ *для всех точек дуги кривой* $\Gamma(\kappa, g_0)$, *соединяющей верхнюю точку кривой* $\Gamma(\kappa, g_0)$ *и точку* (δ_0, ρ_0^2). *Тогда существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *решение* (3) *уравнения* (2) *с* $\delta = \delta_0$ *и* $\rho = \rho_0$ *устойчиво.*

Относительно расположения областей устойчивости на кривых $\Gamma(\kappa, g_0)$ сделаны следующие выводы.

1. Полностью устойчивой кривая $\Gamma(\kappa, g_0)$ быть не может.
2. В случае $\alpha = 0$ доказано, что на кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$ может быть 0, 1, 2 или 3 области устойчивости, которые симметричны относительно оси ρ^2. Область параметров (g_0, κ) разделена на регионы. Границы данных регионов найдены аналитически. Количество областей устойчивости на кривых $\Gamma(\kappa, g_0)$ и их границы в терминах ρ^2 для каждого из регионов на плоскости (g_0, κ) найдены аналитически.
3. В случае $\alpha \neq 0$ область устойчивости может быть как симметрична, так и несимметрична относительно оси ρ^2.
4. Области устойчивости на кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$ при $\alpha = 0$ и $\alpha \neq 0$ могут как совпадать, так и отличаться друг от друга.
5. При достаточно больших $|\alpha|$ любое решение с $\delta \neq 0$ неустойчиво на некоторой последовательности $\varepsilon_m \to 0$.

Список литературы

1. *Slepneva S., Kelleher B., O'Shaughnessy B., Hegarty S.P., Vladimirov A.G., and Huyet G.* Dynamics of Fourier domain mode-locked lasers // Opt. Express. 2013. 21. P. 19240–19251.

Быкова Н. Д. О применении принципа усреднения к логистическому уравнению с запаздыванием[1]**.** Рассматривается логистическое уравнение с запаздыванием

$$\dot{u} = r[1 - u(t - T + f(\omega t))]u, \tag{1}$$

где функция u и параметры r и T положительны. Периодическая с периодом 1 функция $f(s)$ кусочно постоянна:

$$f(s) = \begin{cases} a, & \text{если } 0 \leqslant s \leqslant \alpha < 1, \\ b, & \text{если } \alpha < s < 1. \end{cases}$$

Основное предположение состоит в том, что параметр ω, характеризующий частоту колебаний функции f, является достаточно большим:

$$\omega \gg 1.$$

Ставится задача о применении принципа усреднения к уравнению (1), т.е. о построении для (1) усредненного уравнения.

[1]Работа выполнена при поддержке проекта № 984 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

Теорема 1. *Пусть $a < T$ и $b < T$. Тогда усредненным уравнением является уравнение*

$$\dot{V} = r[1 - \alpha V(t - T + a) - (1 - \alpha)V(t - T + b)]V. \tag{2}$$

Доказательство этой теоремы базируется на результатах работ [1, 2, 3].

Теорема 2. *Пусть состояние равновесия $V_0 \equiv 1$ уравнения (2) асимптотически устойчиво. Тогда при всех достаточно больших ω состояние равновесия $u_0 \equiv 1$ в (1) асимптотически устойчиво.*

Теорема 3. *Пусть (2) имеет асимптотически орбитально устойчивое периодическое решение $V_0(t)$. Тогда при всех достаточно больших ω уравнение (1) имеет асимптотически устойчивое решение $u_0(t, \omega)$, для которого $u_0(t, \omega) = V_0(t) + O(\omega^{-1})$.*

Список литературы

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматлит, 1958. 408 с. (English transl.: *Bogoliubov N.N., Mitropolsky Y.A.* Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations. New York, Gordon and Breach, 1961. 573 p.)

2. *Колесов Ю.С., Колесов В.С., Федик И.И.* Автоколебания в системах с распределенными параметрами. Киев: Наукова думка, 1979. 162 с. (*Kolesov Yu.S., Kolesov V.S., Fedik I.I.* Avtokolebaniya v sistemakh s raspredelennymi parametrami. Kiev: Naukova dumka, 1979. 162 s. [in Russian]).

3. *Колесов Ю.С., Майоров В.В.* Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1974. 10. № 10. С. 1778–1788. (*Kolesov Yu.S., Mayorov V.V.* Novyy metod issledovaniya ustoychivosti resheniy lineynykh differentsialnykh uravneniy s blizkimi k postoyannym pochti periodicheskimi koeffitsientami // Differentsialnye uravneniya. 1974. 10. № 10. S. 1778–1788 [in Russian]).

Кубышкин Е.П., Тряхов М.С. Алгоритм построения оптимального управления поведением решений начально-краевой задачи, моделирующей динамику руки телескопического манипулятора. Рассматривается нелинейная начально-краевая задача

$$J(l)\ddot{\theta} - \int_0^l (b + l - x_1)u_{tt}(x_1, t)dx_1 + 2\dot{l}\dot{\theta}(b - l - 1/2) = M(t), \tag{1}$$

$$\ddot{l} - \dot{\theta}^2(b + l - 1/2) = F(t), \tag{2}$$

$$u_{tt} + u_{xxxx} = (b + l - x)\ddot{\theta} + 2\dot{l}\dot{\theta},\ u_{xx}(0, t) = u_{xxx}(0, t) = 0, u(l, t) = u_x(l, t) = 0, \tag{3}$$

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \theta_1, l(0) = l_0, \dot{l}(0) = l_1, u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x).(0 \leqslant x \leqslant l_0) \tag{4}$$

относительно функций $\theta = \theta(t), l = l(t) > 0$ и $u = u(x, t)$ области $Q_{l,T} = \{0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$, где $M(t), F(t) \in L_2(0, T), J(l) = J_0 + 1/3 + (b + l)[(b + l) - 1] > 0$, J_0 и b положительные параметры.

Начально-краевая задача (1) — (4) приведена в безразмерных переменных и описывает динамику руки телескопического манипулятора. Рука обладает упругими свойствами, имеет длину $l(t)$ и может одновременно совершать поворот и прямолинейное движение под

действием момента внешних сил $M(t)$ и силы $F(t)$. Вывод уравнений (1) — (3) имеется в монографии [1].

В докладе для начально-краевой задачи (1) — (4) сформулировано понятие обобщенного решения с введением соответствующих функциональных пространств и интегральных соотношений, определяющих обобщенное решение. Доказаны теорема существования и единственности решения и теорема о непрерывной зависимости решения от начальных условий и параметров уравнения, обеспечивающие корректность поставленной начально-краевой задачи, с использованием результатов работы [2].

Для начально-краевой задачи (1)—(4) предложен алгоритм решения следующих задач оптимального управления.

Задача 1. *Определить функции* $M(t), F(t) \in L_2(0,T)$, *переводящие решение начально-краевой задачи* (1) — (4) *из начального положения* (4) *в конечное*

$$\begin{aligned} &\theta(T) = \theta_{0T},\ \dot\theta(T) = \theta_{1T}, l(0) = l_{0T}, \dot l(0) = l_{1T}, \\ &u(x,T) = u_{0T}(x), u_t(x,T) = u_{1T}(x)\ (0 \leqslant x \leqslant l_T \equiv l(T)). \end{aligned} \tag{5}$$

в заданный момент времени T *и минимизирующие функционал* $\Phi(M,F) = \|M(t)\|^2_{L_2(0,T)} + \|F(t)\|^2_{L_2(0,T)}$.

Задача 2 (задача быстродействия). *Определить функции* $M(t), F(t) \in L_2(0,T)$, $\Phi(M,F) \leqslant L < \infty$, *переводящие решение начально-краевой задачи* (1) — (4) *из* (4) *в* (5) *за минимальное время* T .

При решении задач 1, 2 доказана управляемость решениями начально-краевой задачи (1) — (4), сформулирован принцип максимума, предложен итерационный алгоритм построения оптимального управления, основанный на решении задач 1, 2 для рекуррентной последовательности линейных начально-краевых задач вида

$$J(l_{n-1})\ddot\theta_n - \int\limits_0^{l_{n-1}} (b + l_{n-1} - x_1) u_{ntt}(x_1,t)dx_1 + 2\dot l_{n-1}\dot\theta_{n-1}(b - l_{n-1} - 1/2) = M_n(t), \tag{6}$$

$$\ddot l_n - \dot\theta^2_{n-1}(b + l_{n-1} - 1/2) = F_n(t), \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &u_{ntt} + u_{nxxxx} = (b + l_{n-1} - x)\ddot\theta_n + 2\dot l_{n-1}\dot\theta_{n-1}, \\ &u_{nxx}(0,t) = u_{nxxx}(0,t) = 0, \quad u_n(l_{n-1},t) = u_{nx}(l_{n-1},t) = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &\theta_n(0) = \theta_0, \quad \dot\theta_n(0) = \theta_1, \quad l_n(0) = l_0, \quad \dot l_n(0) = l_1, \\ &u_n(x,0) = u_0(x), \quad u_{nt}(x,0) = u_1(x), \quad \theta_0(t) \equiv 0, u(x,t) \equiv 0 \end{aligned} \tag{9}$$

$(n = 1,2,...,0 \leqslant x \leqslant l_0)$ и доказательства сходимости $\theta_n(t), u_n(x,t), M_n(t), F_n(t)$ в соответствующих функциональных пространствах, а также числовой последовательности T_n. Решение задач 1, 2 для (6)—(9) основано на методике работы [3], позволяющей свести решение задач управления к проблеме моментов в соответствующих функциональных пространствах. Минимальное время T_n при этом находится как корень некоторого нелинейного уравнения. Проведен численный эксперимент для различных характерных значений параметров (1)—(3), начальных и конечных условий.

Список литературы

1. *Черноусько Ф. Л.,Болотник Н. Н.,Градецкий В. Г.* Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. М.: Наука, 1989. 363 с. (English transl.: *Chernousko F., Bolotnik N., Gradetsky V.* Manipulation Robots: Dynamics, Control and Optimization. CRC Press, Boca Raton, USA, 1994. 267 p.)

2. *Тряхов М. С.* Построение обобщенного решения одной начально-краевой задачи с переменной границей // Вестник ННГУ ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2012. № 5(2). С. 219–221.(*Tryakhov M.S.* Postroenie obobshchennogo resheniya odnoy nachalno-kraevoy zadachi s peremennoy granitsey // Vestnik NNGU universiteta imeni N. I. Lobachevskogo. 2012. № 5(2). S. 219–221 [in Russian]).

3. *Кубышкин Е. П.* Оптимальное управление поворотом твердого тела с гибким стержнем //ПММ. 1992. Т. 56. № 2. С. 240–249. (English transl.: *Kubyshkin Ye. P.* Optimal control of the rotation of a solid with a flexible rod // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1992. V. 56, № 2. P. 205–214.)