Модел. и анализ информ. систем. Т. **19**, № **6** (2012) 137–147

УДК 517.51+514.17

Совершенные призмоиды и гипотеза о минимальном числе граней центрально-симметричных многогранников

Козачок М.А.[1]

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН;
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: marina.kozachok@gmail.com

получена 15 сентября 2012

Ключевые слова: многогранники, многогранники Ханнера, гипотеза Калаи

Построен класс совершенных призмоидов, и доказаны некоторые их свойства, связанные со знаменитой гипотезой Калаи о минимальном числе граней выпуклого центрально-симметричного многогранника. Доказано, что многогранники Ханнера, на которых согласно гипотезе Калаи достигается минимум общего числа граней у центрально-симметричного многогранника, являются совершенными призмоидами. Также доказано, что любой совершенный призмоид аффинно эквивалентен некоторому 0/1-многограннику, полученному из куба той же размерности.

1. Введение

В теории выпуклых многогранников особую роль играют центрально-симметричные многогранники, т.е. многогранники P, для которых существует центр симметрии O такой, что если $x \in P$, то и $O - x \in P$. Например, параллелоэдры и зонотопы являются центрально-симметричными многогранниками. При $d \geqslant 3$ все правильные d-мерные многогранники, кроме симплекса, также центрально-симметричны. Наиболее известные d-мерные центрально-симметричные многогранники – это куб и дуальный ему кросполитоп (d-мерный аналог октаэдра). Общее число граней у этих многогранников равно 3^d.

Бо́льшая часть результатов о числе граней центрально-симметричных многогранников относится к классам симплициальных и простых многогранников. В 1982 г. Барани и Ловас [1] с помощью обобщения теоремы Борсука–Улама доказали нижнюю оценку для числа вершин простого многогранника с фиксированным числом гиперграней и высказали гипотезу о нижних оценках для числа граней остальных размерностей в зависимости от числа гиперграней простого многогранника. В

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0053.

1987 г. Стэнли доказал обобщение этих оценок. Из результатов Стэнли следовало, что у любого простого (а следовательно, и любого симплициального) центрально-симметричного многогранника хотя бы 3^d непустых граней.

В 1989 г. Г. Калаи сформулировал гипотезу (известную как 3^d-гипотеза) о том, что число граней всех размерностей выпуклого центрально-симметричного многогранника не меньше 3^d (см. [3]). Обозначим f_i — число граней размерности i. Общее число граней многогранника P будем обозначать $f(P)$. Тогда гипотезу Калаи можно записать следующим образом:

Гипотеза Калаи. *Для выпуклого центрально-симметричного многогранника P:*

$$f(P) = \sum_{i=0}^{d} f_i(P) \geqslant 3^d.$$

В случае $d = 3$ доказательство гипотезы легко следует из формулы Эйлера. Для $d = 4$ гипотеза была доказана в 2007 г. Г. Циглером, Р. Саньялом и А. Вернером в [4]. Верна ли 3^d-гипотеза при $d \geqslant 5$, неизвестно.

Помимо куба и кроссполитопа известен целый класс многогранников, на котором достигается оценка 3^d. Это класс *многогранников Ханнера* [2] (куб и кроссполитоп также входят в этот класс). Существуют ли другие центрально-симметричные многогранники, у которых ровно 3^d граней, неизвестно.

Для того, чтобы определить класс многогранников Ханнера, необходимы понятия *прямого произведения* и *кросса* двух многогранников.

Определение 1. Многогранник $P = P_1 \times P_2$ называется *прямым произведением* многогранников $P_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ и $P_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$, если $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} | x \in P_1, y \in P_2\}$.

Определение 2. Пусть $\mathbb{R}^{d_1}$ и $\mathbb{R}^{d_2}$ – трансверсальные подпространства в $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$, то есть $\mathbb{R}^{d_1} \cap \mathbb{R}^{d_2} = \{O\}$. Рассмотрим центрально-симметричные d_1-мерный многогранник $P_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ и d_2-мерный многогранник $P_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ такие, что O – их общий центр симметрии. Тогда $P = conv\{P_1, P_2\}$ назовём кроссом P_1 и P_2. Будем обозначать кросс многогранников $P = P_1 \boxtimes P_2$.

Многогранники Ханнера определяются индуктивно по размерности.

Определение 3. Любой отрезок считается одномерным *многогранником Ханнера*, пусть $d \geqslant 2$, тогда d-мерный многогранник является *многогранником Ханнера*, если его можно представить как прямое произведение или как кросс двух многогранников Ханнера меньшей размерности

Грани центрально-симметричного многогранника, соответствующие друг другу при симметрии, будем называть *антиподальными*.

Приведем определения некоторых важных классов центрально-симметричных многогранников.

Определение 4. Многогранник $P \subset \mathbb{R}^d$ называется *зонотопом*, если его можно представить в виде проекции куба $C_n \subset \mathbb{R}^n$ некоторой размерности.

Очевидно, что зонотоп является центрально-симметричным многогранником, у которого все грани любой размерности центрально-симметричны.

Известно, что выпуклый d-мерный многогранник P называется *призмоидом*, если все его вершины содержатся в паре параллельных $(d-1)$-мерных плоскостей. Например, пирамида, призма, антипризма являются призмоидами. И вообще, d-мерный призмоид P есть выпуклая оболочка $\mathrm{conv}(F \cup F')$ двух многогранников F и F', каждый из которых лежит в одной из двух параллельных гиперплоскостей. При этом размерности $dim\ F$ и $dim\ F'$ не превышают $d-1$, но $dim\ conv\ (F \cup F') = d$.

Нас будут интересовать центрально-симметричные призмоиды. Рассмотрим центрально-симметричный многогранник P и его гипергрань F. Будем называть P *призмоидом над* F, если $P = conv(F \cup F')$, где F' – антиподальная к F. *Боковыми гранями* будем называть все грани, не содержащиеся полностью ни в F, ни в F'.

Определение 5. Центрально-симметричный выпуклый многогранник P называется *совершенным призмоидом*, если он является призмоидом над любой своей гипергранью, то есть для любых его антиподальных гиперграней F и F' выполняется $P = conv(F \cup F')$.

Замечание. Это определение эквивалентно тому, что любая пара антиподальных гиперграней содержит все вершины многогранника P.

В первой части работы будет доказана 3^d-гипотеза для зонотопов. Во второй части описана структура боковых граней произвольного центрально-симметричного призмоида. В третьей части дана аффинная характеристика совершенных призмоидов, а именно доказано, что для любого d-мерного совершенного призмоида существует аффинно эквивалентный ему 0/1-многогранник, который получен из единичного куба той же размерности. Также будет исследована связь класса совершенных призмоидов с классом многогранников Ханнера: доказано, что любой многогранник Ханнера является совершенным призмоидом, и построен контрпример к обратному утверждению.

Автор благодарна Н.П. Долбилину за постановку задачи и помощь в подготовке данной работы; А.Н. Магазинову за идею контрпримера и обсуждение данной работы.

2. Доказательство 3^d-гипотезы для зонотопов

Утверждение 1. *Пусть P – центрально-симметричный многогранник. Пусть F и F' – его антиподальные гиперграни. Тогда $f(P) \geqslant 3f(F)$.*

Доказательство. Каждой i-мерной грани Q, принадлежащей F, сопоставим $(i+1)$-мерную грань многогранника P, которая содержит Q, но не содержится в F. Заметим, что при этом никакая боковая грань не может соответствовать двум разным граням гиперграни F, иначе её размерность была бы не меньше $i+2$. Следовательно, боковых граней многогранника P хотя бы столько же, сколько граней в F. Все грани P – это грани F, грани F' и боковые грани. Следовательно, $f(P) \geqslant 3f(F)$. $\square$

Из предыдущего утверждения легко следует теорема 1.

Теорема 1. *Для любого d-мерного зонотопа P: $f(P) \geqslant 3^d$.*

Доказательство. Докажем по индукции по размерности зонотопа. Двумерные зонотопы являются центрально-симметричными многоугольниками, для которых утверждение теоремы, очевидно, верно. Пусть оно верно для d-мерного зонотопа, докажем для $(d+1)$-мерного зонотопа P. Рассмотрим его произвольную гипергрань. Она также является зонотопом. Следовательно, применяя предположение индукции и утверждение 1, получаем, что $f(P) \geqslant 3 \cdot 3^d = 3^{d+1}$. □

Причем, так как куб является зонотопом, то оценка 3^d в классе зонотопов неулучшаема.

Приведем ещё два простых следствия первого утверждения:

Следствие 1. *Если у пятимерного многогранника P есть центрально-симметричная гипергрань, то $f(P) \geqslant 3^5$.*

Доказательство. В статье "On Kalai's conjectures concerning centrally symmetric polytopes" (R. Sanyal, A. Werner, G. Ziegler; [4]) было доказано, что общее число граней любого центрально-симметричного многогранника хотя бы 3^4. Следовательно, по утверждению 1 получаем, что $f(P) \geqslant 3 \cdot 3^4 = 3^5$. □

Следствие 2. *Пусть P – призма с основаниями F и F'. Тогда $f(P) = 3f(F)$.*

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущего утверждения сопоставим граням основания боковые грани. Остаётся заметить, что соответствие взаимно однозначное, так как любая боковая грань пересекает основание по грани, размерность которой на единицу меньше. Следовательно, в неравенстве $f(P) \geqslant 3f(F)$ из утверждения 1 достигается равенство. □

3. Структура боковых граней призмоида

Следующая теорема описывает структуру боковых граней совершенного призмоида через структуру его основания.

Теорема 2. *Пусть P – призмоид над гипергранью F, то есть $P = conv(F \cup F')$, где F и F' – антиподальные гиперграни. Пусть Q_i и Q_i'' – грани гиперграни F, которые можно заключить в параллельные опорные к F плоскости. Пусть Q_i' — грань многогранника P, антиподальная Q_i''. Тогда для любой пары Q_i, Q_i', построенной указанным образом, $conv(Q_i \cup Q_i')$ является гранью P, и обратно, любая собственная грань P, не принадлежащая F и F', может быть представлена как $conv(Q_i \cup Q_i')$.*

Доказательство. Необходимость. Докажем, что любая собственная грань P, не принадлежащая F и F', может быть представлена как $conv(Q_i \cup Q_i')$.

Рассмотрим какую-то собственную грань R многогранника P, которая полностью не содержится ни в F, ни в F'. Тогда, так как все вершины многогранника принадлежат F и F', грань R пересекается с F и F' по некоторым граням Q_i и

Q_i'. Рассмотрим опорную гиперплоскость $\mathcal{L}$ многогранника P, которая пересекает его по R. Пусть $\mathcal{L}$ пересекает гиперплоскость грани F по $(d-2)$-мерной плоскости $\mathcal{L}_1$, а гиперплоскость грани F' по $(d-2)$-мерной плоскости $\mathcal{L}_2$. Тогда $\mathcal{L}_1$ – опорная гиперплоскость F, пересекающая его по Q_i, а $\mathcal{L}_2$ – опорная гиперплоскость F', пересекающая его по Q_i'. При этом $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ параллельны, так как получены пересечением гиперплоскостью пары параллельных гиперплоскостей. При симметрии относительно центра многогранника P гиперграни F и F' переходят друг в друга, соответственно Q_i' и $\mathcal{L}_2$ перейдут в некоторую грань Q_i'' многогранника F и его опорную гиперплоскость $\mathcal{L}_3$. Из транзитивности параллельности следует, что $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_3$ параллельны. Следовательно, Q_i и Q_i' такие, как требует условие, а так как все вершины R являются вершинами Q_i и Q_i', поскольку в P нет вершин вне F и F', получаем, что $R = conv(Q_i \cup Q_i')$. Необходимость доказана.

Достаточность. Докажем, что $conv(Q_i \cup Q_i')$ является гранью P. Рассмотрим параллельные опорные гиперплоскости $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_3$ к многограннику F, которые пересекают его по Q_i и Q_i''. Также рассмотрим опорную гиперплоскость $\mathcal{L}_2$ к F', содержащую Q_i'. Из симметрии и транзитивности получаем, что $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ – параллельные $(d-2)$-мерные плоскости. Следовательно, существует $(d-1)$-мерная плоскость $\mathcal{L}$, которая их содержит. Заметим, что $\mathcal{L}$ является опорной к многограннику P, следовательно, пересекает его по некоторой грани R. Все вершины P, содержащиеся в $\mathcal{L}$, являются вершинами Q_i или Q_i'. Следовательно, $R = conv(Q_i \cup Q_i')$. Достаточность доказана. □

4. Совершенные призмоиды и многогранники Ханнера

Для $d = 3$ совершенные призмоиды и многогранники Ханнера совпадают (это куб и октаэдр). Возникает естественный вопрос: совпадают ли эти классы в больших размерностях? В этом параграфе мы изучим свойства совершенных призмоидов в контексте именно этого вопроса.

Докажем, что оба класса замкнуты относительно операций взятия дуального, прямого произведения и кросс-операции. При этом класс совершенных призмоидов содержит класс многогранников Ханнера, но не совпадает с ним.

Теорема 3. *Для любого d-мерного совершенного призмоида существует аффинно эквивалентный ему $0/1$-многогранник, который получен из единичного куба той же размерности.*

Доказательство. Выберем $2d$ гиперплоскостей следующим образом: рассмотрим произвольные d линейно независимых гиперграней, которые пересекаются по вершине призмоида, и антиподальные к ним. Выбранные гиперплоскости образуют d-мерный параллелепипед. Докажем, что вершиной призмоида может быть только какая-то из вершин данного параллелепипеда. Рассмотрим произвольную вершину призмоида v. Покажем, что она также является вершиной параллелепипеда. Из выбранных $2d$ гиперплоскостей любая пара параллельных содержит вершину v. Поэтому v лежит в каких-то d линейно независимых гиперплоскостях, следовательно, v –

вершина параллелепипеда. Таким образом, множество вершин совершенного призмоида является подмножеством вершин некоторого d-мерного параллелепипеда. А любой параллелепипед является аффинно эквивалентным единичному кубу. □

Замечание. Из теоремы следует, что для любой размерности существует лишь конечное число совершенных призмоидов.

Теорема 4. *Класс совершенных призмоидов замкнут относительно прямого произведения, кросс-операции и взятия дуального.*

Доказательство. Докажем, что для любых совершенных призмоидов P_1 и P_2 многогранник $P = P_1 \times P_2$ является совершенным призмоидом. Рассмотрим любую гипергрань F многогранника P, тогда $F = F_1 \times P_2$ или $F = P_1 \times F_2$, где F_1 и F_2 – какие-то гиперграни многогранников P_1 и P_2. Пусть, без ограничения общности, $F = F_1 \times P_2$. Обозначим F' – гипергрань P, антиподальную F, F_1' – гипергрань P_1, антиподальную F_1. Многогранники P_1 и P_2 являются совершенными призмоидами, следовательно, все вершины P_1 содержатся в F_1 и F_1'. Вершины P – это прямое произведение всех вершин P_1 и P_2, вершины F – это прямое произведение вершин F_1 и P_2, вершины F' – это прямое произведение вершин F_1' и P_2. Следовательно, все вершины P содержатся в F и F'.

Докажем, что если P является совершенным призмоидом, то и многогранник, дуальный P, является совершенным призмоидом. Заметим, что определение совершенного призмоида эквивалентно следующему:

Для любой вершины v и любых параллельных гиперграней F и F' выполнено либо $v \in F$, либо $v \in F'$, то есть любая пара антиподальных вершин содержится в каждой паре антиподальных гиперграней.

Если в многограннике любая пара антиподальных гиперграней содержит все вершины, то в дуальном для любой пары антиподальных вершин каждая гипергрань будет содержать одну из этих вершин. Соответственно, дуальный многогранник к совершенному призмоиду является полным призмоидом.

В [7] доказано, что

$$P_1 \boxtimes P_2 = (P_1^* \times P_2^*)^*$$
$$P_1 \times P_2 = (P_1^* \boxtimes P_2^*)^*.$$

Из первого из этих равенств следует, что кросс двух совершенных призмоидов также является совершенным призмоидом.

□

Из теоремы 4 вытекает важное следствие:

Теорема 5. *Любой многогранник Ханнера является совершенным призмоидом.*

Доказательство. В одномерном случае утверждение очевидно, так как любой отрезок является и совершенным призмоидом, и многогранником Ханнера. Пусть утверждение верно для всех многогранников Ханнера размерностей $1, 2, \ldots, d$. Докажем, что для $(d+1)$-мерных многогранников Ханнера утверждение тоже верно. По определению любой многогранник Ханнера есть прямое произведение или кросс многогранников Ханнера меньшей размерности, которые по предположению индукции являются совершенными призмоидами. По теореме 4 прямое произведение и кросс совершенных призмоидов также является совершенным призмоидом, следовательно, любой $(d+1)$-мерный многогранник Ханнера есть совершенный призмоид. $\square$

Теорема 6. *Существуют совершенные призмоиды, не являющиеся многогранниками Ханнера.*

Доказательство. Построим в $\mathbb{R}^5$ совершенный призмоид, который не является многогранником Ханнера.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^4$ две параллельные трёхмерные плоскости $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. В первой из них построим тетраэдр $KLMN$, во второй – треугольник ABC такие, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MN}$. Пусть F – четырёхмерный многогранник, который является выпуклой оболочкой построенных семи точек. Рассмотрим точку O вне четырехмерного пространства, содержащего многогранник F, и отразим его относительно O. Вершины и грани, соответствующие друг другу при этой симметрии, будем обозначать «'». Пусть пятимерный многогранник $P = conv(F \cup F')$. Докажем, что P является совершенным призмоидом, но не является многогранником Ханнера.

Для доказательства первого утверждения опишем гиперграни P и докажем, что каждая из них комбинаторно эквивалентна F. Для этого по теореме 2 опишем структуру гиперграней P, пересечение которых с F трёхмерно. Пусть F_i – гипергрань P, а $Q_i = F_i \cap F$ – гипергрань F. Возможны 4 случая:

1. $\dim(Q_1 \cap \mathcal{L}_1) = 3$. Тогда $Q_1 = KLMN$, а опорная гиперплоскость, параллельная $\mathcal{L}_1$, содержит ABC. Поэтому $F_1 = KLMNA_1B_1C_1$, $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{KL}$ $\overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{MN}$.

2. $\dim(Q_i \cap \mathcal{L}_2) = 2$. Две гиперграни F содержат ABC. Если такая гипергрань содержит K, она содержит и L, и наоборот. Аналогично она содержит точки M и N одновременно. Поэтому $Q_2 = ABCKL$, $Q_3 = ABCMN$

   (a) $Q_2 = ABCKL$, $F_2 = ABCKLM_1N_1$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{LK}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{N_1M_1}$.

   (b) $Q_3 = ABCMN$, $F_3 = ABCK_1L_1MN$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{K_1L_1}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MN}$.

3. $\dim(Q_i \cap \mathcal{L}_1) = 2$. Возможны 4 случая:

   (a) $Q_4 \cap \mathcal{L}_1 = KLM$. Грань Q_4 не содержит C, иначе точки B и N лежали бы в разных подпространствах относительно гиперплоскости, содержащей Q_4, так как $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MN}$. Если Q_4 содержит A, то она содержит и B, и наоборот, так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KL}$. Поэтому $Q_4 = KLMAB$. Рассмотрим опорную гиперплоскость многогранника F, параллельную Q_4. Она содержит CN, так как $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CN}$. Поэтому $F_4 = ABC_1KLMN_1$ и $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{LK}$, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{N_1C_1}$.

(b) $Q_5 \cap \mathcal{L}_1 = LMN$. Аналогично случаю 3a получаем, что $Q_5 = LMNBC$ и $F_5 = A_1BCK_1LMN$ и $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{K_1A_1}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MN}$.

(c) $Q_6 \cap \mathcal{L}_1 = KLN$. Если Q_6 содержит A, то она содержит B, и наоборот, так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KL}$. Но гипергрань Q_6 не содержит B, иначе точки C и N лежали бы в разных подпространствах относительно гиперплоскости, содержащей Q_6, так как $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MN}$. Поэтому Q_6 не содержит A и B. Следовательно, $Q_6 = KLNC$. Рассмотрим опорную гиперплоскость многогранника F, параллельную Q_6. Она содержит точки ABM, так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CN}$. So $Q_6 = CKLN$ и $F_6 = A_1B_1CKLM_1N$ и $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{LK}$, $\overrightarrow{B_1M_1} = \overrightarrow{NC}$.

(d) $Q_7 \cap \mathcal{L}_1 = KMN$. Аналогично случаю 3c получаем $Q_7 = AKMN$ и $F_7 = AB_1C_1KL_1MN$; $\overrightarrow{B_1L_1} = \overrightarrow{KA}$ и $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{MN}$.

4. $\dim(Q_i \cap \mathcal{L}_1) < 2$ и $\dim(Q_i \cap \mathcal{L}_2) < 2$. То есть оба пересечения являются отрезками. Это возможно только в случае $Q_8 = ACKN$, $F_8 = AB_1CKL_1M_1N$, $\overrightarrow{M_1B_1} = \overrightarrow{CN}$ и $\overrightarrow{L_1B_1} = \overrightarrow{AK}$

Следовательно, любая гипергрань многогранника P, которая имеет трехмерное пересечение с F, может быть представлена как выпуклая оболочка тетраэдра и треугольника таких, что 2 скрещивающихся ребра тетраэдра параллельны двум сторонам треугольника. Повторив рассуждение, можно получить, что любая гипергрань P может быть представлена таким образом. В частности, у любой гиперграни P ровно 7 вершин. Поэтому P – совершенный призмоид. Заметим, что любая гипергрань многогранника P пересекает либо F, либо F' по хотя бы 4 вершинам. Следовательно, это пересечение либо трехмерно, либо параллелограмм. Но легко видеть, что второй случай невозможен. Поэтому все гиперграни P – это F, F_1, …, F_8 и их антиподы. Следовательно, всего у P 18 гиперграней.

Осталось показать, что P не является многогранником Ханнера. В размерности 5 все многогранники Ханнера известны: это кроссполитоп $C_5^{\triangle}$, бипирамида над бипирамидой над трёхмерным кубом $bip\ bip\ C_3$, бипирамида над призмой над октаэдром $bip\ prism\ C_3^{\triangle}$, призма над четырёхмерным кроссполитопом $prism\ C_4^{\triangle}$ и дуальные к ним. Рассмотрим их f-векторы:

	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4
$C_5^{\triangle}$	10	40	80	80	32
$bip\ bip\ C_3$	12	48	86	72	24
$bip\ prism\ C_3^{\triangle}$	14	54	88	66	20
$prism\ C_4^{\triangle}$	16	56	88	64	18

У многогранника P 14 вершин, следовательно, достаточно убедиться, что он не совпадает с $bip\ prism\ C_3^{\triangle}$. Но у $bip\ prism\ C_3^{\triangle}$ 20 гиперграней. Следовательно, P не совпадает ни с одним из пятимерных многогранников Ханнера. □

Замечание. Посчитаем оставшиеся компоненты f-вектора многогранника P. Каждая гипергрань содержит 8 трехмерных граней и через каждую трехмерную грань проходит две гиперграни, поэтому $f_3 = \frac{18 \cdot 8}{2} = 72$. Ребрами являются все отрезки, соединяющие вершины, кроме диагоналей параллелограммов: $f_1 = \frac{14 \cdot 13}{2} - 4 \cdot 4 - 4 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = 50$. Число двумерных граней можно найти по формуле Эйлера: $f_2 = 2 + f_1 + f_3 - f_0 - f_4 = 92$. Следовательно, $F(P) = 257 > 3^5$.

Замечание. Рассмотрим в d-мерном пространстве ($d > 5$) прямое произведение многогранника P из доказательства предыдущей теоремы и $d-5$ отрезков. Полученный многогранник является совершенным призмоидом (как прямое произведение совершенных призмоидов), но не является многогранником Ханнера, так как его общее число граней $257 \cdot 3^{d-5} > 3^d$.

Теорема 7. *Для $d \leqslant 4$ класс d-мерных совершенных призмоидов и класс d -мерных многогранников Ханнера совпадают.*

Доказательство. При $d = 1$ и $d = 2$ утверждение очевидно: оба класса содержат соответственно только отрезки и только параллелограммы.

В случае $d = 3$ многогранниками Ханнера являются только куб и октаэдр. Теперь рассмотрим все совершенные призмоиды. Гипергрань совершенного призмоида – подмножество вершин квадрата полной размерности, то есть либо треугольник, либо квадрат. В первом случае при построении призмоида над гранью получаем октаэдр, во втором – куб. Таким образом, для трёхмерных многогранников класс Ханнера и класс совершенных призмоидов совпадают.

В случае $d = 4$ многогранники Ханнера – это четырёхмерный куб C_4, бипирамида над трёхмерным кубом $bip\ C_3$ и дуальные к ним кросcполитоп $C_4^{\triangle}$ и призма над кроссполитопом $prism\ C_3^{\triangle}$.

Теперь построим все четырёхмерные совершенные призмоиды. Гиперграни призмоида являются выпуклой оболочкой подмножетва вершин трёхмерного куба. Рассмотрим, какого типа они могут быть. Это подмножество должно удовлетворять двум условиям:

(1) получаемая грань имеет размерность 3;

(2) если провести пару параллельных опорных плоскостей, которые содержат какую-то её двумерную грань, то все вершины грани будут содержаться в этих плоскостях.

Назовем нижнюю грань куба $ABCD$, а полученную из нее параллельным переносом верхнюю – $A_1B_1C_1D_1$. Рассмотрим, как искомая грань F может пересекать верхнюю и нижнюю грани куба. Если пересечения не полной размерности, то грань F может быть только тетраэдром, так как содержит не более четырёх вершин. Пусть F пересекает нижнюю грань куба по треугольнику, тогда верхнюю грань куба F может пересекать:

- по точке. Тогда F – тетраэдр;

- по отрезку. Если отрезок параллелен одной из сторон треугольника, то F – пирамида над квадратом. Если нет, то без ограничения общности можно считать, что треугольник ABC, отрезок B_1D_1. Тогда пара параллельных опорных гиперплоскостей, содержащих грань ACD_1, не содержит вершины B, то есть нарушается условие (2);

- по треугольнику. Если треугольники, по которым F пересекает верхнюю и нижнюю грани куба, можно совместить параллельным переносом, то F – призма над треугольником. Если верхний и нижний треугольники симметричны относительно центра куба, то F – октаэдр. Если треугольники расположены по-другому, то будет нарушено условие (2). Пусть треугольники соответственно ABC и $A_1B_1D_1$. Тогда рассмотрим плоскость ACD_1. Параллельная ей опорная гиперплоскость к F будет содержать только вершину B_1. Следовательно, вершины A_1 и B не содержатся в этой паре параллельных опорных гиперплоскостей;

- по квадрату. Пусть это квадрат $ABCD$ и треугольник $A_1B_1C_1$. Тогда опорная плоскость, параллельная плоскости A_1C_1D, пересекает F только по вершине B. Следовательно, вершины A, C, B_1 не содержатся в этой паре параллельных опорных гиперплоскостей. Таким образом, нарушено условие (2).

Пусть F пересекает нижнюю грань куба по квадрату, тогда верхнюю грань куба F может пересекать:

- по точке. Тогда F – пирамида над квадратом;

- по отрезку. Если отрезок параллелен стороне квадрата, то F – треугольная призма. Пусть отрезок не параллелен стороне. Соответственно F содержит квадрат $ABCD$ и отрезок A_1C_1. Тогда опорная плоскость, параллельная плоскости A_1C_1D, пересекает F только по вершине B. Следовательно, вершины A и C не содержатся в этой паре параллельных опорных гиперплоскостей. Таким образом, нарушено условие (2);

- по треугольнику. Этот случай уже разобран выше;

- по квадрату. Тогда F – это куб.

Таким образом, гипергрань F совершенного призмоида может быть одного из следующих типов: куб, тетраэдр, октаэдр, треугольная призма, четырёхугольная пирамида. Пусть P – призмоид над F.

Если F – куб, то P – четырёхмерный куб C_4. Если F – тетраэдр, то P – кросслитоп $C_4^{\triangle}$. Если F – октаэдр или треугольная призма, то P – призма над кросслитопом $prism\ C_3^{\triangle}$. Если F – четырехугольная пирамида, то P – бипирамида над трёхмерным кубом $bip\ C_3$. Таким образом, любой четырёхмерный совершенный призмоид является многогранником Ханнера.

$\square$

Список литературы

1. Barany I., Lovasz L. *On the numbers of faces of centrally-symmetric simplicial polytopes* // Graphs and Combinatorics. 1987. 3. P. 55–66.

2. Hanner O. *Intersections of translates of convex body* // Math. Scand. 1956. 4. P. 67–89.

3. Kalai G. *The Number of Faces of Centrally-symmetric Polytopes* // Graphs and Combinatorics. 1989. 5.

4. Sanyal R., Werner A., Ziegler G. *On Kalai's conjectures concerning centrally symmetric polytopes*, 2007.

5. Stanley R. *Borsuk's theorem and the number of centrally symmetric polytopes* // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1982. 40. P. 323–329.

6. Ziegler G. *Lectures on Polytopes.* Springer-Verlag, New York, 1995.

7. Panov M.S. *Critical Polyhedra*, Proceedings, Numgrid, 2008.

Perfect Prismatoids and the Conjecture Concerning Face Numbers of Centrally Symmetric Polytopes

Kozachok M.A.

Keywords: polytopes, Hanner polytopes, Kalai's conjecture

In this paper we introduce and study a class of centrally symmetric polytopes – perfect prismatoids – and some its properties related to the famous conjecture concerning face numbers of centrally symmetric polytopes are proved. It is proved that any Hanner polytope is a perfect prismatoid and any perfect prismatoid is affine equivalent to some 0/1-polytope.

Сведения об авторе:
Козачок Марина Александровна,
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН;
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Международная лаборатория
"Дискретная и вычислительная геометрия" им. Б.Н. Делоне