

УДК 517.9

Обобщенное решение одной начально-краевой задачи, возникающей в механике дискретно-континуальных систем

Кубышкин Е. П., Хребтюгова О. А.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: kubysh@uniyar.ac.ru

получена 22 ноября 2011

Ключевые слова: обобщенное решение, корректность постановки задачи, дискретно-континуальные механические системы, балка Тимошенко, аналитическая формула решения

Дано определение обобщенного решения начально-краевой задачи для линейной системы дифференциальных уравнений, содержащей обыкновенное дифференциальное уравнение и два уравнения в частных производных (гибридной системы дифференциальных уравнений). Доказана теорема существования обобщенного решения, его единственность, корректность постановки задачи. Получена аналитическая формула решения. Такие системы дифференциальных уравнений возникают при изучении дискретно-континуальных механических систем.

1. Постановка задачи. Рассматривается следующая начально-краевая задача

$$J^* \ddot{\theta} + \int_0^1 (x+a) y_{tt}(x,t) dx + \varepsilon \int_0^1 \phi_{tt}(x,t) dx = M(t), \quad (1)$$

$$\varepsilon y_{tt} - \gamma(y_{xx} - \phi_x) = -\varepsilon(x+a)\ddot{\theta}, \quad (2)$$

$$\varepsilon^2 \phi_{tt} - \varepsilon \phi_{xx} + \gamma(y_x - \phi) = -\varepsilon^2 \ddot{\theta}, \quad (3)$$

$$y(0,t) = \phi(0,t) = 0, \quad y_x(1,t) - \phi(1,t) = \phi_x(1,t) = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \theta_1(x), \quad y(x,0) = y_0(x), \quad y_t(x,0) = y_1(x), \\ \phi(x,0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(x,0) = \phi_1(x), \end{aligned} \quad (5)$$

которая описывает поворот твердого тела с жестко закрепленным в нем упругим стержнем постоянного сечения под действием момента внешних сил $M'(t')$, приложенного к оси, проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно плоскости колебаний стержня. Упругий стержень моделируется в рамках гипотез балки

Тимошенко, учитывающих сдвиговые деформации стержня и инерцию вращения сечений стержня. Уравнения (1)–(3) получены обобщением уравнений работы [1] на случай сформулированной модели стержня. Такие механические системы носят название дискретно-континуальных, так как содержат элементы с сосредоточенными и распределенными массами. Начально-краевая задача (1)–(5) приведена в безразмерных переменных: $x = x'/l$, $y = y'/l$, $a = a'/l$, $t = t'/t_0$, $M(t) = M(t')/(EJ)$, $t_0 = l^2(S\rho/(EJ))^{1/2}$, $J_0 = J'_0/(\rho Sl^3)$, $\varepsilon = J/(Sl^2)$, $\gamma = \alpha/(2(1+\nu))$, $(\varepsilon, \gamma < 1)$. Здесь $\theta(t')$ определяет угол поворота системы относительно инерциального пространства, $y'(x', t')$ и $\phi(x', t')$ определяют соответственно величину деформации средней оси стержня и угол поворота сечения стержня относительно нормали к оси стержня, l — длина стержня, ρ — плотность материала стержня и твердого тела, E — модуль Юнга материала стержня, ν — коэффициент Пуассона материала стержня, α — коэффициент сдвиговых деформаций сечения стержня, J — момент инерции сечения стержня относительно оси вращения сечения, J'_0 — момент инерции твердого тела относительно оси вращения, a' — расстояние от точки заделки стержня до центра масс твердого тела, S — площадь сечения стержня. Кроме того,

$$J_* = J_0 + \int_0^1 (x + a)^2 dx + \varepsilon.$$

Ниже в предположении $M(t) \in L_2(0, T)$ для начально-краевой задачи (1)–(5) дается определение обобщенного решения, доказывается его существование и единственность, получена аналитическая формула обобщенного решения.

2. Вспомогательные построения. Выразим из уравнения (1) $\ddot{\theta}$ и подставим это выражение в (2)–(3). В результате получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon y_{tt} - J_*^{-1} \varepsilon (x + a) \int_0^1 (x_1 + a) y_{tt}(x_1, t) dx_1 - \\ - J_*^{-1} \varepsilon^2 (x + a) \int_0^1 \phi_{tt}(x_1, t) dx_1 - \gamma (y_{xx} - \phi_x) = -\varepsilon J_*^{-1} (x + a) M(t), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \phi_{tt} - J_*^{-1} \varepsilon^2 \int_0^1 (x_1 + a) y_{tt}(x_1, t) dx_1 - \\ - J_*^{-1} \varepsilon^3 \int_0^1 \phi_{tt}(x_1, t) dx_1 - \varepsilon \phi_{xx} - \gamma (y_x - \phi_x) = -\varepsilon^2 J_*^{-1} M(t) \end{aligned} \quad (7)$$

с краевыми и начальными условиями (4), (5) для определения $y(x, t)$ и $\phi(x, t)$.

Введем в рассмотрение гильбертово пространство H вектор-функций $u(x) = \text{col}(y(x), \phi(x))$, $y(x), \phi(x) \in L_2(0, 1)$ со скалярным произведением и нормой

$$(u, v)_H = (y(x), z(x))_{L_2} + (\phi(x), \psi(x))_{L_2}, \quad \|u\|_H = (u, u)_H^{1/2}, \quad (8)$$

где $v(x) = \text{col}(z(x), \psi(x))$. $(*, *)_{L_2}$ — скалярное произведение в $L_2(0, 1)$.

Рассмотрим в H интегральный оператор

$$Au \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon y(x) - J_*^{-1} \varepsilon (x + a) ((x + a), y(x))_{L_2} - J_*^{-1} \varepsilon^2 (x + a) (1, \phi(x))_{L_2} \\ \varepsilon^2 \phi(x) - J_*^{-1} \varepsilon^2 ((x + a), y(x))_{L_2} - J_*^{-1} \varepsilon^3 (1, \phi(x))_{L_2} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $u(x) = \text{col}(y(x), \phi(x))$.

Утверждение 1. Оператор A , действующий из $H \rightarrow H$, является ограниченным, симметричным и положительно определенным.

Очевидно, что оператор A переводит пространство H в H . Так же легко проверяется его ограниченность. Покажем симметричность оператора A . Для $u(x) = \text{col}(y(x), \phi(x)), v(x) = \text{col}(z(x), \psi(x)) \in H$ имеем

$$\begin{aligned} (Au, v)_H &= \varepsilon(y(x), z(x))_{L_2} + \varepsilon^2(\phi(x), \psi(x))_{L_2} - \varepsilon J_*^{-1}(x+a, y(x))_{L_2}(x+a, z(x))_{L_2} - \\ &- \varepsilon^2 J_*^{-1}((x+a, y(x))_{L_2}(1, \psi(x))_{L_2} + (x+a, z(x))_{L_2}(1, \phi(x))_{L_2}) - \\ &- \varepsilon^3 J_*^{-1}(1, \phi(x))_{L_2}(1, \psi(x))_{L_2} = (u, Av)_H. \end{aligned} \quad (10)$$

Покажем положительную определенность оператора A . Из (10) следует

$$\begin{aligned} (Au, u)_H &= \varepsilon(y(x), y(x))_{L_2} + \varepsilon^2(\phi(x), \phi(x))_{L_2} - \\ &- \varepsilon J_*^{-1}[(x+a, y(x))_{L_2} + \varepsilon(1, \phi)_{L_2}]^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Наряду со скалярным произведением (8) в H рассмотрим скалярное произведение $(u, v)_* = (y(x), z(x))_{L_2} + \varepsilon(\phi(x), \psi(x))_{L_2}$, которое порождает эквивалентную норму $\|u\|_* = (u, u)_*^{1/2}$. Так как для этого скалярного произведения справедливо неравенство Коши–Буняковского, выражение (11) перепишем в виде

$$\begin{aligned} (Au, u)_H &\geq \varepsilon(y(x), y(x))_{L_2} + \varepsilon^2(\phi(x), \phi(x))_{L_2} - \varepsilon J_*^{-1}((x+a, x+a)_{L_2} + \varepsilon) \times \\ &\times ((y(x), y(x))_{L_2} + \varepsilon(\phi(x), \phi(x))_{L_2}) = \varepsilon J_0 J_*^{-1}((y(x), y(x))_{L_2} + \varepsilon(\phi(x), \phi(x))_{L_2}) \geq \\ &\geq \varepsilon^2 J_0 J_*^{-1}(u(x), u(x))_H. \end{aligned}$$

В H введем еще одно скалярное произведение $(u, v)_A = (Au, v)_H$ и норму $\|u\|_A = (u, u)_A^{1/2}$.

Рассмотрим в H дифференциальный оператор

$$Bu = \begin{pmatrix} -\gamma(y''(x) - \phi'(x)) \\ -\varepsilon\phi''(x) - \gamma(y'(x) - \phi(x)) \end{pmatrix} \quad (12)$$

с областью определения $D(B) = \{u = (y(x), \phi(x)) : y(x), \phi(x) \in C^2(0, 1), y(0) = \phi(0) = 0, y'(1) - \phi(1) = 0, \phi'(1) = 0\}$.

Утверждение 2. Оператор B является симметричным и положительным.

Пусть $u(x) = \text{col}(y(x), \phi(x)), v(x) = \text{col}(z(x), \psi(x)) \in D(B)$. Имеем

$$\begin{aligned} (Bu, v)_H &= (-\gamma(y''(x) - \phi'(x)), z(x))_{L_2} + (-\varepsilon\phi''(x) - \gamma(y'(x) - \phi(x)), \psi)_{L_2} = \\ &= -\gamma(y'(x) - \phi(x))z(x)|_0^1 + (\gamma(y'(x) - \phi(x)), z'(x))_{L_2} - \varepsilon\phi'(x)\psi(x)|_0^1 + \\ &+ (\varepsilon\phi'(x), \psi'(x))_{L_2} - (\gamma(y'(x) - \phi(x)), \psi(x))_{L_2} = \\ &= \gamma(y'(x) - \phi(x), z'(x) - \psi(x))_{L_2} + \varepsilon(\phi'(x), \psi'(x))_{L_2} = (u, Bv)_H. \end{aligned} \quad (13)$$

Согласно (13)

$$(Bu, u)_{L_2} = \gamma \|y'(x) - \phi(x)\|_{L_2}^2 + \varepsilon \|\phi'(x)\|_{L_2}^2. \quad (14)$$

Отсюда $(Bu, u) \geq 0, (Bu, u) = 0 \Rightarrow y'(x) - \phi(x) \equiv 0, \phi'(x) \equiv 0$. С учетом краевых условий $y(x) \equiv 0, \phi(x) \equiv 0$, т.е. оператор B положительный. Утверждение 2 доказано.

Введем в H энергетическое скалярное произведение оператора $(u, v)_B = (Bu, v)_H$, определенное на $u(x), v(x) \in D(A)$, и энергетическую норму

$$\|u\|_B = (u, u)_B^{1/2}. \quad (15)$$

Пополнив D_B в норме (15), получим энергетическое пространство H_B оператора B .

Утверждение 3. $H_B \subset H$.

Пусть $u_n(x) = \text{col}(y_n(x), \phi_n(x)) \in D(B)$, $u_*(x) = \text{col}(y_*(x), \phi_*(x)) \in H(B)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(x) - u_*(x)\|_B = 0$. Отсюда согласно (14) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi'_n(x) - \phi'_*(x)\|_{L_2} = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y'_n(x) - \phi_n(x) - y'_*(x) + \phi_*(x)\|_{L_2} = 0$. Покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n(x) - \phi_*(x)\|_{L_2} = 0$. Действительно, при $0 \leq x \leq 1$

$$(\phi_n(x) - \phi_*(x))^2 = \left(\int_0^x (\phi'_n(x_1) - \phi'_*(x_1)) dx_1 \right)^2 \leq \int_0^1 (\phi'_n(x) - \phi'_*(x))^2 dx.$$

Отсюда имеем

$$\int_0^1 (\phi_n(x) - \phi_*(x))^2 dx = \|\phi_n(x) - \phi_*(x)\|_{L_2}^2 \leq \|\phi'_n(x) - \phi'_*(x)\|_{L_2}^2. \quad (16)$$

Т.к. $\|y'_n(x) - y'_*(x)\|_{L_2} \leq \|y'_n(x) - \phi_n(x) - y'_*(x) + \phi_*(x)\|_{L_2} + \|\phi_n(x) - \phi_*(x)\|_{L_2}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y'_n(x) - y'_*(x)\| = 0$. Сходимость $y_n(x)$ к $y_*(x)$ в $L_2(0, 1)$ доказывается аналогично сходимости $\phi_n(x)$ к $\phi_*(x)$. Утверждение доказано.

В дальнейшем расширение оператора B на H_B вновь обозначим через B .

Запишем начально-краевую задачу (6)–(7), (4)–(5) в операторной форме

$$Au_{tt} + Bu = -J_0^{-1}Ag(x)M(t), \quad (17)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u_0(x) = \text{col}(y_0(x), \phi_0(x)), u_t(x, 0) = u_1(x) = \text{col}(y_1(x), \phi_1(x)), \quad (18)$$

где $g(x) = \text{col}((x + a), 1)$.

Рассмотрим в H_B спектральную задачу

$$-\lambda Au + Bu = 0. \quad (19)$$

Утверждение 4. Существует счетная последовательность вещественных однократных точек спектра $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots (\lambda_n \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty)$ спектральной задачи (19), которым отвечают собственные функции $u_n(x) \in H_B$, нормированные следующим образом $(u_n(x), u_m(x))_A = \delta_{nm}$.

Для доказательства введем в рассмотрение оператор B^{-1} , действующий из H в H_B . B^{-1} является вполне непрерывным оператором (интегральным оператором Фредгольма), а также, на основании утверждения 2, симметричным и положительным.

Перепишем (19) в виде

$$B^{-1}Au = \lambda^{-1}u.$$

Оператор $B^{-1}A$, действующий из H в H_B , является вполне непрерывным, симметричным и положительным. Его спектр λ_n^{-1} (см., например, [1], с. 230) вещественный, положительный и не более чем счетный. Предельной точкой спектра может быть только $\lambda = 0$. При этом каждой точке спектра может отвечать лишь конечное число линейно независимых собственных функций. Но так как (19) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка, то для каждого λ_n может существовать не более одной функции, удовлетворяющей соответствующим краевым условиям. Предположив существование двух линейно независимых собственных функций, получаем, что они образуют фундаментальную систему решений линейного дифференциального уравнения второго порядка. А это означает, что все его решения должны удовлетворять краевым условиям, чего быть не может.

Пусть $u_n(x)$ — собственная функция спектральной задачи (19), отвечающая различным собственным значениям λ_{n_j} ($j = 1, 2$). Подставим $u_{n_1}(x)$ и λ_{n_1} в (19) и умножим скалярно на u_{n_2} . В результате имеем $\lambda_{n_1}(Au_{n_1}, u_{n_2})_H = (Bu_{n_1}, u_{n_2})_H$. Поменяем n_1 и n_2 местами: $\lambda_{n_2}(Au_{n_2}, u_{n_1})_H = (Bu_{n_2}, u_{n_1})_H$. Вычтем из первого равенства второе. В результате с учетом симметричности операторов A и B имеем $(Au_{n_1}, u_{n_1})_H = (u_{n_1}, u_{n_2})_A = 0$. Таким образом, всегда можно считать

$$(u_{n_1}, u_{n_2})_A = \delta_{n_1 n_2}. \quad (20)$$

Утверждение 4 доказано.

Рассмотрим способ построения функций $u_n(x)$ и собственных значений $\lambda_n = \omega_n^2$, $\omega_n > 0$. Будем искать решение спектральной задачи (19) $u(x) = \text{col}(y(x), \phi(x))$, считая $\lambda = \omega^2$, $\omega > 0$ параметром. Это дает для определения $y(x)$ и $\phi(x)$ краевую задачу

$$\varepsilon\omega^2 y + \gamma(y'' - \phi') = \varepsilon\omega^2(x + a)G, \quad (21)$$

$$\varepsilon^2\omega^2\phi + \varepsilon\phi'' + \gamma(y' - \phi) = \varepsilon^2\omega^2 G, \quad (22)$$

$$y(0) = \phi(0) = 0, \quad y'(1) - \phi(1) = 0, \quad \phi'(1) = 0, \quad (23)$$

где

$$G = J_*^{-1}((x + a, y(x))_{L_2} + \varepsilon(1, \phi(x))_{L_2}). \quad (24)$$

Рассмотрим сначала однородную часть системы дифференциальных уравнений (21), (22)

$$\varepsilon\omega^2 y + \gamma(y'' - \phi') = 0, \quad (25)$$

$$\varepsilon^2\omega^2\phi + \varepsilon\phi'' + \gamma(y' - \phi) = 0. \quad (26)$$

Определяя решения (25), (26) в виде $y(x) = y_0 \exp(px)$, $\phi(x) = \phi_0 \exp(px)$ ($p \in \mathbb{C}$), получим для нахождения $\text{col}(y_0, \phi_0)$ и p систему алгебраических уравнений

$$(\varepsilon\omega^2 + \gamma p^2)y_0 - \gamma p\phi_0 = 0, \quad (27)$$

$$\gamma p y_0 + (\varepsilon^2\omega^2 + \varepsilon p^2 - \gamma)\phi_0 = 0 \quad (28)$$

и характеристическое уравнение

$$p^4 + \varepsilon\omega^2(1 + \gamma^{-1})p^2 - \omega^2(1 - \varepsilon^2\omega^2\gamma^{-1}) = 0,$$

корнями которого являются величины

$$p_{1,2} = p_{1,2}(\omega) = \pm \left\{ -\varepsilon\omega^2(1 + \gamma^{-1}) + [\varepsilon^2\omega^4(1 - \gamma^{-1})^2 + 4\omega^2]^{1/2} \right\}^{1/2} / \sqrt{2},$$

$$p_{3,4} = p_{3,4}(\omega) = \pm i \left\{ \varepsilon\omega^2(1 + \gamma^{-1}) + [\varepsilon^2\omega^4(1 - \gamma^{-1})^2 + 4\omega^2]^{1/2} \right\}^{1/2} / \sqrt{2}.$$

Отметим, что $p_{1,2}(\omega)$ при $\omega \leq \gamma^{1/2}/\varepsilon$ вещественные, при $\omega > \gamma^{1/2}/\varepsilon$ чисто мнимые; $p_{3,4}(\omega)$ всегда чисто мнимые.

Выберем решения $g_j(\omega) = \text{col}(y_{0j}(\omega), \phi_{0j}(\omega))$ ($|g_j(\omega)|_{C^2} = 1$), системы уравнений (27), (28), соответствующие корням $p_j(\omega)$, в виде

$$y_{0j}(\omega) = \gamma p_j(\omega) / \Delta_j(\omega), \quad \phi_{0j}(\omega) = (\varepsilon\omega^2 + \gamma p_j^2(\omega)) / \Delta_j(\omega),$$

$$\Delta_j(\omega) = \left[\gamma^2 p_j(\omega) \overline{p_j}(\omega) + (\varepsilon\omega^2 + \gamma p_j^2(\omega))(\varepsilon\omega^2 + \gamma \overline{p_j}^2(\omega)) \right]^{1/2} \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Общее решение системы уравнений (25), (26), непрерывно зависящее от ω , запишем в виде

$$u_0(x, \omega, c) = c_1 u_1(x, \omega) + c_2 u_2(x, \omega) + c_3 u_3(x, \omega) + c_4 u_4(x, \omega),$$

где $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$, $u_j(x, \omega) = \text{col}(y_{0j}(x, \omega), \phi_{0j}(x, \omega))$ ($j = 1, 2, 3, 4$).

$$u_1(x, \omega) = (g_1(\omega) \exp(p_1(\omega)x) + g_2(\omega) \exp(p_2(\omega)x)) / 2,$$

$$u_2(x, \omega) = (g_1(\omega) \exp(p_1(\omega)x) - g_2(\omega) \exp(p_2(\omega)x)) / (p_1(\omega) - p_2(\omega)),$$

$$u_3(x, \omega) = (g_3(\omega) \exp(p_3(\omega)x) + g_4(\omega) \exp(p_4(\omega)x)) / 2,$$

$$u_4(x, \omega) = (g_3(\omega) \exp(p_3(\omega)x) - g_4(\omega) \exp(p_4(\omega)x)) / (2i).$$

Легко заметить, что вектор-функция $u_*(x, G) = \text{col}((x + a)G, G)$ является частным решением системы уравнений (21), (22) при любом G . Поэтому ее общим решением при любом G будет вектор-функция

$$u(x, \omega, c, G) = u_0(x, \omega, c) + u_*(x, G). \quad (29)$$

Подставим (29) в равенство (24). В результате с учетом вида $u_0(x, \omega, c)$ и $u_*(x, G)$ имеем равенство

$$G = G(\omega) = \frac{J_*}{J_0} \sum_{j=1}^4 c_j ((x + a, y_{0j}(x, \omega))_{L_2} + \varepsilon(1, \phi_{0j}(x, \omega))_{L_2}). \quad (30)$$

Подставив (30) в (29), получим общее решение (21), (22) в виде

$$u(x, \omega, c) = u_0(x, \omega, c) + u_*(x, G(\omega)), \quad (31)$$

линейно зависящим от координат вектора c . Подставив теперь (31) в краевые условия (23), получим для определения вектора c систему алгебраических уравнений

$$D(\omega)c = 0, \quad (32)$$

которая имеет ненулевое решение при выполнении условия

$$P(\omega) = \det D(\omega) = 0, \quad (33)$$

являющегося характеристическим уравнением спектральной задачи (19). Положительные корни $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n < \dots$ уравнения (33) определяют последовательность точек спектра $\lambda_n = \omega_n^2 (n = 1, 2, \dots)$ краевой задачи (19) и совокупность собственных функций

$$u_n(x) = u_n(x, \omega_n, c_n) / \|u_n(x, \omega_n, c_n)\|_A, \quad (34)$$

где c_n — решение системы уравнений (32), соответствующее ω_n . Для функций (34) выполнены условия (20).

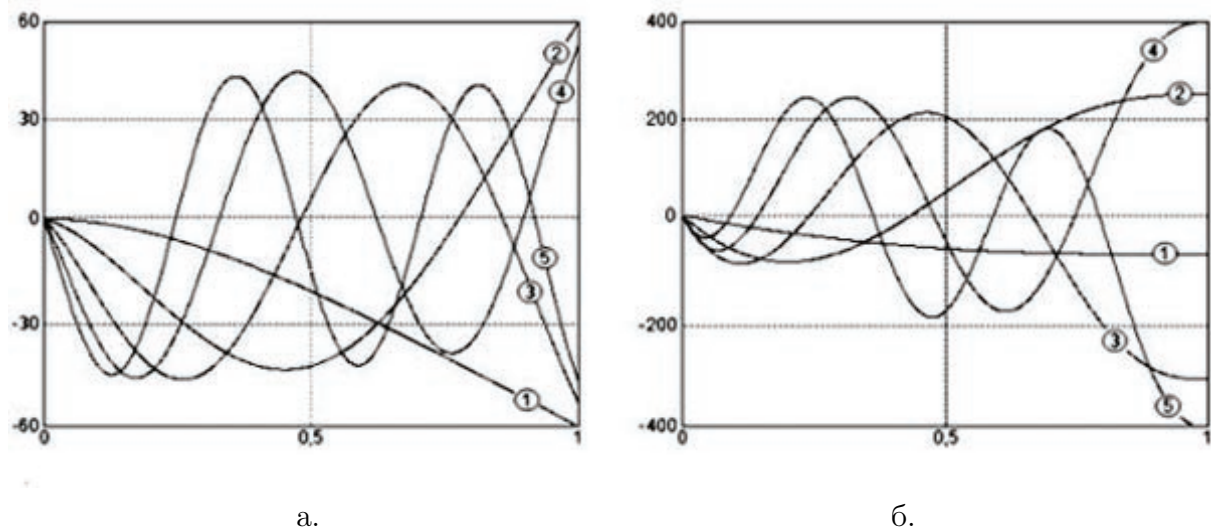


Рис.1

На рис. 1а и 1б для случая $J_0 = 50, a = 0, 2, \varepsilon = 0, 001, \gamma = 0, 1$ приведены соответственно графики первых пяти функций $y_n(x)$ и $\phi_n(x)$, являющихся координатами вектор-функций $u_n(x)$ вида (34). При этом $\omega_1 = 0.3430 \cdot 10^1, \omega_2 = 0.1892 \cdot 10^2, \omega_3 = 0.4573 \cdot 10^2, \omega_4 = 0.7673 \cdot 10^2, \omega_5 = 0.1096 \cdot 10^3$. Отметим, что для других физически реализуемых параметров спектральной задачи (19) качественный вид ее собственных функций аналогичен приведенному.

3. Построение обобщенного решения задачи (17)–(18). Обозначим $Q_T = (x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T$, через $H_1(Q_T)$ обозначим пространство вектор-функций $u(x, t) = \text{col}(y(x, t), \phi(x, t))$, полученное замыканием в норме

$$\|u(x, t)\|_{H_1} = \left[\int_0^T ((u_t(x, t), u_t(x, t))_A + (u(x, t), u(x, t))_B) dt \right]^{1/2} \quad (35)$$

множества вектор-функций $u(x, t) = \text{col}(y(x, t), \phi(x, t)) \in C^{1,1}(Q_T)$, $y(0, t) = \phi(0, t) = 0$, $y_x(1, t) - \phi(1, t) = 0$, $\phi_x(1, t) = 0$.

Введем в рассмотрение функцию вида

$$v(x, t) = \text{col}(z(x, t), \psi(x, t)) \in H_1(Q_T), \quad v(x, T) \equiv 0. \quad (36)$$

Пусть

$$u_0(x) \in H_B, \quad u_1(x) \in H. \quad (37)$$

Умножим равенство (17) на функцию $v(x, t)$ вида (36) и проинтегрируем по области $(x, t) \in Q_T$. В результате получим интегральное соотношение

$$\int_0^T \left(-(u_t(x, t), v_t(x, t))_A + (u(x, t), v(x, t))_B - \right. \\ \left. - J_0^{-1}(g(x)M(t), v(x, t))_A \right) dt + (u_1(x), v(x, 0))_A = 0. \quad (38)$$

Под обобщенным решением задачи (17),(18), определенным в Q_T , с начальными условиями вида (37) будем понимать функцию $u(x, t) \in H_1(Q_T)$ ($u(x, 0) = u_0(x)$), удовлетворяющую интегральному соотношению (38) для любой функции $v(x, t)$ вида (36).

Покажем, что обобщенное решение задачи (17),(18) единственно. Предположим существование двух решений $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ отвечающих одинаковым начальным условиям. Для разности $u_1(x, t) - u_2(x, t) = u(x, t) = \text{col}(y(x, t), \phi(x, t))$ ($u(x, 0) \equiv 0$, $u_t(x, 0) \equiv 0$) получим интегральное соотношение

$$\int_0^T (-(u_t(x, t), v_t(x, t))_A + (u(x, t), v(x, t))_B) dt = 0, \quad (39)$$

которое должно выполняться для любой функции $v(x, t)$ вида (36).

Выберем в качестве $v(x, t)$ функцию

$$v(x, t) = \begin{cases} \int_t^\tau u(x, \xi) d\xi, & \text{если } 0 < t < \tau; \\ 0, & \text{если } \tau \leq t \leq T, \end{cases} \quad (40)$$

$v(x, t) = \text{col}(z(x, t), \psi(x, t))$, зависящую от параметра τ .

Подставив (40) в (39), имеем

$$\int_0^T (u_t(x, t), v_t(x, t))_A dt = - \int_0^\tau (u_t(x, t), u(x, t))_A dt = \\ = -\frac{1}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} (u(x, t), u(x, t))_A dt = -\frac{1}{2} (u(x, \tau), u(x, \tau))_A, \\ \int_0^T (u(x, t), v(x, t))_B dt = - \int_0^\tau (Bu(x, t), v(x, t))_H dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\tau ((\gamma(y_x(x, t) - \phi(x, t)), z_x(x, t) - \psi(x, t))_{L_2} + \varepsilon(\phi_x(x, t), \psi_x(x, t))_{L_2}) dt = \\
&= \int_0^1 \int_0^\tau \int_t^\tau [\gamma(y_x(x, t) - \phi(x, t))(y_x(x, \xi) - \phi(x, \xi)) + \varepsilon\phi_x(x, t)\phi_x(x, \xi)] d\xi dt dx = \\
&= \int_0^1 \left[\gamma \int_0^\tau (y_x(x, t) - \phi(x, t)) dt \cdot \int_t^\tau (y_x(x, \xi) - \phi(x, \xi)) d\xi + \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon \int_0^\tau \phi_x(x, t) dt \cdot \int_t^\tau \phi_x(x, \xi) d\xi \right] dt = \\
&= \int_0^1 \left[\gamma \int_0^\tau (y_x(x, \xi) - \phi(x, \xi)) d\xi \cdot \int_0^\xi (y_x(x, t) - \phi(x, t)) dt + \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon \int_0^\tau \phi_x(x, \xi) d\xi \cdot \int_0^\xi \phi_x(x, t) dt \right] dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \gamma \left[\int_0^\tau (y_x(x, t) - \phi(x, t)) dt \right]^2 + \varepsilon \left[\int_0^\tau \phi_x(x, t) dt \right]^2 \right\} dx.
\end{aligned}$$

В итоге равенство (39) примет вид

$$\frac{1}{2}(u(x, \tau), u(x, \tau))_A + \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \gamma \left[\int_0^\tau (y_x(x, t) - \phi(x, t)) dt \right]^2 + \varepsilon \left[\int_0^\tau \phi_x(x, t) dt \right]^2 \right\} dx = 0,$$

из которого в силу произвольности τ следует, что $y(x, t), \phi(x, t) \equiv 0$.

Перейдем к доказательству существования обобщенного решения задачи (17)–(18). Отметим, что согласно (19), (20)

$$(u_n, u_m)_B = \omega_n^2 \delta_{nm}. \quad (41)$$

Представим $u_0(x) \in H_B$, $u_1(x) \in H$ и $g(x)$ в виде рядов

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{-2} a_{0n} u_n(x), \quad a_{0n} = (u_0, u_n)_B, \quad \|u_0(x)\|_B^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{-2} a_{0n}^2, \quad (42)$$

$$u_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{0n} u_n(x), \quad b_{0n} = (u_1, u_n)_A, \quad \|u_1(x)\|_A^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_{0n}^2, \quad (43)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n(x), \quad d_n = (g(x), u_n)_A, \quad \|g(x)\|_A^2 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2. \quad (44)$$

Выберем в качестве $u_0(x) = a_{0n} \omega_n^{-2} u_n(x)$, $u_1(x) = b_{0n} u_n(x)$ и пусть в правой части (17) вместо $g(x)$ стоит функция $d_n u_n(x)$, где a_{0n} , b_{0n} и d_n — некоторые постоянные. Считаем $M(t) \in L_2(0, T)$. Тогда функция

$$\begin{aligned}
u_n(x, t) = & \omega_n^{-1} u_n(x) (a_{0n} \omega_n^{-1} \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) - \\
& - J_0^{-1} d_n \int_0^t \sin(\omega_n(t - \tau)) M(\tau) d\tau) \quad (45)
\end{aligned}$$

является обобщенным решением задачи (17), (18), удовлетворяющим выбранным начальным условиям.

Это проверяется непосредственно подстановкой (45) в (37) с учетом (20), (41) и разложения

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) u_n(x), \quad f_n(t) = (v(x, t), u_n(x))_A,$$

$$f_n(t) \in W_2^1(0, T), \quad f_n(T) = 0.$$

Аналогичное утверждение справедливо, если $u_0(x) = \sum_{n=1}^N \omega_n^{-2} a_{0n} u_n(x)$,

$u_0(x) = \sum_{n=1}^N b_{0n} u_n(x)$ и в правой части уравнения (17) вместо функции $g(x)$ стоит ряд $\sum_{n=1}^N d_n u_n(x)$. В этом случае обобщенное решение задачи (17), (18) будет представлено суммой $u_N(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x, t)$.

Покажем теперь, что ряд вида

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \omega_n^{-1} \left(a_{0n} \omega_n^{-1} \cos(\omega_n t) + b_{0n} \sin(\omega_n t) - \right.$$

$$\left. - J_0^{-1} d_n \int_0^t \sin(\omega_n(t - \tau)) M(\tau) d\tau \right), \quad (46)$$

где a_{0n}, b_{0n}, a_n определены в (42)–(44), дает обобщенное решение задачи (17), (18), принадлежащее $H_1(Q_T)$ и удовлетворяющее начальным условиям вида (37). Отметим сначала, что согласно (42)–(44) решение (46) удовлетворяет начальным условиям (37).

Любой конечный отрезок ряда (46) является обобщенным решением задачи (17), (18), т.е. (46) является формальным обобщенным решением. Докажем сходимость (46) в норме пространства $H_1(Q_T)$. Для этого оценим в норме (35) отрезок ряда (46) вида

$$u_{N+m}(x, t) - u_N(x, t) = \sum_{n=N}^{N+m} u_n(x) \omega_n^{-1} \left(a_{0n} \omega_n^{-1} \cos(\omega_n t) + b_{0n} \sin(\omega_n t) + \right.$$

$$\left. + d_n \int_0^t \sin(\omega_n(t - \tau)) M(\tau) d\tau \right). \quad (47)$$

Согласно (35)

$$\|u_{N+m} - u_N\|_{H_1(Q_T)}^2 =$$

$$= \int_0^T (\|u_{N+m}(x, t) - u_N(x, t)\|_A^2 + \|u_{N+m}(x, t) - u_N(x, t)\|_B^2) dt. \quad (48)$$

С учетом (20), (41) и (47) имеем

$$\begin{aligned}
 \|u_{N+m}(x, t) - u_N(x, t)\|_A^2 &= (A(u_{N+m}(x, t) - u_N(x, t)), (u_{N+m}(x, t) - u_N(x, t)))_H = \\
 &= \sum_{n=N}^{N+m} \left(-a_{0n}\omega_n^{-1} \sin(\omega_n t) + b_{0n} \cos(\omega_n t) + d_n \int_0^t \cos(\omega_n(t - \tau)) M(\tau) d\tau \right)^2 \leq \\
 &\leq 3 \sum_{n=N}^{N+m} \left(a_{0n}^2 \omega_n^{-2} \sin^2(\omega_n t) + b_{0n}^2 \cos^2(\omega_n t) + d_n^2 \left(\int_0^t \cos(\omega_n(t - \tau)) M(\tau) d\tau \right)^2 \right) \leq \\
 &\leq 3 \sum_{n=N}^{N+m} \left(a_{0n}^2 \omega_n^{-2} + b_{0n}^2 + d_n^2 \|M(\tau)\|_{L_2(0, T)}^2 \right). \quad (49)
 \end{aligned}$$

В (49) использовано неравенство $2ab \leq a^2 + b^2$. Аналогично для

$$\begin{aligned}
 \|u_{N+m}(x, t) - u_N(x, t)\|_B^2 &= (B(u_{N+m}(x, t) - u_N(x, t)), (u_{N+m}(x, t) - u_N(x, t)))_H = \\
 &= \sum_{n=N}^{N+m} \left(a_{0n}\omega_n^{-1} \cos(\omega_n t) + b_{0n} \sin(\omega_n t) - d_n \int_0^t \sin(\omega_n(t - \tau)) M(\tau) d\tau \right)^2 \leq \\
 &\leq 3 \sum_{n=N}^{N+m} \left(a_{0n}^2 \omega_n^{-2} \cos^2(\omega_n t) + b_{0n}^2 \sin^2(\omega_n t) + d_n^2 \left(\int_0^t \sin(\omega_n(t - \tau)) M(\tau) d\tau \right)^2 \right) \leq \\
 &\leq 3 \sum_{n=N}^{N+m} \left(a_{0n}^2 \omega_n^{-2} + b_{0n}^2 + d_n^2 \|M(\tau)\|_{L_2(0, T)}^2 \right).
 \end{aligned}$$

В результате для величины (48) справедлива оценка

$$\|u_{N+m}(x, t) - u_N(x, t)\|_{H_1(Q_T)}^2 \leq 6 \sum_{n=N}^{N+m} \left(a_{0n}^2 \omega_n^{-2} + b_{0n}^2 + d_n^2 \|M(\tau)\|_{L_2(0, T)}^2 \right). \quad (50)$$

Правая часть (50) в силу (42)–(44) может быть сделана меньше любого $\varepsilon > 0$ за счет выбора N для любого m . Это означает, что последовательность частичной суммы $u_N(x, t)$ ряда (46) фундаментальна в $H_1(Q_T)$. Существование обобщенного решения задачи (17)–(18) доказано. При этом, как следует из (42)–(44) и (48), (50), для обобщенного решения $u(x, t)$ справедлива оценка

$$\|u(x, t)\|_{H_1(Q_T)}^2 \leq C (\|u_0\|_B^2 + \|u_1\|_A^2 + \|g(x)\|_H^2 \|M(t)\|_{L_2(0, T)}^2), \quad (51)$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная. Неравенство (51) доказывает корректность поставленной задачи.

Построим теперь обобщенное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (5). Пусть функция

$$p(t) \in W_2^1(0, T), \quad p(T) = 0. \quad (52)$$

Умножим теперь уравнение (1) на $p(t)$ и проинтегрируем по $t \in [0, T]$:

$$J_* \int_0^T \ddot{\theta}(t)p(t)dt + \int_0^T \left(\int_0^1 (x+a)y_{tt}(x,t)dx + \varepsilon \int_0^1 \phi_{tt}(x,t)dx \right) p(t)dt = \int_0^T M(t)p(t)dt. \quad (53)$$

Вычисляя интегралы, входящие в (53), используя формулу интегрирования по частям, будем иметь

$$J_* \int_0^T \dot{\theta}(t)\dot{p}(t)dt + J_*\theta_1 p(0) + \int_0^1 (x+a)y_1(x)dx \cdot p(0) + \varepsilon \int_0^1 \phi_1(x)dx \cdot p(0) + \\ + \int_0^T \left[\int_0^1 (x+a)y_t(x,t)dx + \varepsilon \int_0^1 \phi_t(x,t)dx \right] \dot{p}(t)dt + \int_0^T M(t)p(t)dt = 0,$$

что эквивалентно

$$\int_0^T \left(J_*\dot{\theta}(t) + (x+a, y_t(x,t))_{L_2} + \varepsilon(1, \phi_t(x,t))_{L_2} \right) \dot{p}(t)dt + \\ + (J_*\theta_1 + (x+a, y_1(x))_{L_2} + \varepsilon(1, \phi_1(x))_{L_2})p(0) + \int_0^T M(t)p(t)dt = 0. \quad (54)$$

Под обобщенным решением уравнения (1) будем понимать функцию $\theta(t) \in W_2^1(0, T)$, $\theta(0) = \theta_0$, удовлетворяющую интегральному равенству (54) для любой функции $p(t)$ вида (52).

Легко видеть, что искомым решением уравнения (1) будет функция

$$\theta(t) = \theta_0 + \theta_1 t + J_*^{-1} \left[(x+a, y_0(x))_{L_2} + \varepsilon(1, \phi_0(x))_{L_2} + ((x+a, y_1(x))_{L_2} + \varepsilon(1, \phi_1(x))_{L_2})t - (x+a, y(x,t))_{L_2} - \varepsilon(1, \phi(x,t))_{L_2} + \int_0^t (t-t_1)M(t_1)dt_1 \right] = \\ = \theta_0 + \theta_1 t + \varepsilon^{-1} J_0^{-1} ((g(x), u_0(x))_A + (g(x), u_1(x))_A t - (g(x), u(x,t))_A) + \\ + J_*^{-1} \int_0^t (t-t_1)M(t_1)dt_1. \quad (55)$$

Сформулируем доказанное в следующем виде.

Утверждение 5. Обобщенное решение задачи (17), (18) (начально-краевой задачи (1)-(5)) для $(x, t) \in Q_T$ при $M(t) \in L_2(0, T)$ с начальными условиями вида (37) существует, единственно, задается формулами (46), (54) и удовлетворяет оценке (51).

Список литературы

1. Кубышкин Е.П. Уравнения движения одной механической системы, моделирующей динамику манипуляционного робота // Математика, кибернетика, информатика: труды международной научной конференции памяти А. Ю. Левина. Ярославль, ЯрГУ, 2008. С. 100 – 113.

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.

A Generalized Solution of an Initial Boundary Value Problem Arising in the Mechanics of Discrete-Continuous Systems

Kubyshkin E. P., Khrebtyugova O. A.

Keywords: generalized solution, well-posedness of the problem, discrete-continuum mechanical systems, Timoshenko beam, analytical solution formula

In this paper we define a generalized solution of an initial boundary value problem for a linear system of differential equations with one ordinary differential equation and two partial differential equations (a hybrid system of differential equations). We have proved the existence theorem for a generalized solution, its uniqueness, the correctness of the problem. An analytical formula for the solution is found. Such a system of differential equations arises in the study of discrete-continuum mechanical systems.

Сведения об авторах:

Кубышкин Евгений Павлович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования;
Хребтюгова Ольга Анатольевна,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
аспирант.