MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS, VOL. 28, NO. 1, 2021
journal homepage: www.mais-journal.ru

ALGORITHMS

NP-completeness of the Minimum Spanning Tree Problem of a Multiple Graph of Multiplicity $k \geqslant 3$

A. V. Smirnov[1]

DOI: 10.18255/1818-1015-2021-1-22-37

[1]P. G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya, Yaroslavl 150003, Russia.

MSC2020: 05C05, 05C65
Research article
Full text in Russian

Received March 1, 2021
After revision March 10, 2021
Accepted March 12, 2021

In this paper, we study undirected multiple graphs of any natural multiplicity $k > 1$. There are edges of three types: ordinary edges, multiple edges and multi-edges. Each edge of the last two types is a union of k linked edges, which connect 2 or $(k+1)$ vertices correspondingly. The linked edges should be used simultaneously. If a vertex is incident to a multiple edge, it can be also incident to other multiple edges and it can be the common end of k linked edges of some multi-edge. If a vertex is the common end of some multi-edge, it cannot be the common end of another multi-edge.
A multiple tree is a connected multiple graph with no cycles. Unlike ordinary trees, the number of edges in a multiple tree is not fixed. The problem of finding the spanning tree can be set for a multiple graph. Complete spanning trees form a special class of spanning trees of a multiple graph. Their peculiarity is that a multiple path joining any two selected vertices exists in the tree if and only if such a path exists in the initial graph. If the multiple graph is weighted, the minimum spanning tree problem and the minimum complete spanning tree problem can be set. Also we can formulate the problems of recognition of the spanning tree and complete spanning tree of the limited weight. The main result of this article is the proof of NP-completeness of such recognition problems for arbitrary multiple graphs as well as for divisible multiple graphs in the case when multiplicity $k \geqslant 3$. The corresponding optimization problems are NP-hard.

Keywords: multiple graph, multiple tree, divisible graph, spanning tree, complete spanning tree, minimum spanning tree, NP-completeness

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Alexander Valeryevich Smirnov correspondence author	orcid.org/0000-0002-0980-2507. E-mail: alexander_sm@mail.ru PhD, Associate Professor, Department of Theoretical Computer Science.

Funding: This work was supported by P. G. Demidov Yaroslavl State University Project № VIP-016.

For citation: A. V. Smirnov, "NP-completeness of the Minimum Spanning Tree Problem of a Multiple Graph of Multiplicity $k \geqslant 3$", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 28, no. 1, pp. 22-37, 2021.

© Smirnov A. V., 2021
This is an open access article under the CC BY license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ, ТОМ 28, № 1, 2021
сайт журнала: www.mais-journal.ru

ALGORITHMS

NP-полнота задачи о минимальном остовном дереве в кратном графе кратности $k \geqslant 3$

А. В. Смирнов[1]

DOI: 10.18255/1818-1015-2021-1-22-37

[1]Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия.

УДК 519.17, 519.161
Научная статья
Полный текст на русском языке

Получена 1 марта 2021 г.
После доработки 10 марта 2021 г.
Принята к публикации 12 марта 2021 г.

В статье рассматриваются неориентированные кратные графы произвольной натуральной кратности $k > 1$. Кратный граф содержит ребра трех типов: обычные, кратные и мультиребра. Ребра последних двух типов представляют собой объединение k связанных ребер, которые соединяют 2 или $(k + 1)$ вершину соответственно. Связанные ребра могут использоваться только согласованно. Если вершина инцидентна кратному ребру, то она может быть инцидентна другим кратным ребрам, а также она может быть общим концом k связанных ребер мультиребра. Если вершина является общим концом мультиребра, то она не может быть общим концом никакого другого мультиребра.

Кратное дерево определяется как связный кратный граф без циклов. В отличие от обычных деревьев количество ребер в кратных деревьях не фиксировано. Для кратного графа можно поставить задачу поиска его остовного дерева. Среди всех остовных деревьев в кратном графе выделяется особый класс – полные остовные деревья. Кратный путь между любой парой вершин в таком дереве существует тогда и только тогда, когда кратный путь между ними существует в исходном графе. Если кратный граф является взвешенным, то для него можно поставить задачу о минимальном остовном дереве, а также о минимальном полном остовном дереве. Кроме того, можно сформулировать задачи распознавания остовного и полного остовного дерева ограниченного веса. Основным результатом данной статьи является доказательство того, что указанные задачи распознавания являются NP-полными как в случае произвольных, так и в случае делимых кратных графов, если кратность $k \geqslant 3$. Соответствующие оптимизационные задачи являются NP-трудными.

Ключевые слова: кратный граф, кратное дерево, делимый граф, остовное дерево, полное остовное дерево, минимальное остовное дерево, NP-полнота

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Александр Валерьевич Смирнов автор для корреспонденции	orcid.org/0000-0002-0980-2507. E-mail: alexander_sm@mail.ru канд. физ.-мат. наук, доцент, кафедра теоретической информатики.

Финансирование: Работа выполнена в рамках инициативной НИР ЯрГУ им. П. Г. Демидова № VIP-016.

Для цитирования: A. V. Smirnov, “NP-completeness of the Minimum Spanning Tree Problem of a Multiple Graph of Multiplicity $k \geqslant 3$”, *Modeling and analysis of information systems*, vol. 28, no. 1, pp. 22-37, 2021.

© Смирнов А. В., 2021
Эта статья открытого доступа под лицензией CC BY license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Введение

В данной статье мы рассмотрим задачу о *минимальном остовном дереве в кратном графе* в различных вариантах ее постановки. Определение кратного графа кратности $k > 1$ и делимого кратного графа было сформулировано в статье [1]. Там же была рассмотрена задача о кратчайшем кратном пути между двумя вершинами. Кратные графы содержат три типа ребер (обычные, кратные и мультиребра) и являются обобщением обычных графов – по сути, обычный граф имеет кратность $k = 1$. Понятия остовного и полного остовного дерева в кратном графе были введены в статье [2]. Там же приведена постановка задачи о минимальном остовном дереве в кратном графе и о минимальном полном остовном дереве, предложен эвристический алгоритм решения второй задачи, который обобщает известный алгоритм Краскала (см. [3]).

Среди других известных обобщений графов наиболее близкими нам концепциями являются мультиграфы, гиперграфы (см., например, [4, 5]), а также метаграфы (см. [6, 7]). Действительно, как и в мультиграфах, в кратных графах допускается наличие нескольких ребер между парой вершин (набор таких ребер мы будем в дальнейшем называть *кратным ребром*), однако в случае кратного графа количество таких ребер должно быть строго равным k. В кратных графах присутствуют *мультиребра*, соединяющие между собой $(k + 1)$ вершину. Но в отличие от гиперребер гиперграфа, мультиребро представляется в виде k связанных ребер, имеющих один общий конец, причем все эти k ребер должны использоваться согласованно. По сути, понятие мультиребра близко понятию ребра между вершиной и метавершиной в метаграфе. При этом в метаграфе, напомним, метапуть между двумя метавершинами фактически моделирует причинно-следственные связи в некоторой предметной области. Однако в кратном графе используется принципиально иной подход к определению пути: *кратный путь* должен состоять ровно из k обычных путей, проходящих по обычным ребрам, а также по связанным ребрам кратных и мультиребер; при этом пути должны быть согласованы (одинаковы) на кратных и мультиребрах. Поэтому кратный граф нельзя считать частным случаем метаграфа.

Отметим также, что частным случаем кратного графа является кратная сеть (см. [8, 9]). Задача о наибольшем потоке в кратной сети обобщает классическую задачу (см. [10]) и имеет ряд приложений в сфере экономики, управления, финансов. В частности, кратные сети и потоки используются для поиска решения NP-полной задачи целочисленного сбалансирования трех- и четырехмерной матрицы (см., например, [11, 12]).

В данной статье мы рассмотрим сложностной аспект задачи о минимальном остовном дереве в кратном графе и докажем, что при кратности графа $k \geqslant 3$ соответствующая задача распознавания является NP-полной, а исходная оптимизационная задача – NP-трудная. Этот результат будет справедлив как для полных, так и для произвольных остовных деревьев.

1. Кратные графы и деревья. Необходимые определения

Напомним несколько определений, связанных с кратными графами и деревьями, которые ранее были сформулированы в статьях [1, 2].

Определение 1. Кратный граф G *произвольной натуральной кратности* $k > 1$ *– это граф, вершины которого могут соединяться ребрами одного из 3 видов:*

1. Обычное ребро e^o*; множество обычных ребер обозначим через* E^o.
2. Кратное ребро e^k *между двумя вершинами, которое состоит из* k *одинаковых связанных ребер; связанные ребра кратного ребра могут использоваться только согласованно; множество кратных ребер обозначим через* E^k.
3. Связанное ребро e *между двумя вершинами, имеющее один общий конец с другим* $(k - 1)$ *ребром (у любых двух из* k *связанных ребер только один конец является общим); множество связанных*

общей вершиной ребер будем называть мультиребром e^m*; связанные ребра мультиребра могут использоваться только согласованно; множество мультиребер обозначим через* E^m.

Если вершина инцидентна какому-либо кратному ребру, то она может быть инцидентна другим кратным ребрам, а также она может быть общим концом какого-либо мультиребра.

Если вершина является общим концом какого-либо мультиребра, то она не может быть общим концом никакого другого мультиребра.

Если вершина является отдельным концом мультиребра или инцидентна обычному ребру, то она не может быть общим концом мультиребра и не может быть инцидентна кратному ребру.

Множества вершин и ребер графа G обозначим через V и E соответственно. Заметим, что $E = E^o \cup E^k \cup E^m$.

В данной статье рассматриваются только неориентированные кратные графы.

Рис. 1 и 2 иллюстрируют определение 1. В левой части рис. 1 кратное ребро представлено в виде объединения k одинаковых ребер между двумя вершинами, что показано штрихами. Равенство (или согласованность) связанных ребер предполагает, что все характеристики этих ребер (например, вес) одинаковы, и эти ребра могут использоваться только одновременно. Так, если осуществляется проход в определенном направлении по одному из связанных ребер, то одновременно с этим все остальные ребра проходятся в том же самом направлении. Кратное ребро может включаться в какие-либо новые структуры только целиком. В дальнейшем мы будем обозначать кратные ребра жирными линиями, как в правой части рис. 1.

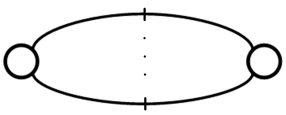

Fig. 1. Multiple edge

Рис. 1. Кратное ребро

В левой части рис. 2 мультиребро $\{x_0, \{x_1, \ldots, x_k\}\}$ представлено в виде объединения k одинаковых ребер, связывающих общую вершину x_0 с k разными вершинами $x_1, \ldots, x_k$. Как и на рис. 1, равенство ребер показано штрихами. Согласованность связанных ребер имеет тот же смысл, что и для кратных ребер. В дальнейшем мультиребра мы будем изображать при помощи расщепляющихся на k частей линий, как в правой части рис. 2.

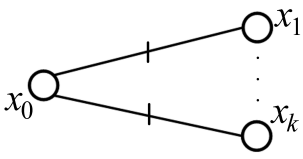

Fig. 2. Multi-edge

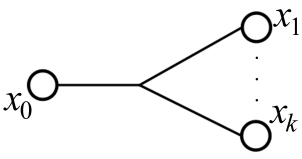

Рис. 2. Мультиребро

Определение 2. Обычной вершиной *назовем вершину, которая инцидентна обычному ребру или является отдельным концом мультиребра.*

Кратной вершиной *назовем вершину, которая инцидентна кратному ребру или является общим концом мультиребра.*

Из определения 1 следует, что множества обычных и кратных вершин не пересекаются. При этом кратная вершина может быть соединена с обычными только посредством мультиребра.

Определение 3. Делимым кратным графом *назовем такой граф, в котором между двумя концами одного мультиребра не существует пути, проходящего только по обычным ребрам.*

При удалении всех мультиребер делимый граф распадется на n компонент связности (связность здесь понимается в том же смысле, что и для обычных графов), каждая из которых содержит только кратные ребра либо только обычные ребра. При этом связанные ребра каждого мультиребра можно пронумеровать от 1 до k таким образом, что каждой компоненте связности, содержащей только обычные ребра, будут инцидентны связанные ребра мультиребер с одинаковыми номерами.

Определение 4. Частью G_i $(i \in \overline{1,k})$ *делимого графа* $G(V,E)$ *назовем подграф, содержащий связанные ребра с номером i всех кратных и мультиребер, а также компоненты связности, состоящие из обычных ребер и инцидентные i-ым связанным ребрам всех мультиребер.*

Каждая часть G_i является обычным графом. При этом возможность выделения частей G_i является особенностью делимых графов. В общем случае получить части G_i не удастся.

Пример 1. Рассмотрим кратный граф кратности 2, представленный на рис. 3. Этот граф содержит 3 обычных ребра, 3 кратных ребра и 4 мультиребра:

$$E^o = \Big\{ \{x_3, x_4\}, \quad \{x_5, x_6\}, \quad \{x_9, x_{10}\} \Big\},$$

$$E^k = \Big\{ \{x_1, x_2\}, \quad \{x_7, x_8\}, \quad \{x_{11}, x_{12}\} \Big\},$$

$$E^m = \Big\{ \{x_2, \{x_3, x_5\}\}, \quad \{x_7, \{x_4, x_6\}\}, \quad \{x_8, \{x_3, x_9\}\}, \quad \{x_{11}, \{x_4, x_{10}\}\} \Big\}.$$

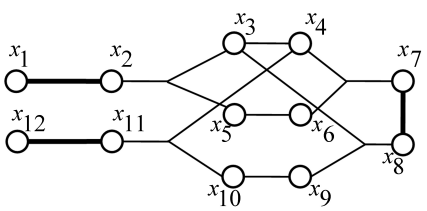

Fig. 3. Divisible graph of multiplicity 2 **Рис. 3.** Делимый граф кратности 2

В этом графе нет ни одного пути, проходящего только по обычным ребрам, который бы соединял вершины x_3 и x_5, x_4 и x_6, x_3 и x_9 или x_4 и x_{10}. Следовательно, граф делимый. Отнесем обычные вершины x_3 и x_4, а также все инцидентные им обычные и связанные ребра к части G_1 графа, а вершины x_5, x_6, x_9, x_{10} и все инцидентные им обычные и связанные ребра – к части G_2. В итоге получим деление на две части графа, показанные на рис. 4. Связанные ребра кратных и мультиребер отмечены на этом рисунке пунктирными линиями.

Дадим теперь определение кратного пути. Основное отличие кратного пути от пути в обычном графе состоит в том, что связанные ребра каждого кратного и мультиребра должны проходиться в этом пути согласованно.

Определение 5. $S(x,y) = \cup_{i=1}^{k} S^i(x,y)$ *является* кратным путем из вершины x в вершину y *в графе* $G(V,E)$, *если выполнены следующие условия:*

1. $S^i(x,y) = \big(\{x, v_1^i\}, \{v_1^i, v_2^i\}, \ldots, \{v_{l_i-1}^i, v_{l_i}^i\}, \{v_{l_i}^i, y\}\big)$, *где* $l_i \geqslant 0$, *– последовательность ребер, представляющая собой обычный (некратный) путь из x в y, где каждое ребро* $\{a,b\}$ *является либо обычным ребром в графе* $G(V,E)$, *либо i-ым связанным ребром кратного или мультиребра. Значения* l_i *и* l_j $(i \neq j)$ *не согласовываются и могут быть как равными, так и различными. Если в путь* $S(x,y)$ *не входит ни одного кратного или мультиребра, то* $S^2(x,y) = S^3(x,y) = \ldots = S^k(x,y) = \varnothing$.

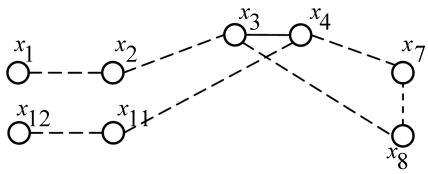

Fig. 4. Partition of a divisible graph

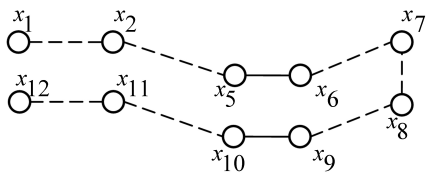

Рис. 4. Части делимого графа

2. *Любая обычная вершина может встретиться в $S^i(x, y)$ несколько раз, то есть $S^i(x, y)$ может содержать циклы.*
3. *Никакая кратная вершина не может встретиться в $S^i(x, y)$ дважды.*
4. *Любое обычное ребро может встречаться в $S^i(x, y)$ несколько раз, причем направления, в которых оно проходится в разных вхождениях, могут не совпадать.*
5. *Обычное ребро, входящее в $S^i(x, y)$, может также входить в любой $S^j(x, y)$, $j \neq i$.*
6. *Все пути $S^i(x, y)$ согласованы (одинаковы) на общей части. Это условие означает, что если связанное ребро какого-то кратного или мультиребра входит в некоторый путь $S^i(x, y)$, то остальные связанные ребра должны входить во все $S^j(x, y)$, $j \neq i$ (по одному связанному ребру в каждый $S^j(x, y)$). При этом порядок вхождения всех кратных и мультиребер во все $S^i(x, y)$ одинаков.*
   Фактически это значит, что если e_1 и e_2 – это два ребра пути $S(x, y)$, каждое из которых либо кратное, либо мультиребро, и в проекции $S^i(x, y)$ связанное ребро из e_1 проходится раньше связанного ребра из e_2, то во всех остальных проекциях $S^j(x, y)$ связанные ребра из e_2 могут проходиться только после связанных ребер из e_1.
7. *Если $S(x, y)$ содержит мультиребро $\{x_0, \{x_1, \dots, x_k\}\}$, проходимое в направлении от общего конца, то он не может содержать никакого другого мультиребра $\{y_0, \{x_1, \dots, x_k\}\}$, проходимого в том же направлении. Аналогичное условие должно выполняться и в случае движения к общему концу.*

Определение 6. *Кратный путь $S(x, y)$ является* кратным циклом, *если $x = y$ и $S(x, y) \neq \varnothing$.*

Пример 2. Проиллюстрируем определение кратного пути. Для этого рассмотрим граф, показанный на рис. 3. Будем искать в этом графе путь $S_1(x_1, x_{12})$. Заметим, что часть G_2 графа (справа на рис. 4) фактически представляет собой обычный (некратный) путь из x_1 в x_{12}:

$$S_1^2(x_1, x_{12}) = \big(\{x_1, x_2\},\ \{x_2, x_5\},\ \underline{\{x_5, x_6\}},\ \{x_6, x_7\},\ \{x_7, x_8\},\ \{x_8, x_9\},\ \underline{\{x_9, x_{10}\}},\ \{x_{10}, x_{11}\},\ \{x_{11}, x_{12}\}\big).$$

Все ребра, кроме подчеркнутых, являются связанными ребрами кратных или мультиребер. Поэтому путь в части G_1 обязательно должен проходить эти кратные и мультиребра в том же порядке. Нетрудно убедиться, что путь $S_1^1(x_1, x_{12})$ строится единственным образом:

$$S_1^1(x_1, x_{12}) = \big(\{x_1, x_2\},\ \{x_2, x_3\},\ \underline{\{x_3, x_4\}},\ \{x_4, x_7\},\ \{x_7, x_8\},\ \{x_8, x_3\},\ \underline{\{x_3, x_4\}},\ \{x_4, x_{11}\},\ \{x_{11}, x_{12}\}\big).$$

Тогда $S_1(x_1, x_{12}) = S_1^1(x_1, x_{12}) \cup S_1^2(x_1, x_{12})$. Заметим, что обычное ребро $\{x_3, x_4\}$ проходится в проекции $S_1^1(x_1, x_{12})$ дважды, но это не противоречит нашему определению кратного пути.

Теперь немного изменим граф, добавив ребро $\{x_3, x_9\}$ (рис. 5). Оно свяжет обычные вершины – концы мультиребра $\{x_8, \{x_3, x_9\}\}$. Следовательно, граф перестанет быть делимым.

Проанализируем возможные кратные пути из x_1 в x_{12}. Заметим, что в новом графе сохраняется путь $S_1(x_1, x_{12})$. Кроме того, добавляется путь $S_2(x_1, x_{12})$, состоящий из двух обычных путей:

$$S_2^1(x_1, x_{12}) = \big(\{x_1, x_2\},\ \{x_2, x_3\},\ \underline{\{x_3, x_4\}},\ \{x_4, x_7\},\ \{x_7, x_8\},\ \{x_8, x_3\},\ \underline{\{x_3, x_9\}},\ \underline{\{x_9, x_{10}\}},\ \{x_{10}, x_{11}\},\ \{x_{11}, x_{12}\}\big).$$

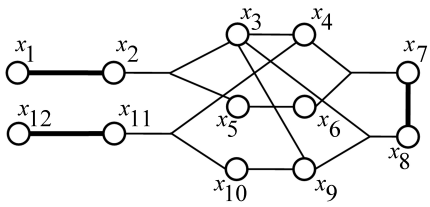

Fig. 5. Multiple graph of multiplicity 2 **Рис. 5.** Кратный граф кратности 2

$$S_2^2(x_1, x_{12}) = \big(\{x_1, x_2\},\ \{x_2, x_5\},\ \underline{\{x_5, x_6\}},\ \{x_6, x_7\},\ \{x_7, x_8\},\ \{x_8, x_9\},\ \underline{\{x_9, x_3\}},\ \underline{\{x_3, x_4\}},\ \{x_4, x_{11}\},\ \{x_{11}, x_{12}\}\big).$$

Здесь обычно ребро $\{x_3, x_9\}$ проходится по разу в каждой проекции, причем в противоположных направлениях, а ребро $\{x_3, x_4\}$ также проходится по разу в каждой проекции, но в одном направлении.

Определение 7. *Кратный граф $G(V, E)$ является* связным*, если одновременно выполнены два условия:*

1. *Кратный путь $S(x, y)$ существует для любых двух кратных вершин $x \in V$, $y \in V$.*
2. *Невозможно выделить такой подграф $G' \subset G$, который будет содержать только обычные ребра, и при этом подграфы G' и $G \setminus G'$ не будут соединены ни одним ребром (обычным ребром или связанным ребром мультиребра).*

В отличие от обычных графов связность кратного графа не предполагает наличие кратных путей из каждой вершины в каждую. Фактически в связном кратном графе между каждой парой вершин должен существовать обычный (некратный) путь, использующий связанные ребра кратных и мультиребер несогласованно, а кратные пути обязательно должны существовать только для пар кратных вершин.

Для делимого кратного графа определение связности может быть переписано в более простой форме, что обусловлено структурой графа.

Определение 8. *Делимый кратный граф $G(V, E)$ является* связным*, если одновременно выполнены два условия:*

1. *Кратный путь $S(x, y)$ существует для любых двух кратных вершин $x \in V$, $y \in V$.*
2. *Каждая из частей G_i является связным (некратным) графом.*

Определение 9. Кратное дерево – *это связный кратный граф без циклов.*

Отметим, что оба графа из примеров 1–2 являются кратными деревьями. В кратном дереве количество ребер может быть различным, что видно из указанных примеров. Подробно данный вопрос обсуждался в [2]. Там же был приведен пример кратного дерева, у которого нет ни одного листа.

2. Минимальное остовное дерево в кратном графе

Поставим несколько задач о минимальных остовных деревьях в кратном графе. Для этого сначала приведем определения остовного и полного остовного дерева в кратном графе (детальное обсуждение этих понятий см. в [2]).

Определение 10. Остовным деревом *в кратном графе $G(V, E)$ называется кратное дерево $T(V, E')$, для которого $E' \subseteq E$.*

Заметим, что в остовном дереве заведомо будут существовать кратные пути $S(x, y)$ для всех кратных вершин x, y. Однако если хотя бы одна из вершин x, y является обычной, существование пути $S(x, y)$ не гарантировано даже в том случае, когда такой путь существует в исходном графе $G(V, E)$.

Определение 11. *Остовное дерево $T(V, E')$ в кратном графе $G(V, E)$ является* полным, *если для любой пары вершин $x \in V$, $y \in V$ кратный путь $S_T(x, y)$ в дереве $T(V, E')$ существует тогда и только тогда, когда существует кратный путь $S_G(x, y)$ в исходном графе $G(V, E)$.*

Отметим, что полное остовное дерево существует в любом кратном графе.

Определение 12. *Целочисленная функция $l(e)$, определенная для всех ребер $e \in E$, является* длиной (весом) ребра *в кратном графе $G(V, E)$, если выполнено следующее:*

1. *$l(e) > 0$ для любого ребра e.*
2. *Если e является кратным или мультиребром, то $l(e_1) = l(e_2) = \ldots = l(e_k)$ и $l(e) = k \cdot l(e_1)$, где $e_1, \ldots, e_k$ – это связанные ребра данного ребра e.*

Тогда *вес кратного графа $G(V, E)$* будет определяться по формуле

$$w(G(V, E)) = \sum_{e \in E} l(e).$$

Поставим две задачи о минимальном остовном дереве.

Задача 1 (минимальное остовное дерево)**.** *В кратном графе $G(V, E)$ требуется найти такое остовное дерево $T^{\min}(V, E')$, что для любого другого остовного дерева $T(V, E'')$ выполнено*

$$w(T^{\min}(V, E')) \leqslant w(T(V, E'')).$$

Задача 2 (минимальное полное остовное дерево)**.** *В кратном графе $G(V, E)$ требуется найти такое полное остовное дерево $T^{\min}_{complete}(V, E')$, что для любого другого полного остовного дерева $T_{complete}(V, E'')$ выполнено*

$$w(T^{\min}_{complete}(V, E')) \leqslant w(T_{complete}(V, E'')).$$

Для удобства будем в дальнейшем обозначать задачи 1 и 2 через ОД и ПОД соответственно. Сопоставим оптимизационным задачам ОД и ПОД две задачи распознавания.

Задача 3 (распознавание остовного дерева ограниченного веса)**.**

УСЛОВИЕ. Дан связный кратный граф $G(V, E)$ с положительными целыми весами ребер и положительное целое $K \leqslant w(G)$.

ВОПРОС. Существует ли в кратном графе $G(V, E)$ остовное дерево $T(V, E')$ такое, что

$$w(T(V, E')) \leqslant K?$$

Задача 4 (распознавание полного остовного дерева ограниченного веса)**.**

УСЛОВИЕ. Дан связный кратный граф $G(V, E)$ с положительными целыми весами ребер и положительное целое $K \leqslant w(G)$.

ВОПРОС. Существует ли в кратном графе $G(V, E)$ полное остовное дерево $T_{complete}(V, E')$ такое, что

$$w(T_{complete}(V, E')) \leqslant K?$$

Эти две задачи распознавания в дальнейшем мы будем обозначать через ОДР и ПОДР соответственно.

Лемма 1. *Задача ПОДР* $\in NP$.

Доказательство. Сначала заметим, что объем входных данных любой индивидуальной задачи ПОДР конечен. Действительно, каждая индивидуальная задача определяется конечным множеством вершин кратного графа и конечным множеством ребер с целочисленными весами, а также целым числом $K \leqslant w(G)$.

Значит, для доказательства того, что ПОДР $\in NP$, достаточно показать, что проверка ответа «да» в любой индивидуальной задаче ПОДР осуществляется за полиномиальное время.

Для проверки того, что некий граф $T(V, E')$ дает ответ «да» индивидуальной задаче ПОДР, нужно выполнить следующие действия:

1. Проверить, что $E' \subseteq E$ (не более $|E'| \cdot |E|$ шагов).
2. Проверить связность графа $T(V, E')$ (полиномиальный алгоритм из статьи [1]).
3. Проверить, что граф $T(V, E')$ не содержит циклов. Для этого требуется незначительно модифицировать алгоритм проверки связности графа с предыдущего шага.
   Напомним, что алгоритм сначала ищет все множества достижимости по обычным ребрам (множества обычных вершин таких, что между ними есть пути, состоящие только из обычных ребер) и все множества достижимости по кратным ребрам (множества кратных вершин таких, что между ними есть пути, состоящие только из кратных ребер). На этом шаге нужно дополнительно потребовать, чтобы в графе T на каждом таком множестве был построен ациклический граф (обычное дерево). Для этого достаточно посчитать количество ребер.
   На следующем шаге алгоритма проверки связности определяется список пар смежных множеств достижимости по кратным ребрам (между этими множествами есть кратный путь, содержащий мультиребра). Очевидно, что если выполнено условие ацикличности множеств достижимости, то кратный цикл в графе существует тогда и только тогда, когда в списке пар есть дубликаты или в какой-то паре элементы одинаковы. Поиск дубликатов в списке – квадратичная относительно длины списка процедура, а длина списка заведомо меньше $|V|$. Поиск пар одинаковых элементов в списке – линейная относительно длины списка процедура.
4. Проверить, что для каждой пары вершин $x \in V$, $y \in V$ кратный путь $S_G(x, y)$ существует тогда и только тогда, когда существует кратный путь $S_T(x, y)$ (для этого нужно не более $|V| \cdot |V - 1|$ раз запустить полиномиальный алгоритм проверки существования пути из статьи [1]).
5. Просуммировать веса всех ребер из E' для проверки того, что $w(T) \leqslant K$.

Все шаги описанной процедуры полиномиальны. Следовательно, ПОДР $\in NP$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Задача ОДР* $\in NP$.

Доказательство аналогично. Единственное отличие – не нужен шаг 4 процедуры проверки, поскольку на нем устанавливается полнота остовного дерева.

Для обоснования NP-полноты задач ПОДР и ОДР мы будем выполнять полиномиальное сведение к ним известной NP-полной *задачи о трехмерном сочетании* (см., например, [13, 14]).

Задача 5 (трехмерное сочетание)**.**

УСЛОВИЕ. Дано множество $M \subseteq I \times J \times P$, *где* I, J *и* P *– попарно непересекающиеся множества и* $|I| = |J| = |P| = q$.

ВОПРОС. Верно ли, что существует множество $M' \subseteq M$ *такое, что* $|M'| = q$ *и каждое значение каждой координаты встречается в* M' *ровно один раз?*

Эту задачу мы будем в дальнейшем обозначать через 3С.

3. NP-полнота задачи о минимальном остовном дереве в кратном графе при $k \geqslant 3$

Теорема 1. *Задача ПОДР для делимого кратного графа $G(V, E)$ кратности $k \geqslant 3$ является NP-полной.*

Доказательство. Задача ПОДР $\in NP$ (лемма 1). Для доказательства NP-полноты покажем, что 3С $\propto$ ПОДР при любой кратности графа $k \geqslant 3$.

Рассмотрим задачу 3С. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что каждое значение каждой координаты встречается в M хотя бы один раз. Действительно, если это не так, то задача 3С заведомо имеет ответ «нет», что может быть установлено путем тривиальной линейной проверки.

Фиксируем кратность графа $k \geqslant 3$. Рассмотрим теперь произвольную индивидуальную задачу 3СМ $\in$ 3С с множеством M указанного вида и выполним ее полиномиальное сведение к индивидуальной задаче ПОДРМ $\in$ ПОДР.

Получим по множеству M граф $G(V, E)$ и число $K \leqslant w(G)$:

1. Каждому элементу $i_s \in I$ ($s \in \overline{1, q}$) сопоставим обычную вершину $I_s \in V$.
2. Каждому элементу $j_s \in J$ ($s \in \overline{1, q}$) сопоставим обычную вершину $J_s \in V$.
3. Каждому элементу $p_s \in P$ ($s \in \overline{1, q}$) сопоставим обычную вершину $P_s \in V$.
4. Каждому элементу $(i_s, j_t, p_u) \in M$ сопоставим кратную вершину $x_{stu} \in V$.
5. Добавим в множество V кратную вершину x_0 и обычные вершины $y_4, \ldots, y_k$ (если $k = 3$, добавляем только x_0).
6. Соединим вершину x_0 с каждой вершиной x_{stu} кратным ребром $\{x_0, x_{stu}\}$ веса k.
7. Соединим каждую вершину x_{stu} с вершинами I_s, J_t, P_u, y_4, $\ldots$, y_k мультиребром $\{x_{stu}, \{I_s, J_t, P_u, y_4, \ldots, y_k\}\}$ веса $k(|M| + 1)$ (если $k = 3$, мультиребро имеет вид $\{x_{stu}, \{I_s, J_t, P_u\}\}$).
8. Установим $K = k|M| + kq(|M| + 1) = k|M|(q + 1) + k$.

Очевидно, что шаги 1–8 реализуют полиномиальную процедуру.

Делимость графа также очевидна. Часть G_1 состоит из всех кратных вершин, обычных вершин $I_1, \ldots, I_q$ и соответствующих связанных ребер между ними. Часть G_2 состоит из всех кратных вершин, обычных вершин $J_1, \ldots, J_q$ и соответствующих связанных ребер между ними. Часть G_3 состоит из всех кратных вершин, обычных вершин $P_1, \ldots, P_q$ и соответствующих связанных ребер между ними. Части G_r ($r \in \overline{4, k}$) состоят из всех кратных вершин, обычной вершины y_r и соответствующих связанных ребер между ними (если $k > 3$).

Между любой парой кратных вершин существуют пути, проходящие только по кратным ребрам (шаг 6 алгоритма сведения). При этом $E^o = \varnothing$, а значит, путей между обычными вершинами быть не может. Однако каждая обычная вершина инцидентна хотя бы одному мультиребру (это следует из того, что в множестве M каждое значение каждой координаты встречается хотя бы один раз, и из шага 7 алгоритма сведения). Следовательно, граф связен.

$E^o = \varnothing$, поэтому $|E^o| = 0$.

$|E^k| = |M|$, а $l(e) = k$ для всех $e \in E^k$ (шаги 4, 6 алгоритма сведения), поэтому $\sum_{e \in E^k} l(e) = k|M|$.

$|E^m| \geqslant q$, а $l(e) = k(|M| + 1)$ для всех $e \in E^m$ (шаги 1–3, 7 алгоритма сведения и вышеуказанное условие для множества M), поэтому $\sum_{e \in E^m} l(e) \geqslant kq(|M| + 1)$.

Собирая полученные соотношения, получаем

$$w(G) = \sum_{e \in E} l(e) = \sum_{e \in E^o \cup E^k \cup E^m} l(e) = \sum_{e \in E^o} l(e) + \sum_{e \in E^k} l(e) + \sum_{e \in E^m} l(e) \geqslant 0 + k|M| + kq(|M| + 1) = K.$$

Таким образом, в результате шагов 1–8 получена корректная индивидуальная задача ПОДРМ для делимого графа выбранной кратности $k \geqslant 3$.

Покажем теперь, что любая индивидуальная задача 3СМ имеет ответ «да» тогда и только тогда, когда соответствующая индивидуальная задача ПОДРМ имеет ответ «да».

Пусть сначала индивидуальная задача 3СМ имеет ответ «да». Возьмем $M' \subseteq M$, которое обеспечивает положительный ответ в задаче 3СМ. Построим по M' полное остовное дерево $T(V, E')$, $E' \subseteq E$ в графе $G(V, E)$ таким образом:

1. $E^k \subseteq E'$, то есть все кратные ребра включаются в E'.
2. Включаем мультиребро $\{x_{stu}, \{I_s, J_t, P_u, y_4, \dots, y_k\}\}$ в E' для всех $(i_s, j_t, p_u) \in M'$.

Заметим, что каждая из вершин I_s $(s \in \overline{1, q})$, J_t $(t \in \overline{1, q})$ и P_u $(u \in \overline{1, q})$ инцидентна ровно одному мультиребру, поскольку $|M'| = q$ и для любой пары наборов $(i_s, j_t, p_u) \in M'$, $(i_{s'}, j_{t'}, p_{u'}) \in M'$ выполнено $s \neq s'$, $t \neq t'$ и $u \neq u'$.

Каждая из вершин $y_4, \dots, y_k$ (при наличии) инцидентна ровно q мультиребрам.

Поскольку $E^k \subseteq E'$, то в графе $T(V, E')$ существует путь между каждой парой кратных вершин, проходящий только по кратным ребрам, как и в исходном графе $G(V, E)$. При этом в графе $T(V, E')$ нет ни одного обычного ребра, как и в графе $G(V, E)$.

Следовательно, граф $T(V, E')$ связен.

Поскольку все кратные ребра инцидентны x_0, а у каждой пары мультиребер графа $T(V, E')$ есть отличие в трех парах отдельных концов и при этом нет ни одного обычного ребра, то кратных циклов в графе $T(V, E')$ быть не может. Следовательно $T(V, E')$ есть остовное дерево графа $G(V, E)$. Так как $E^o = \varnothing$, остовное дерево $T(V, E')$ заведомо полное.

Убедимся, что $w(T) \leqslant K$.

$E' = E^k \cup E^m_T$ $(E^m_T \subseteq E^m)$. Как уже отмечалось, $\sum_{e \in E^k} l(e) = k|M|$.

$|E^m_T| = |M'| = q$, а $l(e) = k(|M| + 1)$ для всех $e \in E^m$, поэтому $\sum_{e \in E^m_T} l(e) = kq(|M| + 1)$.

В итоге

$$w(T) = \sum_{e \in E'} l(e) = \sum_{e \in E^k \cup E^m_T} l(e) = \sum_{e \in E^k} l(e) + \sum_{e \in E^m_T} l(e) = k|M| + kq(|M| + 1) = K$$

и требуемое неравенство выполнено.

Пусть теперь индивидуальная задача ПОДРМ, построенная по множеству M, имеет ответ «да». Возьмем полное остовное дерево $T(V, E')$, приводящее к ответу «да», и покажем, что по нему можно построить множество M', дающее ответ «да» в задаче 3СМ.

Сначала заметим, что исходный граф $G(V, E)$ является деревом. Действительно, между каждой парой вершин существует единственный кратный путь. Он проходит только по кратным ребрам и обязательно содержит вершину x_0. При этом не существует ни одного кратного пути, содержащего мультиребра, поскольку для любых двух мультиребер обязательно найдется пара несовпадающих отдельных концов (в силу построения графа) и между этими несовпадающими концами нет пути по обычным ребрам, так как $E^o = \varnothing$.

Раз $G(V, E)$ – кратное дерево, то любой его связный подграф будет остовным деревом для $G(V, E)$, а поскольку $E^o = \varnothing$ и $G(V, E)$ – делимый граф, это дерево обязательно будет полным (критерий полноты остовного дерева из статьи [2]).

Рассмотрим дерево $T(V, E')$, дающее ответ «да» в задаче. Множество E^k обязательно включается в E', иначе T не будет деревом (при исключении кратного ребра $\{x_0, x_{stu}\}$ пропадет единственный путь между этими кратными вершинами). Значит, $E' = E^k \cup E^m_T$, $E^m_T \subseteq E^m$. Тогда

$$w(T) = \sum_{e \in E'} l(e) = \sum_{e \in E^k \cup E^m_T} l(e) = \sum_{e \in E^k} l(e) + \sum_{e \in E^m_T} l(e) = k|M| + \sum_{e \in E^m_T} l(e) = k|M| + k(|M| + 1)|E^m_T| \leqslant K,$$

$$k|M| + k(|M| + 1)|E^m_T| \leqslant k|M| + kq(|M| + 1),$$

$$|E^m_T| \leqslant q.$$

Покажем, что в последнем соотношении выполняется точное равенство $|E^m_T| = q$.

Заметим, что для связности графа $T(V, E')$ требуется, чтобы каждая из вершин $I_1, \ldots, I_q, J_1, \ldots, J_q, P_1, \ldots, P_q$ была достижима хотя бы по одному мультиребру. Поскольку каждое из мультиребер множества E^m содержит строго по одной вершине I_s, J_t, P_u (шаг 7 процедуры сведения), то таких мультиребер требуется не меньше q, то есть $|E_T^m| \geqslant q$. Совокупность двух неравенств приводит к требуемому равенству.

Раз $|E_T^m| = q$ и кратный граф $T(V, E')$ связен, то каждая из вершин I_s, J_t, P_u инцидентна ровно одному мультиребру из E_T^m. Поэтому множество M' получается так:

$$M' = \left\{ (i_s, j_t, p_u) \mid \{x_{stu}, \{I_s, J_t, P_u, y_4, \ldots, y_k\}\} \in E_T^m \right\}.$$

Каждое значение каждой координаты встречается в M' ровно один раз, следовательно, задача 3СМ имеет ответ «да».

Таким образом, для произвольного фиксированного $k \geqslant 3$ мы получили полиномиальное сведение известной NP-полной задачи 3С к сужению задачи ПОДР для делимого графа. Следовательно, задача ПОДР NP-полна для делимого графа при любой кратности $k \geqslant 3$.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Задача ОДР для делимого кратного графа $G(V, E)$ кратности $k \geqslant 3$ является NP-полной.*

Справедливость данного утверждения следует из того факта, что для полученного в доказательстве теоремы 1 графа $G(V, E)$ любое остовное дерево является полным, а значит, задачи ПОДР и ОДР будут идентичны для этого графа.

Следствие 2. *Задачи ОДР и ПОДР для произвольного кратного графа $G(V, E)$ кратности $k \geqslant 3$ являются NP-полными.*

Данное утверждение следует из того, что делимый кратный граф – частный случай произвольного кратного графа.

Следствие 3. *Оптимизационные задачи ОД и ПОД являются NP-трудными как для произвольного, так и для делимого кратного графа $G(V, E)$ кратности $k \geqslant 3$.*

Следствие 4. *Задачи ОДР и ПОДР являются NP-полными для кратного графа $G(V, E)$ кратности $k \geqslant 3$, у которого $E^o = \varnothing$. Соответствующие оптимизационные задачи ОД и ПОД – NP-трудные.*

Это утверждение следует из того, что при доказательстве теоремы 1 строится граф именно такой структуры. Отметим, что граф из следствия 4 обязательно будет делимым.

Пример 3. Проиллюстрируем процедуру сведения, описанную в доказательстве теоремы. Пусть $q = 3$ и множество M имеет вид

$$M = \left\{ (i_1, j_1, p_1),\ (i_1, j_3, p_2),\ (i_2, j_1, p_3),\ (i_2, j_2, p_1),\ (i_3, j_2, p_1) \right\}.$$

Положим $k = 3$ и будем строить граф кратности 3. Сначала получим множество вершин (шаги 1–5 процедуры сведения):

$$V = \{x_0,\ x_{111},\ x_{132},\ x_{213},\ x_{221},\ x_{321},\ I_1,\ I_2,\ I_3,\ J_1,\ J_2,\ J_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3\}.$$

Добавим кратные ребра (шаг 6):

$$E^k = \Big\{ \{x_0, x_{111}\},\ \{x_0, x_{132}\},\ \{x_0, x_{213}\},\ \{x_0, x_{221}\},\ \{x_0, x_{321}\} \Big\}$$

и установим вес этих ребер равным 3. Затем добавим мультиребра (шаг 7):

$$E^k = \Big\{ \{x_{111}, \{I_1, J_1, P_1\}\},\ \{x_{132}, \{I_1, J_3, P_2\}\},\ \{x_{213}, \{I_2, J_1, P_3\}\},\ \{x_{221}, \{I_2, J_2, P_1\}\},\ \{x_{321}, \{I_3, J_2, P_1\}\} \Big\}$$

и установим их вес равным 18. Наконец, установим $K = 69$ (шаг 8). Полученный граф представлен на рис. 6.

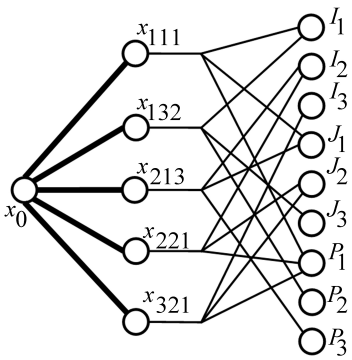

Fig. 6. Multiple graph

Рис. 6. Кратный граф

Нетрудно убедиться, что единственное остовное дерево веса не больше K, которое существует в данном графе, получается исключением из E^m ребер $\{x_{111}, \{I_1, J_1, P_1\}\}$ и $\{x_{221}, \{I_2, J_2, P_1\}\}$ (рис. 7). Это дерево будет иметь вес 69, и каждая обычная вершина инцидентна ровно одному связанному ребру мультиребра. Естественно, это остовное дерево является полным и минимальным в графе. Построим по нему множество M':

$$M' = \Big\{ (i_1, j_3, p_2),\ (i_2, j_1, p_3),\ (i_3, j_2, p_1) \Big\}.$$

Видим, что полученное M' является корректным трехмерным сочетанием, дающим ответ «да» в исходной задаче 3СМ.

Пример 4. Теперь рассмотрим случай, когда индивидуальная задача 3СМ не имеет решения. Пусть $q = 3$ и множество M имеет вид

$$M = \Big\{ (i_1, j_1, p_1),\ (i_1, j_3, p_2),\ (i_2, j_1, p_3),\ (i_2, j_2, p_1),\ (i_3, j_2, p_2) \Big\}.$$

По сравнению с предыдущим примером здесь изменилось значение третьей координаты в последней тройке. Положим $k = 3$ и будем строить граф кратности 3. Сначала получим множество вершин (шаги 1–5 процедуры сведения):

$$V = \{x_0,\ x_{111},\ x_{132},\ x_{213},\ x_{221},\ x_{322},\ I_1,\ I_2,\ I_3,\ J_1,\ J_2,\ J_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3\}.$$

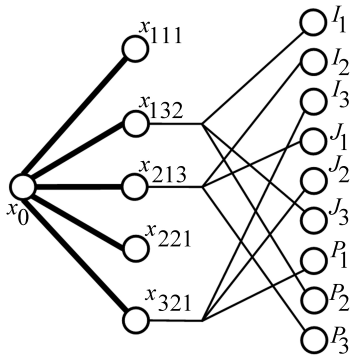

Fig. 7. Spanning tree

Рис. 7. Остовное дерево

Добавим кратные ребра (шаг 6):

$$E^k = \left\{ \{x_0, x_{111}\},\ \{x_0, x_{132}\},\ \{x_0, x_{213}\},\ \{x_0, x_{221}\},\ \{x_0, x_{322}\} \right\}$$

и установим вес этих ребер равным 3. Затем добавим мультиребра (шаг 7):

$$E^k = \left\{ \{x_{111}, \{I_1, J_1, P_1\}\},\ \{x_{132}, \{I_1, J_3, P_2\}\},\ \{x_{213}, \{I_2, J_1, P_3\}\},\ \{x_{221}, \{I_2, J_2, P_1\}\},\ \{x_{322}, \{I_3, J_2, P_2\}\} \right\}$$

и установим их вес равным 18. Наконец, как и в предыдущем примере, установим $K = 69$ (шаг 8). Полученный граф представлен на рис. 8.

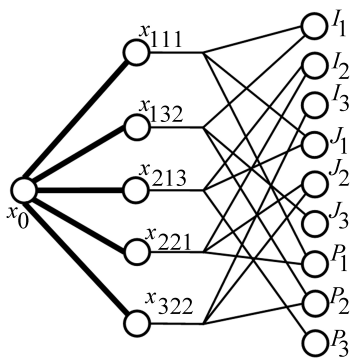

Fig. 8. Multiple graph

Рис. 8. Кратный граф

Нетрудно убедиться, что минимальное остовное дерево в данном графе получается исключением из E^m только одного ребра, например, $\{x_{221}, \{I_2, J_2, P_1\}\}$ (рис. 9). Вес этого дерева равен 87, что больше K, и в нем есть обычные вершины, инцидентные более чем одному ребру (это вершины I_1, J_1 и P_2). Но и задача 3СМ не имеет решения.

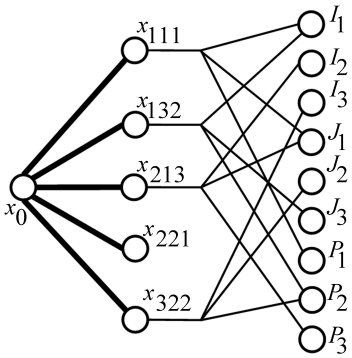

Fig. 9. Spanning tree

Рис. 9. Остовное дерево

Заключение

В данной статье была рассмотрена задача о минимальном остовном дереве в кратном графе в различных вариантах постановки. Для всех вариантов доказано, что при кратности $k \geqslant 3$ задача распознавания остовного дерева ограниченного веса является NP-полной, а соответствующая оптимизационная задача – NP-трудная.

При $k = 1$ кратный граф превращается в обычный, и задача о минимальном остовном дереве разрешима за полиномиальное время. Остается открытым только вопрос о сложности задачи при кратности графа $k = 2$.

References

[1] A. V. Smirnov, “The Shortest Path Problem for a Multiple Graph”, *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 52, no. 7, pp. 625–633, 2018. DOI: 10.3103/S0146411618070234.

[2] A. V. Smirnov, “The Spanning Tree of a Divisible Multiple Graph”, *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 52, no. 7, pp. 871–879, 2018. DOI: 10.3103/S0146411618070325.

[3] J. B. Kruskal, “On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 7, no. 1, pp. 48–50, 1956. DOI: 10.1090/S0002-9939-1956-0078686-7.

[4] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein, *Introduction to Algorithms*, 3rd. The MIT Press, McGraw-Hill Book Company, 2009.

[5] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*. North-Holland Publishing Company, 1973.

[6] A. Basu and R. W. Blanning, “Metagraphs in workflow support systems”, *Decision Support Systems*, vol. 25, no. 3, pp. 199–208, 1999. DOI: 10.1016/S0167-9236(99)00006-8.

[7] A. Basu and R. W. Blanning, *Metagraphs and Their Applications*, ser. Integrated Series in Information Systems. Springer US, 2007, vol. 15.

[8] V. S. Rublev and A. V. Smirnov, “Flows in Multiple Networks”, *Yaroslavsky Pedagogichesky Vestnik*, vol. 3, no. 2, pp. 60–68, 2011.

[9] A. V. Smirnov, “The Problem of Finding the Maximum Multiple Flow in the Divisible Network and its Special Cases”, *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 50, no. 7, pp. 527–535, 2016. DOI: 10.3103/S0146411616070191.

[10] L. R. Ford and D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*. Princeton University Press, 1962.

[11] V. S. Roublev and A. V. Smirnov, "The Problem of Integer-Valued Balancing of a Three-Dimensional Matrix and Algorithms of Its Solution", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 17, no. 2, pp. 72–98, 2010.

[12] A. V. Smirnov, "Network Model for the Problem of Integer Balancing of a Four-Dimensional Matrix", *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 51, no. 7, pp. 558–566, 2017. DOI: 10.3103/S0146411617070185.

[13] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Company, 1979.

[14] R. Karp, "Reducibility among combinatorial problems", in *Complexity of Computer Computations*, R. E. Miller and J. W. Thatcher, Eds., Plenum, 1972, pp. 85–103. DOI: 10.1007/978-1-4684-2001-2_9.