Модел. и анализ информ. систем. Т. **19**, № **6** (2012) 107–111

УДК 513.8

О некоторых следствиях теоремы о трансверсалях

Дольников В. Л.[1]

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

e-mail: dolnikov@uniyar.ac.ru

получена 15 сентября 2012

Ключевые слова: выпуклое множество, транслят, звёздное множество, трансверсаль

Рассматриваются теоремы, являющиеся обобщениями известных следствий теоремы Хелли.

В этой статье будут приведены результаты, которые получаются из теоремы о трансверсалях [1, 2, 3] (см. ниже Теорема 1) путем «экстраполяции» классических следствий теоремы Хелли.

Данная теорема является обобщением теоремы Хелли и теоремы Борсука – Улама и в [3] приведены теоремы, которые являются «интерполяцией» между следствиями из этих теорем.

Подобные результаты, которые бы доказывались с помощью теоремы Борсука – Улама, не были ранее отмечены (см. например, [4, 5, 6]).

Приведём для полноты изложения теорему о трансверсалях.

Определение. m-трансверсалью семейства выпуклых множеств P в $\mathbb{R}^d$ называется m-мерная плоскость, пересекающая все множества из P.

Определение. Будем говорить, что семейство множеств P имеет свойство Π_k или $P \in \Pi_k$, если любые $\leq k$ множеств семейства P имеют непустое пересечение, и свойство Π ($P \in \Pi$), если пересечение всего семейства непусто.

Теорема 1. *Пусть в* $\mathbb{R}^d$ *даны* m *таких семейств* P_i, $|P_i| \geq d - m + 2$, *выпуклых компактных множеств в* $\mathbb{R}^d$, $1 \leq i \leq m \leq d$, *что* $P_i \in \Pi_{d-m+2}$ *для всех* i, $1 \leq i \leq m$. *Тогда семейство* $P = \bigcup_{i=1}^{m} P_i$ *имеет* $(m-1)$*-трансверсаль.*

[1]Работа поддержана грантом Правительства РФ по постановлению № 220, договор №11.G34.31.0053, грантом РФФИ №10-01-00096.

Очевидно, что при $m = 1$ из теоремы 1 следует теорема Хелли. Легко видеть, что при $m = d$ из неё следует теорема Борсука – Улама.

Следующие два результата «экстраполируют» теоремы Винчензини и Кли [7], [8] и совпадают с ними при $m = 1$.

Для их формулировки рассмотрим выпуклый компакт $V_0 \in \mathbb{R}^d$ и m семейств $P_1, \ldots, P_m$ выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$. Пусть все множества семейств $P_1, \ldots, P_m$ — компактны (или все семейства $P_1, \ldots, P_m$ — конечны). Предположим также, что $m \leq d$ и $|P_i| \geq d - m + 2,\ 1 \leq i \leq m$; тогда верна

Теорема 2. *Если в любом семействе P_i для всех подсемейств $Q \subseteq P_i$, $|Q| \leq d - m + 2$, существует транслят*[2] *множества V_0, который:*

(1) *пересекает все множества семейства Q;*

(2) *или покрывает все множества семейства Q;*

(3) *или содержится во всех множествах семейства Q,*

то существует такая $(m-1)$-мерная плоскость π, что для всех $V \in P = \bigcup_{i=1}^m P_i$, имеем:

(1) $(V_0 + \pi) \bigcap V \neq \emptyset$;

(2) $\bigcup_{V \in P} V \subseteq (V_0 + \pi)$;

(3) $V_0 + x \subseteq V$ *для некоторого* $x \in \pi$.

Доказательство. Доказательство этого результата подобно доказательству из [4] теорем Винчензини и Кли, только вместо теоремы Хелли используются теорема 1. Сопоставим каждому множеству $V \in P = \bigcup_{i=1}^m P_i$ – множество

$$V' = \{x \in \mathbb{R}^d : (x + V_0) \sim V\},$$

где отношение $\sim$ означает «пересекает», «покрывает» или «содержится в»; а каждому семейству P_i — семейство $P'_i = \{V'\}$, $V \in P_i$.

Легко видеть, что все множества V' — выпуклы, а из условий теоремы следует, что для всех i, $1 \leq i \leq m$, семейство $P'_i \in \Pi_{d-m+2}$. Поэтому, по теореме о трансверсалях, семейство $P' = \bigcup_{i=1}^m P'_i$ имеет $(m-1)$-трансверсаль π, а тогда для всех $V \in P = \bigcup_{i=1}^m P_i$ имеем: (1) $(V_0 + \pi) \bigcap V \neq \emptyset$; (2) или $\bigcup_{V \in P} V \subseteq (V_0 + \pi)$; (3) или $V_0 + x \subseteq V$ для некоторого $x \in \pi$.

Теорема доказана.

Также через $L(V)$ обозначим образ при ортогональной проекции множества V на подпространство L.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 существуют такие $(d - m + 1)$-мерное подпространство L и вектор $x \in L$, что $x + L(V_0) \sim L(V)$ для всех $V \in P = \bigcup_{i=1}^m P_i$.*

Доказательство. Для доказательства следствия нужно взять ортогональное дополнение $\pi^\perp = L$ к $(m-1)$-мерной плоскости π, существование которой гарантируется теоремой 1, и вектор $x \in L \bigcap \pi$.

Приводимый ниже результат обобщает теорему Минковского, который рассмотрел случай $m = 1$ [9] (см., например, [4, с. 30]).

[2]Транслятом множества V из линейного пространства L будем называть множество вида $x + V$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Теорема 3. *Если $V_1, \dots, V_m$, $m \leq d$, – выпуклые компакты в $\mathbb{R}^d$, то существует такая $(m-1)$-мерная плоскость π и точка $z \in \pi^\perp$, что для каждой проходящей через z хорды $[u, v]$ множества $\pi^\perp(V_i)$ имеем*

$$\frac{\|z-u\|}{\|v-u\|} \leq \frac{d-m+1}{d-m+2}.$$

Доказательство. Для фиксированной точки $x \in V_i$ рассмотрим множество

$$V_i(x) = x + \frac{d-m+1}{d-m+2}(V_i - x) \quad \text{и покажем, что} \quad \bigcap_{j=1}^{d-m+2} V_i(x_j) \neq \emptyset$$

для всех наборов $\{x_j\}_{1 \leq j \leq d-m+2} \subseteq V_i$. Пусть

$$y = \frac{1}{d-m+2} \sum_{j=1}^{d-m+2} x_j; \quad \text{докажем, что} \quad y \in \bigcap_{j=1}^{d-m+2} V_i(x_j).$$

Заметим, что при всех j имеем

$$y = x_j + \frac{d-m+1}{d-m+2} \frac{1}{d-m+2} \sum_{l \neq j} (x_l - x_j)) \in x_j + \frac{d-m+1}{d-m+2}(V_i - x_j) = V_i(x_j).$$

Отсюда следует, что все m семейств $P_i = \{V_i(x)\}_{x \in V_i} \in \Pi_{d-m+2}$, $1 \leq i \leq m$. Тем самым существует $(m-1)$-трансверсаль π семейства $P = \bigcup_{i=1}^m P_i$.

При ортогональном проектировании на $\pi^\perp$ образом плоскости π будет некоторая точка $z \in \pi^\perp$ и при этом

$$z \in \bigcap_{i=1}^{m} \bigcap_{x \in V_i} \pi^\perp(V_i(x)).$$

Очевидно также, что для всех i, $1 \leq i \leq m$, $z \in \pi^\perp(V_i)$. Возьмем хорду $[u, v]$ множества $\pi^\perp(V_i)$, проходящую через точку z. Так как

$$z \in \bigcap_{x \in V_i} \pi^\perp(V_i(x)), \quad \text{то} \quad z \in u + \frac{d-m+1}{d-m+2}([u, v] - u).$$

Отсюда получается, что для некоторого $t \in [0, 1]$ имеем

$$z = u + \frac{d-m+1}{d-m+2} t(v-u) \Longrightarrow \frac{\|z-u\|}{\|v-u\|} \leq t \frac{d-m+1}{d-m+2} \leq \frac{d-m+1}{d-m+2}.$$

Теорема доказана.

Теореме 4 можно дать следующую эквивалентную форму. Возьмем выпуклый компакт V с непустой внутренностью в $\mathbb{R}^d$. Пусть π — гиперплоскость, проходящая через внутреннюю точку V, а π_1 и π_2 – параллельные ей опорные гиперплоскости. Пусть $\lambda(\pi, V)$ – величина отношения расстояний между гиперплоскостями π и π_1 и π и π_2, которая ≤ 1.

Теорема 4. *Если $V_1, \dots, V_m$, $m \le d$, — выпуклые компакты с непустой внутренностью в $\mathbb{R}^d$, то существует такая $(m-1)$-мерная плоскость π_1, что для всех гиперплоскостей $\pi \supset \pi_1$ и для всех i, $1 \le i \le m$, имеем $\lambda(\pi, V_i) \le \frac{d-m+1}{d-m+2}$.*

Замечание. Если есть такая точка $x \in V$, что для всех гиперплоскостей $\pi \ni x$ выполняется равенство $\lambda(\pi, V) = 1$, то известно, что V — центрально-симметрично, а x является его центром симметрии [10]. Таким образом, если для каждого множества $V_1, \dots, V_m$ существует такая $(m-1)$-мерная плоскость π_i, что для всех гиперплоскостей $\pi \supset \pi_i$, выполняется равенство $\lambda(\pi, V_i) = 1$, то существует такое $(d-m+1)$-мерное подпространство $\pi^\perp$ и такой вектор $x \in \pi^\perp$, что все множества $\pi^\perp(V_i)$ центрально-симметричны относительно x.

Приведем далее обобщение классической теоремы Красносельского о звездных множествах (см., например, [4]).

Определение. Если u и v – точки множества $V \subset \mathbb{R}^n$, то выражение *u видна из v в множестве V* означает, что отрезок $[u,\ v] \subset V$. Множество называется *звездным*, если в V есть точка, из которой видны все остальные.

Теорема 5. *Пусть $V_1, \dots, V_m$, $m \le d$, — бесконечные компакты в $\mathbb{R}^d$ и для всех i, $1 \le i \le m$, и всех $V \subseteq V_i$, $|V| \le d-m+2$, существует точка $x_V \in V_i$, из которой видны все точки V. Тогда существует такая $(m-1)-$мерная плоскость π, что множество $\bigcup_{i=1}^m V_i$ — звездно относительно π.*

Доказательство. Для каждой точки $x \in V_i$, положим,

$$St(x, V_i) = \{y \in V_i : [x, y] \subseteq V_i\}.$$

Из условия теоремы следует, что $\{St(x, V_i)\}_{x \in V_i} \in \Pi_{d-m+2}$ при всех i, $1 \le i \le m$. Следовательно, $\{\operatorname{conv} St(x, V_i)\}_{x \in V_i} \in \Pi_{d-m+2}$. По теореме 1 существует $(m-1)$-трансверсаль π у семейства

$$\bigcup_{i=1}^m \{\operatorname{conv} St(x, V_i)\}_{x \in V_i}.$$

Далее возьмем подпространство $\pi^\perp$ и точку $y \in \pi \bigcap \pi^\perp$. Тогда имеем

$$y \in \pi^\perp \bigcap_{x \in V_i} \operatorname{conv}(St(x, V_i)) = \bigcap_{x \in V_i} \operatorname{conv} \pi^\perp(St(x, V_i)) \subseteq \bigcap_{x \in V_i} \operatorname{conv}(St(\pi^\perp(x), \pi^\perp(V_i)).$$

Из доказательства теоремы Красносельского следует (см. [4, с. 27]), что

$$y \in \bigcap_{x \in V_i} \pi^\perp(St(x, V_i)).$$

Поэтому $St(x, V_i) \bigcap \pi \ne \emptyset$ для любого $x \in V_i$ и множество $\bigcup_{i=1}^m V_i$ звёздно относительно π. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Дольников В. Л.* О трансверсалях семейств выпуклых множеств // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль, 1981. С. 30 – 36.

2. *Дольников В. Л.* Обобщенные трансверсали семейств множеств в $\mathbb{R}^n$ и связи между теоремами Хелли и Борсука // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297, №4. С. 777 – 780.

3. *Дольников В. Л.* Обобщенные трансверсали семейств множеств в $\mathbb{R}^n$ и связи между теоремами Хелли и Борсука // Матем. сборник. 1993. Т. 184, №2. С. 111 – 132.

4. *Хадвигер Г., Дебруннер Г.* Комбинаторная геометрия на плоскости. М.: Наука, 1965.

5. *Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В.* Теорема Хелли и ее применения. М.: Мир, 1968.

6. *Eckhoff J.* Helly, Radon, and Carathéodory type theorems //Handbook of Convex Geometry, ed. by P.M. Gruber and J.M. Wills. Amsterdam: North-Holland, 1993.

7. *Vincensini P.* Sur une extension d'un theéorem de M.J. Radon sur les ensembles de corps convexes // Bull. Sci Math. France. 1939. V. 67. P. 113 – 119.

8. *Klee V.* The critical set of a convex body // Americ. J. Math. 1953. V. 75. P. 178 – 188.

9. *Minkowski H.* Allgemeine Lebrzätze über konvexe Polyeder // Ges. Ab. 1911. Bd. 2. Berlin. S. 103 – 121.

10. *Грюнбаум Б.* Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. М.: Наука, 1971.

On Some Corollaries of a Transversal Theorem

Dolnikov V. L.

Keywords: convex set, translate, starshaped set , transversal

In this paper we consider theorems which are generalizations of the well-known corollaries of the Helly theorem

Сведения об авторе: Дольников Владимир Леонидович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
доктор физико-математических наук, профессор,
научный сотрудник Международной лаборатории "Дискретная и вычислительная геометрия" им. Б.Н. Делоне.