Модел. и анализ информ. систем. Т. **19**, № **2** (2012) 5–18

УДК 512.723

Новые компоненты схемы модулей $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2;-1,2,0)$ стабильных когерентных пучков ранга 2 без кручения на трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$

Заводчиков М.А.

Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского

e-mail: zav-mikhail@yandex.ru

получена 21 июня 2011 года

Ключевые слова: компактификация, схема модулей, когерентный пучок ранга 2 без кручения, трехмерное проективное пространство

Рассматривается схема модулей Гизекера–Маруямы $\mathrm{M} := \mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2;-1,2,0)$ стабильных когерентных пучков без кручения ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ на трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$. Мы определяем два множества пучков $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ в M и доказываем, что их замыкания $\overline{\mathcal{M}}_1$ и $\overline{\mathcal{M}}_2$ – неприводимые компоненты в M размерностей 15 и 19 соответственно.

1. Введение

В настоящей статье рассматривается схема модулей Гизекера–Маруямы $\mathrm{M} := \mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2;-1,2,0)$ стабильных когерентных пучков без кручения ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ на трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$. В статье [1] было показано, что пространство модулей $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,2)$ стабильных расслоений ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$ на $\mathbb{P}^3$ является неприводимым неособым рациональным многообразием размерности 11. В статье [2] описано замыкание $\overline{\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,2)}$ схемы $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,2)$ в схеме модулей M. Кроме того, в [2] были приведены примеры семейств не локально свободных стабильных пучков без кручения ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 0$. До настоящего времени описание всех неприводимых компонент схемы M получено не было.

Мы рассмотрим два множества пучков

$$\mathcal{M}_1 := \{\mathcal{E} \in \mathrm{M} \mid \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E} \simeq \mathbf{k}_x,\ \text{где } x - \text{некоторая точка в } \mathbb{P}^3\} \tag{1}$$

и

$$\mathcal{M}_2 := \{\mathcal{E} \in \mathrm{M} \mid \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E} \simeq \mathbf{k}_x \oplus \mathbf{k}_y,\ \text{где } x \text{ и } y\ -\ \text{различные точки в } \mathbb{P}^3\} \tag{2}$$

в M. Докажем, что их замыкания $\mathrm{M}_1 := \overline{\mathcal{M}}_1$ и $\mathrm{M}_2 := \overline{\mathcal{M}}_2$ – неприводимые компоненты в схеме M, отличные от $\overline{\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,2)}$. Другими словами, основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Замыкания в схеме модулей* M *множеств пучков* $\mathcal{M}_1$ *и* $\mathcal{M}_2$ *являются неприводимыми компонентами размерности 15, 19.*

2. Предварительные вычисления для пучков из M с нульмерными особенностями

Рассмотрим произвольный пучок $\mathcal{E} \in \mathrm{M} \setminus \mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,2)$. Ввиду локальной несвободы пучка $\mathcal{E}$ и условия $c_3(\mathcal{E}) = 0$ рефлексивный пучок $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ не изоморфен пучку $\mathcal{E}$ [3, §1], и точна последовательность:

$$0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{can} \mathcal{E}^{\vee\vee} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{Q} \to 0, \tag{3}$$

где $\mathcal{Q} = \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}$, а $can : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\vee\vee}$ – канонический морфизм, инъективный в силу того, что $\mathcal{E}$ – пучок без кручения. Поскольку $\mathrm{Supp}\mathcal{Q} \subset \mathrm{Sing}\mathcal{E}$ и $\dim \mathrm{Sing}\mathcal{E} \leq 1$ для пучка $\mathcal{E}$ без кручения [4, Следствие на с. 109], то

$$\dim \mathcal{Q} \leq 1. \tag{4}$$

Пусть $\mathcal{E} \in \mathrm{M} \setminus \mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,2)$ и $\dim(\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}) = 0$. Ниже нам будут нужны следующие замечания и предложение.

Замечание 1. *Пусть* $\mathcal{Q}$ *– артинов пучок длины* l *на* $\mathbb{P}^3$. *Тогда* $c_t(\mathcal{Q}) = 1 + 2lt^3$ *[3, Lemma 2.7].*

Так как стабильный пучок $\mathcal{E}$ является $\mu-$стабильным, то, используя [4, Глава II, Лемма 1.2.4(iii)], получаем следующее замечание.

Замечание 2. *Пусть* $\mathcal{E}$ *– стабильный когерентный пучок ранга 2 без кручения с классами Черна* $c_1(\mathcal{E}) = -1$, $c_2(\mathcal{E}) = 2$, $c_3(\mathcal{E}) = 0$ *на* $\mathbb{P}^3$. *Тогда* $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ μ*-стабилен.*

Замечание 3. *Если чистый пучок* $\mathcal{F}$ *на* $\mathbb{P}^3$ μ*-стабилен, то он является стабильным [5, Lemma 1.2.13].*

Из замечания 2 следует, что пучок $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ μ-стабилен, а из замечания 3 получаем, что $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ стабилен. Тем самым верно следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть* $\mathcal{E}$ *– стабильный пучок ранга 2 без кручения с классами Черна* $c_1(\mathcal{E}) = -1$, $c_2(\mathcal{E}) = 2$, $c_3(\mathcal{E}) = 0$ *на* $\mathbb{P}^3$. *Тогда* $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ *стабилен.*

Вычислим многочлен Черна пучка $\mathcal{E}^{\vee\vee}$. По определению $c_t(\mathcal{E}) = 1 - t + 2t^2$. В силу замечания 1 имеем равенство $c_t(\mathcal{Q}) = 1 + 2l(\mathcal{Q})t^3$, где $l(\mathcal{Q})$ – длина артинова пучка $\mathcal{Q}$. Точная тройка (3) дает равенство: $c_t(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = c_t(\mathcal{E})c_t(\mathcal{Q}) = (1 - t + 2t^2)(1 + 2l(\mathcal{Q})t^3)$. Раскрывая скобки, получаем, что

$$c_1(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = -1, \quad c_2(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 2, \quad c_3(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 2l(\mathcal{Q}). \tag{5}$$

Так как $\mathcal{E}^{\vee\vee}$, согласно предложению 1, является стабильным рефлексивным пучком, то из [3, Remark 4.2.0], [3, Example 4.2.3] и из (5), с учетом замечания 1 получаем равенства

$$l(\mathcal{Q}) = 1 \ \text{ и } \ c_1(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = -1, \quad c_2(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 2, \quad c_3(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 2; \tag{6}$$

или

$$l(\mathcal{Q}) = 2 \ \text{ и } \ c_1(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = -1, \ \ c_2(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 2, \ \ c_3(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 4. \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что пучки $\mathcal{E} \in \mathrm{M}$, включающиеся в точную тройку (3), такие, что $\dim \mathcal{Q} = 0$ и $l(\mathcal{Q}) = 1$ (то есть соответствующие равенствам (6)), образуют множество $\mathcal{M}_1$, определенное в (1). Это множество мы рассмотрим в параграфе 3.

Пучки $\mathcal{E} \in \mathrm{M}$, включающиеся в точную тройку (3), такие, что $\dim \mathcal{Q} = 0$ и $\mathcal{Q} = \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}$, где x_1 и x_2 – различные точки в $\mathbb{P}^3$, мы рассмотрим в параграфе 4.

3. Множество $\mathcal{M}_1$

В настоящем параграфе мы рассмотрим множество пучков $\mathcal{M}_1$, определенное в (1), и докажем первый пункт теоремы 1.

Итак, пусть $\mathcal{E}$ – пучок из $\mathcal{M}_1$. В этом случае точная тройка (3) будет иметь вид

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\vee\vee} \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{k}_x \to 0, \tag{8}$$

где x – некоторая точка в $\mathbb{P}^3$. Согласно (5) для пучка $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ имеем равенства

$$c_1(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = -1, \ \ c_2(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 2, \ \ c_3(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 2. \tag{9}$$

Обозначим через R_1 подмножество рефлексивных пучков в схеме модулей $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2;-1,2,2)$. Согласно [6, Theorem 2.5] многообразие R_1 является неприводимым гладким рациональным размерности 11.

Лемма 1. *На $\mathbb{P}^3 \times R_1$ существует универсальное семейство пучков $\mathbb{F}$.*

Доказательство. Согласно [7, Theorem 6.11] на $\mathbb{P}^3 \times R_1$ существует универсальное семейство $\mathbb{F}$ стабильных рефлексивных пучков, если $\delta(H_{\mathcal{E}^{\vee\vee}}) = 1$, где $H_{\mathcal{E}^{\vee\vee}} = H_{\mathcal{E}^{\vee\vee}}(m) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i C_{m+i}^{m}$ – многочлен Гильберта пучка $\mathcal{E}^{\vee\vee}$, а $\delta(H_{\mathcal{E}^{\vee\vee}}) =$ НОД$(a_0, a_1, ..., a_n)$. Проверим, что для многочлена Гильберта пучка $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ выполняется равенство $\delta(H) =$ НОД$(a_0, a_1, ..., a_n) = 1$. Имеем $H(m) = \sum\limits_{i=0}^{3} a_i C_{m+i}^{i} = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + \left(a_1 + \dfrac{3a_2}{2} + \dfrac{11a_3}{6}\right) m + \left(\dfrac{a_2}{2} + a_3\right) m^2 + \dfrac{a_3 m^3}{6}$. С другой стороны, по определению $H_{\mathcal{E}^{\vee\vee}}(m) = \chi(\mathcal{E}^{\vee\vee}(m))$, где $\chi(\mathcal{E}^{\vee\vee}(m))$ – эйлерова характеристика пучка $\mathcal{E}^{\vee\vee}(m)$. Согласно (9) и [3, Theorem 2.2], классы Черна пучка $\mathcal{E}^{\vee\vee}(m)$ принимают значения $c_1(\mathcal{E}^{\vee\vee}(m)) = -1 + 2m$, $c_2(\mathcal{E}^{\vee\vee}(m)) = 2 - m + m^2$, $c_3(\mathcal{E}^{\vee\vee}(m)) = 2$. Воспользуемся известной формулой [3, Theorem 2.3] для эйлеровой характеристики рефлексивного пучка $\chi(\mathcal{E}^{\vee\vee}(m))$, имеем $H_{\mathcal{E}^{\vee\vee}}(m) = \chi(\mathcal{E}^{\vee\vee}(m)) = 2 + C_{2m+2}^{3} - 2(2 - m + m^2) + \dfrac{1}{2}(c_3 + (1 - 2m)(2 - m + m^2))$. Приводя подобные слагаемые, получаем $H_{\mathcal{E}^{\vee\vee}}(m) = \dfrac{13}{6} m + \dfrac{1}{2} m^2 + \dfrac{4}{3} m^3$. Сравнивая этот многочлен с равным ему многочленом $H(m) = \sum\limits_{i=0}^{3} a_i C_{m+i}^{i}$, имеем $a_0 = -3$, $a_1 = 10$, $a_2 = -15$, $a_3 = 8$. Тем самым НОД$(a_0, a_1, ..., a_3) = 1$. Поэтому на $\mathbb{P}^3 \times R_1$ существует универсальное семейство $\mathbb{F}$ стабильных рефлексивных пучков. □

Рассмотрим схему $\mathbb{P}^3 \times R_1$ размерности 14. Пусть $\mathbf{P}(\mathbb{F})$ – проективный спектр пучка $\mathbb{F}$ с естественной проекцией $\pi : \mathbf{P}(\mathbb{F}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^3 \times R_1$ и $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathbb{F})}(1)$ – пучок Гротендика на нем. Проекции $id \times \pi : \mathbb{P}^3 \times \mathbf{P}(\mathbb{F}) \to \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times R_1$, $p_{12} : \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times R_1 \to \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ и вложение $\mathbb{P}_\Delta \to \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$, где $\mathbb{P}_\Delta$ – диагональ в $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$, определяют подмногообразие $\mathbf{P}(\mathbb{F})_\Delta := (id \times \pi)^{-1} \circ p_{12}^{-1}(\mathbb{P}_\Delta)$ в $\mathbb{P}^3 \times \mathbf{P}(\mathbb{F})$. На $\mathbf{P}(\mathbb{F})$ существует естественный эпиморфизм $\pi^*\mathbb{F} \xrightarrow{ev} \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathbb{F})}(1) \to 0$. Пусть $\mathbb{E}$ – ядро композиции $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \pi^*\mathbb{F} \xrightarrow{ev} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{F})}(1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{F})_\Delta}(1) \to 0$. По определению ограничение $\mathbb{E}|_{\mathbb{P}^3 \times \{p\}}$ пучка $\mathbb{E}$ на $\mathbb{P}^3 \times \{p\}$, где p – точка из $\mathbf{P}(\mathbb{F})$, есть пучок $\mathcal{E}_p \in \mathcal{M}_1$ на $\mathbb{P}^3$, где $\mathcal{M}_1$ – множество пучков, определенное в (1). И любой пучок $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_1$ получается таким образом. Поэтому имеем сюръективное отображение $f : \mathbf{P}(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}$: $p = ([\mathcal{F}], x, < \epsilon : \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathbf{k}_x >) \mapsto [\mathcal{E} = \ker(\mathcal{F} \overset{\epsilon}{\twoheadrightarrow} \mathbf{k}_x)]$, где $\mathcal{F}$ – рефлексивный пучок из R_1, $x \in \mathbb{P}^3$, $< \epsilon : \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathbf{k}_x >$ – класс пропорциональности эпиморфизма ϵ, а $\mathcal{E}$ – пучок из $\mathcal{M}_1$. Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Сюръекция $f : \mathbf{P}(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}$ является биекцией на свой образ $\mathcal{M}_1$.*

Доказательство. Докажем инъективность отображения f. Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ – пучки из множества $\mathcal{M}_1$. Положим $\mathcal{F}_1 := \mathcal{E}_1^{\vee\vee}$, $\mathcal{F}_2 := \mathcal{E}_2^{\vee\vee}$ и $\mathcal{F}_1/\mathcal{E}_1 \simeq \mathbf{k}_{x_1}$ и $\mathcal{F}_2/\mathcal{E}_2 \simeq \mathbf{k}_{x_2}$, где x_1 и x_2 – точки в $\mathbb{P}^3$. Пусть $y_1 = ([\mathcal{F}_1], x_1, < \mathcal{F}_1 \overset{\epsilon_1}{\twoheadrightarrow} \mathbf{k}_{x_1} >)$ и $y_2 = ([\mathcal{F}_2], x_2, < \mathcal{F}_2 \overset{\epsilon_2}{\twoheadrightarrow} \mathbf{k}_{x_2} >)$ – различные точки в $\mathbf{P}(\mathbb{F})$. Рассмотрим возможные случаи.
1) Если $[\mathcal{F}_1] \neq [\mathcal{F}_2]$, то очевидно, что и $[\mathcal{E}_1] \neq [\mathcal{E}_2]$.
2) Если $[\mathcal{F}_1] = [\mathcal{F}_2]$, но $x_1 \neq x_2$, то также очевидно, что $[\mathcal{E}_1] \neq [\mathcal{E}_2]$.
3) $[\mathcal{F}_1] = [\mathcal{F}_2]$, $x_1 = x_2$, но $< \epsilon_1 > \neq < \epsilon_2 >$. Предположим, что $f(y_1) = f(y_2)$, то есть $\mathcal{E}_1 \simeq \mathcal{E}_2$. Так как $\mathcal{F}_i = \mathcal{E}_i^{\vee\vee}$, $i = 1, 2$, то из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{E}_1 \arrow[r, "can"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathcal{F}_1 \arrow[r, "\epsilon_1"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathbf{k}_{x_1} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E}_2 \arrow[r, "can"] & \mathcal{F}_2 \arrow[r, "\epsilon_2"] & \mathbf{k}_{x_2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

следует, что $< \epsilon_1 > = < \epsilon_2 >$, вопреки условию. Следовательно, отображение f теоретико-множественно является вложением. Отсюда получаем, что отображение f – биекция. □

Предложение 2. *Многообразие $\mathbf{P}(\mathbb{F})$ неприводимо.*

Доказательство. Согласно [8, Lemma 4.5] проективный спектр $\mathbf{P}(\mathbb{F})$ когерентного пучка $\mathbb{F}$ на $\mathbb{P}^3 \times R_1$ неприводим тогда, когда $pd(\mathbb{F}) \leq 1$. Так как ограничение $\mathbb{F}|_{\mathbb{P}^3 \times \{[\mathcal{F}]\}}$ пучка $\mathbb{F}$ на $\mathbb{P}^3 \times \{[\mathcal{F}]\}$ есть рефлексивный пучок $\mathcal{F}$ на $\mathbb{P}^3$, то из [4, Лемма 1.1.10] получаем, что $pd(\mathcal{F}) \leq 1$. А следовательно, $pd(\mathbb{F}) \leq 1$, поэтому многообразие $\mathbf{P}(\mathbb{F})$ неприводимо. □

По построению схема $\mathbf{P}(\mathbb{F})$ имеет размерность 15. Таким образом, в силу предложения 2 и леммы 2, имеем равенство

$$\dim f(\mathbf{P}(\mathbb{F})) = 15. \tag{10}$$

Следовательно, размерность любой неприводимой компоненты, содержащей $f(\mathbf{P}(\mathbb{F}))$, не меньше 15. Обозначим через M_1 неприводимую компоненту содержащую $f(\mathbf{P}(\mathbb{F}))$, то есть $\mathrm{M}_1 = \overline{f(\mathbf{P}(\mathbb{F}))}$, где $\overline{f(\mathbf{P}(\mathbb{F}))}$ – замыкание $f(\mathbf{P}(\mathbb{F}))$ в схеме модулей M. Пусть $\mathrm{T}_{[\mathcal{E}]}\mathrm{M}$ – касательное пространство в точке $[\mathcal{E}]$ к схеме модулей M, а $\mathrm{T}_{[\mathcal{E}]}\mathrm{M}_1$ – касательное пространство в точке $[\mathcal{E}]$ к неприводимой компоненте M_1. Тогда имеем неравенство

$$\dim \mathrm{T}_{[E]}\mathrm{M} \geq \dim \mathrm{T}_{[E]}\mathrm{M}_1 \geq \dim f(\mathbf{P}(\mathbb{F})) = 15. \tag{11}$$

Непосредственно из [5, Corollary 4.5.2] получаем следующую лемму.

Лемма 3. $\mathrm{T}_{[\mathcal{E}]}\mathrm{M} = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$.

Напомним, что каждый пучок $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_1$ включается в точную тройку вида (8). Как известно из [6, Lemma 2.4], каждый пучок $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ включается в точную тройку

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E}^{\vee\vee} \to \mathcal{I}_Y \to 0, \tag{12}$$

где Y – пара скрещивающихся прямых или прямая с двойной структурой в $\mathbb{P}^3$.

Рассмотрим пучок $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_1$, такой, что для пучка $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ схема Y – пара скрещивающихся прямых l_1 и l_2 и $\epsilon \circ \alpha \neq 0$, где α и ϵ определены в (12) и (8). Пусть точка $x \notin l_1 \cup l_2$. Тогда для такого $\mathcal{E}$ тройки (12) и (8) достраиваются до следующей коммутативной диаграммы.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
 & \mathcal{I}_{l_1\cup l_2} \arrow[u] \arrow[r, equal] & \mathcal{I}_{l_1\cup l_2} \arrow[u] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{E}^{\vee\vee} \arrow[u] \arrow[r, "\epsilon"] & \mathbf{k}_x \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_x(-1) \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{O}(-1) \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r] & \mathbf{k}_x \arrow[u, equal] \arrow[r] & 0. \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Таким образом, пучок $\mathcal{E}$ включается в точную тройку

$$0 \to \mathcal{I}_x(-1) \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_{l_1\cup l_2} \to 0, \tag{13}$$

где l_1 и l_2 – скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}^3$, а $x \notin l_1 \cup l_2$ – точка в $\mathbb{P}^3$. Докажем следующее предложение.

Предложение 3. *Для пучка $\mathcal{E}$ из точной тройки (13) выполняется неравенство $\dim \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \leq 15$.*

Доказательство. 1) Применим к точной тройке (13) функтор $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},*)$, получим точную последовательность

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{I}_{l_1\cup l_2}). \tag{14}$$

2) Вычислим $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{I}_x(-1))$. Для этого применим к точной тройке (8) функтор $\mathrm{Hom}(-,\mathcal{I}_x(-1))$, получим

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_x(-1),\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{l_1\cup l_2},\mathcal{I}_x(-1)) \to$$
$$\to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_x(-1),\mathcal{I}_x(-1)) \to$$
$$\mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_{l_1\cup l_2},\mathcal{I}_x(-1)). \tag{15}$$

2.1) Вычислим $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_{l_1\cup l_2},\mathcal{I}_x(-1))$. Применим к точной тройке $0 \to \mathcal{I}_{l_1\cup l_2} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_{l_1}\oplus\mathcal{O}_{l_2} \to 0$ функтор $\mathrm{Hom}(*,\mathcal{I}_x(-1))$, получим $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O},\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_{l_1\cup l_2},\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Ext}^3(\mathcal{O}_{l_1}\oplus\mathcal{O}_{l_2},\mathcal{I}_x(-1))$. Имеем $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O},\mathcal{I}_x(-1)) = \mathrm{H}^2(\mathcal{I}_x(-1)) = 0$. Далее, по двойственности Серра получаем равенство $\mathrm{Ext}^3(\mathcal{O}_{l_1}\oplus\mathcal{O}_{l_2},\mathcal{I}_x(-1)) = \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_x,\mathcal{O}_{l_1}\oplus\mathcal{O}_{l_2}(-3))^\vee$. Так как $x\notin l_1\cup l_2$, то $\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_x,\mathcal{O}_{l_1}\oplus\mathcal{O}_{l_2}(-3)) = \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l_1}\oplus\mathcal{O}_{l_2}(-3)) = 0$. Следовательно, $\mathrm{Ext}^3(\mathcal{O}_{l_1}\oplus\mathcal{O}_{l_2},\mathcal{I}_x(-1)) = 0$, поэтому имеем равенство

$$\mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_{l_1\cup l_2},\mathcal{I}_x(-1)) = 0. \tag{16}$$

2.2) Вычислим $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_x(-1),\mathcal{I}_x(-1))$. Согласно лемме 3 имеем

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_x(-1),\mathcal{I}_x(-1)) = \mathrm{T}_x\mathbb{P}^3 = \mathbf{k}^3. \tag{17}$$

2.3) Вычислим $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{l_1\cup l_2},\mathcal{I}_x(-1))$. Применим к точной тройке $0 \to \mathcal{I}_{l_1\cup l_2} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_{l_1}\oplus\mathcal{O}_{l_2} \to 0$ функтор $\mathrm{Hom}(*,\mathcal{I}_x(-1))$, получим точную последовательность

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{l_1}\oplus\mathcal{O}_{l_2},\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O},\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{l_1\cup l_2},\mathcal{I}_x(-1)) \to$$
$$\to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{l_1}\oplus\mathcal{O}_{l_2},\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O},\mathcal{I}_x(-1)). \tag{18}$$

2.3.1) Вычислим $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{l_1}\oplus\mathcal{O}_{l_2},\mathcal{I}_x(-1))$. По двойственности Серра имеем равенство $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{l_1}\oplus\mathcal{O}_{l_2},\mathcal{I}_x(-1)) = \mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_x,\mathcal{O}_{l_1}(-3)\oplus\mathcal{O}_{l_2}(-3))^\vee$. Применим к точной тройке $0 \to \mathcal{I}_x \to \mathcal{O} \to \mathbf{k}_x \to 0$ функтор $\mathrm{Hom}(*,\mathcal{O}_{l_1}(-3)\oplus\mathcal{O}_{l_2}(-3))$ получим точную тройку $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O},\mathcal{O}_{l_1}(-3)\oplus\mathcal{O}_{l_2}(-3)) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_x,\mathcal{O}_{l_1}(-3)\oplus\mathcal{O}_{l_2}(-3)) \to \mathrm{Ext}^3(\mathbf{k}_x,\mathcal{O}_{l_1}(-3)\oplus\mathcal{O}_{l_2}(-3))$. Очевидно, что $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O},\mathcal{O}_{l_1}(-3)\oplus\mathcal{O}_{l_2}(-3)) = \mathrm{H}^2(\mathcal{O}_{l_1}(-3)\oplus\mathcal{O}_{l_2}(-3)) = 0$. По двойственности Серра имеем $\mathrm{Ext}^3(\mathbf{k}_x,\mathcal{O}_{l_1}(-3)\oplus\mathcal{O}_{l_2}(-3)) = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{l_1}(-3)\oplus\mathcal{O}_{l_2}(-3),\mathbf{k}_x)^\vee = 0$, так как $x\notin l_1\cup l_2$. Поэтому получаем, что $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_x,\mathcal{O}_{l_1}(-3)\oplus\mathcal{O}_{l_2}(-3)) = 0$. И следовательно,

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{l_1}\oplus\mathcal{O}_{l_2},\mathcal{I}_x(-1)) = 0. \tag{19}$$

2.3.2) Вычислим $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{l_1}\oplus\mathcal{O}_{l_2},\mathcal{I}_x(-1))$. Имеем $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{l_1}\oplus\mathcal{O}_{l_2},\mathcal{I}_x(-1)) = \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{l_1},\mathcal{I}_x(-1)) \oplus \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{l_2},\mathcal{I}_x(-1))$. Применим к точной тройке $0 \to \mathcal{I}_{l_1} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_{l_1} \to 0$ функтор $\mathrm{Hom}(*,\mathcal{I}_x(-1))$, получим $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{l_1},\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O},\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{l_1},\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{l_1},\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O},\mathcal{I}_x(-1))$. Вычислим $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{l_1},\mathcal{I}_x(-1))$. Применим к точной тройке $0 \to \mathcal{O}(-2) \to$

$2\mathcal{O}(-1) \to \mathcal{I}_{l_1} \to 0$ функтор $\mathrm{Hom}(*,\mathcal{I}_x(-1))$, получим точную последовательность $\mathrm{Hom}(2\mathcal{O}(-1),\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-2),\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{l_1},\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Ext}^1(2\mathcal{O}(-1),\mathcal{I}_x(-1))$. Очевидны равенства $\mathrm{Hom}(2\mathcal{O}(-1),\mathcal{I}_x(-1)) = 2\mathrm{H}^0(\mathcal{I}_x) = 0$, $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-2),\mathcal{I}_x(-1)) = \mathrm{H}^0(\mathcal{I}_x(1)) = \mathbf{k}^3$, $\mathrm{Ext}^1(2\mathcal{O}(-1),\mathcal{I}_x(-1)) = \mathrm{H}^1(\mathcal{I}_x) = 0$. Следовательно, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{l_1},\mathcal{I}_x(-1)) = \mathbf{k}^3$. Из 2.3.1) получаем, что $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{l_1},\mathcal{I}_x(-1)) = 0$. Также очевидны равенства

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O},\mathcal{I}_x(-1)) = \mathrm{H}^1(\mathcal{I}_x(-1)) = \mathbf{k} \tag{20}$$

$$\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O},\mathcal{I}_x(-1)) = \mathrm{H}^2(\mathcal{I}_x(-1)) = 0. \tag{21}$$

Поэтому $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{l_1},\mathcal{I}_x(-1)) = \mathbf{k}^2 = \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{l_2},\mathcal{I}_x(-1))$. Следовательно,

$$\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{l_1} \oplus \mathcal{O}_{l_2},\mathcal{I}_x(-1)) = \mathbf{k}^4. \tag{22}$$

Тогда из точной тройки (18) и равенств (19), (22), (20), (21) получаем

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{l_1\cup l_2},\mathcal{I}_x(-1)) = \mathbf{k}^7. \tag{23}$$

2.4) Ясно также, что

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_x(-1),\mathcal{I}_x(-1)) = \mathbf{k}. \tag{24}$$

Кроме того,

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{I}_x(-1)) = 0 \tag{25}$$

в силу стабильности пучка $\mathcal{E}$.

Используя равенства (16), (17), (23), (24) и (25) из точной тройки (15), получаем равенство

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{I}_x(-1)) = \mathbf{k}^7. \tag{26}$$

3) Вычислим $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{I}_{l_1\cup l_2})$ из точной тройки (15). Применим к точной тройке $0 \to \mathcal{I}_x(-1) \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_{l_1\cup l_2} \to 0$ функтор $\mathrm{Hom}(*,\mathcal{I}_{l_1\cup l_2})$, получим

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_x(-1),\mathcal{I}_{l_1\cup l_2}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{l_1\cup l_2},\mathcal{I}_{l_1\cup l_2}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{I}_{l_1\cup l_2}) \to$$
$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_x(-1),\mathcal{I}_{l_1\cup l_2}). \tag{27}$$

3.1) Вычислим $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_x(-1),\mathcal{I}_{l_1\cup l_2})$. Применим к точной тройке $0 \to \mathcal{I}_x(-1) \to \mathcal{O}(-1) \to \mathbf{k}_x \to 0$ функтор $\mathrm{Hom}(*,\mathcal{I}_{l_1\cup l_2})$, получим точную последовательность

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(-1),\mathcal{I}_{l_1\cup l_2}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_x(-1),\mathcal{I}_{l_1\cup l_2}) \to$$
$$\mathrm{Ext}^2(\mathbf{k}_x,\mathcal{I}_{l_1\cup l_2}). \tag{28}$$

3.1.1) Вычислим $\mathrm{Ext}^2(\mathbf{k}_x,\mathcal{I}_{l_1\cup l_2})$. По двойственности Серра имеем $\mathrm{Ext}^2(\mathbf{k}_x,\mathcal{I}_{l_1\cup l_2}) = \mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_{l_1\cup l_2},\mathbf{k}_x(-4))^\vee = \mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_{l_1\cup l_2},\mathbf{k}_x)^\vee$. Применим к точной тройке $0 \to \mathcal{I}_{l_1\cup l_2} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_{l_1} \oplus \mathcal{O}_{l_2} \to 0$ функтор $\mathrm{Hom}(*,\mathbf{k}_x)$, получим

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O},\mathbf{k}_x) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{l_1\cup l_2},\mathbf{k}_x) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{l_1} \oplus \mathcal{O}_{l_2},\mathbf{k}_x). \tag{29}$$

Вычислим $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{l_1} \oplus \mathcal{O}_{l_2},\mathbf{k}_x) = \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{l_1},\mathbf{k}_x) \oplus \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{l_2},\mathbf{k}_x)$. Применим к точной тройке $0 \to \mathcal{I}_{l_1} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_{l_1} \to 0$ функтор $\mathrm{Hom}(*,\mathbf{k}_x)$, получим $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{l_1},\mathbf{k}_x) \to$

$\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{l_1}, \mathbf{k}_x) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}, \mathbf{k}_x)$. Так как $x \notin l_1$, то $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{l_1}, \mathbf{k}_x) = 0$. Очевидно равенство $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}, \mathbf{k}_x) = \mathrm{H}^2(\mathbf{k}_x) = 0$. Следовательно, $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{l_1}, \mathbf{k}_x) = 0$. Аналогично, так как $x \notin l_2$, то имеем равенство $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{l_2}, \mathbf{k}_x) = 0$. Поэтому

$$\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{l_1} \oplus \mathcal{O}_{l_2}, \mathbf{k}_x) = 0. \tag{30}$$

Очевидно, что

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}, \mathbf{k}_x) = \mathrm{H}^1(\mathbf{k}_x) = 0. \tag{31}$$

Из (30), (31) и (29) получаем, что $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{l_1 \cup l_2}, \mathbf{k}_x) = 0$. Отсюда, имеем равенство

$$\mathrm{Ext}^2(\mathbf{k}_x, \mathcal{I}_{l_1 \cup l_2}) = 0. \tag{32}$$

3.1.2) Очевидно равенство

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(-1), \mathbf{k}_x) = \mathrm{H}^1(\mathbf{k}_x(-1)) = 0. \tag{33}$$

Используя (32) и (33), из точной тройки (28) получаем равенство

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_x(-1), \mathcal{I}_{l_1 \cup l_2}) = 0. \tag{34}$$

3.2) Так как $x \notin l_1 \cup l_2$, то верно равенство

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_x(-1), \mathcal{I}_{l_1 \cup l_2}) = H^0(\mathcal{I}_{l_1 \cup l_2}(1)) = 0 \tag{35}$$

3.3) Так как $l_1 \cap l_2 = \emptyset$, то

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{l_1 \cup l_2}, \mathcal{I}_{l_1 \cup l_2}) = \mathrm{T}_{l_1} G(1, \mathbb{P}^3) \oplus \mathrm{T}_{l_2} G(1, \mathbb{P}^3) = \mathbf{k}^8. \tag{36}$$

Используя равенства (34),(35) и (36), из точной тройки (27) получаем, что

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{I}_{l_1 \cup l_2}) = \mathbf{k}^8. \tag{37}$$

4) Из равенств (26), (37) и из точной тройки (14) получаем, что

$$\dim \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \leq 15. \tag{38}$$

Тем самым предложение доказано.

$\square$

С учетом предложения 3 и леммы 3 для пучков $\mathcal{E}$, включающихся в точную тройку (13), неравенство (11) запишем в виде

$$15 \geq \mathrm{T}_{[\mathcal{E}]}\mathrm{M}_1 \geq \dim f(\mathbb{P}(\mathbb{F})) = 15. \tag{39}$$

Тем самым $\mathrm{T}_{[\mathcal{E}]}\mathrm{M}_1 = 15$ и

$$\dim \mathrm{M}_1 = 15, \tag{40}$$

что доказывает пункт 1 теоремы 1.

4. Множество $\mathcal{M}_2$

В настоящем параграфе мы рассмотрим множество пучков $\mathcal{M}_2$, определенное в (2), и докажем второй пункт теоремы 1.

Итак, пусть $\mathcal{E}$ – пучок из $\mathcal{M}_2$. В этом случае точная тройка (3) будет иметь вид

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\vee\vee} \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2} \to 0, \tag{41}$$

где x_1 и x_2 – различные точки в $\mathbb{P}^3$. Согласно (5) для пучка $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ имеем равенства:

$$c_1(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = -1, \quad c_2(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 2, \quad c_3(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 4. \tag{42}$$

Обозначим через R_2 подмножество рефлексивных пучков в схеме модулей $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2;-1,2,4)$. Как известно из [3, Lemma 9.3, Lemma 9.6], многообразие R_2 является неприводимым гладким и рациональным размерности 11. Нам понадобится следующая лемма, которая доказывается аналогично лемме 1.

Лемма 4. *На $\mathbb{P}^3 \times R_2$ существует универсальное семейство пучков $\mathbb{F}$.*

Пусть $W := \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \smallsetminus \Delta$, где Δ – диагональ в $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$, $p_{12} : \mathbb{P}^3 \times W \to \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ и $p_{13} : \mathbb{P}^3 \times W \to \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ – проекции. Обозначим через $\Delta_1 := p_{12}^{-1}(\Delta)$ прообраз диагонали Δ при проекции p_{12}, а через $\Delta_2 := p_{13}^{-1}(\Delta)$ прообраз диагонали Δ при проекции p_{13}.

Пусть $p_1 : \mathbb{P}^3 \times W \times R_2 \to \mathbb{P}^3 \times R_2$, $p_2 : \mathbb{P}^3 \times W \times R_2 \to \mathbb{P}^3 \times R_2$, $r_1 : \mathbb{P}^3 \times W \times R_2 \to W \times R_2$ и $r_2 : \mathbb{P}^3 \times W \times R_2 \to W \times R_2$ – проекции. Положим $\mathbb{F}_1 := r_{1*}p_1^*\mathbb{F}$ и $\mathbb{F}_2 := r_{2*}p_2^*\mathbb{F}$. Рассмотрим проективизации $\mathbf{P}(\mathbb{F}_1)$ и $\mathbf{P}(\mathbb{F}_2)$ пучков $\mathbb{F}_1$ и $\mathbb{F}_2$, и пусть $\pi_1 : \mathbf{P}(\mathbb{F}_1) \to W \times R_2$, $\pi_2 : \mathbf{P}(\mathbb{F}_2) \to W \times R_2$ – структурные морфизмы. Положим $\widetilde{\mathbf{P}} := \mathbf{P}(\mathbb{F}_1) \times_{W \times R_2} \mathbf{P}(\mathbb{F}_2)$ – расслоенное произведение $\mathbf{P}(\mathbb{F}_1)$ и $\mathbf{P}(\mathbb{F}_2)$ над $W \times R_2$, и пусть и $q_1 : \widetilde{\mathbf{P}} \to \mathbf{P}(\mathbb{F}_1)$, $q_2 : \widetilde{\mathbf{P}} \to \mathbf{P}(\mathbb{F}_2)$ – проекции. В R_2 существует такое открытое плотное подмножество U^*, что для каждого $u \in R_2$ пучок $\mathbb{F}|_{\mathbb{P}^3 \times u}$ локально свободен. Обозначим через U прообраз U^* при проекции $p : W \times R_2 \to R_2$. Тогда $\mathbf{P}(\mathbb{F}_1|_U) \to U$ – проективное расслоение со слоем $\mathbb{P}^1$. Аналогично, $\mathbf{P}(\mathbb{F}_2|_U) \to U$ – также проективное расслоение со слоем $\mathbb{P}^1$. Поэтому $\mathbf{P}^* := \mathbf{P}(\mathbb{F}_1|_U) \times_U \mathbf{P}(\mathbb{F}_2|_U)$ есть расслоение над U со слоем $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Пусть $\mathbf{P} := \overline{\mathbf{P}^*}$ – замыкание расслоенного произведения $\mathbf{P}^*$ в $\widetilde{\mathbf{P}}$. Положим $\Delta_1^* := ((\Delta_1 \times R_2) \cap (\mathbb{P}^3 \times U)) \times_U \mathbf{P}^*$ и $\widetilde{\Delta}_2 := (\Delta_2 \times R_2) \times_U \mathbf{P}$. Имеем отображения $\pi : \mathbf{P} \to W \times R_2$ и $\rho : \mathbb{P}^3 \times \mathbf{P} \to \mathbf{P}$.

Определим пучок $\mathbb{E}$ как ядро отображения $\rho^*\pi^*r_{1*}p_1^*\mathbb{F} \twoheadrightarrow \rho^*q_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{F}_1)}(1)|_{\mathbb{P}^3 \times \Delta_1^*} \oplus \rho^*q_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{F}_2)}(1)|_{\mathbb{P}^3 \times \Delta_1^*}$.

По построению определено отображение $f : \mathbf{P} \to \mathrm{M}$: $p = ([\mathcal{F}], x_1, x_2, < \mathcal{F} \to \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2} >) \mapsto [\ker(\mathcal{F} \to \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}) = \mathbb{E}|_{\mathbb{P}^3 \times \{p\}}]$. По определению ограничение $\mathbb{E}|_{\mathbb{P}^3 \times \{p\}}$ пучка $\mathbb{E}$ на $\mathbb{P}^3 \times \{p\}$, где $p \in \mathbf{P}$, есть пучок на $\mathbb{P}^3$, принадлежащий $\mathcal{M}_2$, где $\mathcal{M}_2$ – множество пучков, определенное в (2). И любой пучок $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_2$ получается таким образом. Очевидна следующая лемма.

Лемма 5. *Отображение $f : \mathbf{P} \to \mathcal{M}_2$ – двулистное накрытие.*

Из определения $\mathbf{P}$, неприводимости R_2 и равенства $\dim R_2 = 11$ получаем следующее предложение.

Предложение 4. $\mathbf{P}$ – *неприводимое многообразие размерности 19.*

Отсюда, в силу леммы 5, имеем равенство

$$\dim f(\mathbf{P}) = 19. \tag{43}$$

Следовательно, размерность любой неприводимой компоненты, содержащей $f(\mathbf{P})$, не меньше 19. Обозначим через M_2 неприводимую компоненту, содержащую $f(\mathbf{P})$, то есть $\mathrm{M}_2 = \overline{f(\mathbf{P})}$, где $\overline{f(\mathbf{P})}$ – замыкание $f(\mathbf{P})$ в схеме модулей M. Аналогично параграфу 3 имеем неравенство

$$\dim \mathrm{T}_{[\mathcal{E}]}\mathrm{M} \geq \dim \mathrm{T}_{[\mathcal{E}]}\mathrm{M}_2 \geq \dim f(\mathbf{P}) = 19. \tag{44}$$

Используя лемму 3, докажем, что $\dim \mathrm{T}_{[\mathcal{E}]}\mathrm{M} \leq 19$. Каждый пучок $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_2$ включается в точную тройку вида (41). Как известно из [6, Lemma 2.4], любой пучок $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ включается в точную тройку

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E}^{\vee\vee} \to \mathcal{I}_C \to 0, \tag{45}$$

где C – коника в $\mathbb{P}^3$.

Рассмотрим пучок $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_2$, такой, что $x_1, x_2 \notin C$ и такими α и ϵ, определенными в (45) и (41), что тройки (45) и (41) достраиваются до следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
 & \mathcal{I}_C \arrow[u] \arrow[r, equal] & \mathcal{I}_C \arrow[u] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{E}^{\vee\vee} \arrow[u] \arrow[r, "\epsilon"] & \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_{x_1 \cup x_2}(-1) \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{O}(-1) \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r] & \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2} \arrow[u, equal] \arrow[r] & 0. \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Таким образом, пучок $\mathcal{E}$ включается в точную тройку

$$0 \to \mathcal{I}_{x_1 \cup x_2}(-1) \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_C \to 0. \tag{46}$$

Предложение 5. *Для пучка* $\mathcal{E}$ *из точной тройки (46) выполняется неравенство* $\dim \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \leq 19$.

Доказательство. 1) Предварительно найдем локально свободную резольвенту для пучка $\mathcal{I}_C$, которую мы будем использовать в настоящем доказательстве. Имеем точную тройку $0 \to \mathcal{I}_{\mathbb{P}^2} \to \mathcal{I}_C \to \mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^2} \to 0$. В силу изоморфизмов $\mathcal{I}_{\mathbb{P}^2} \simeq \mathcal{O}(-1)$, $\mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^2} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$ эту точную тройку запишем в виде:

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{I}_C \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2) \to 0. \tag{47}$$

Точные тройки (47) и $0 \to \mathcal{O}(-3) \to \mathcal{O}(-2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2) \to 0$, в силу равенства $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(-2), \mathcal{O}(-1)) = 0$, достраиваются до следующей коммутативной диаграммы.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(-1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{I}_C \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(-1) \arrow[r] & \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{O}(-2) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & \mathcal{O}(-3) \arrow[r, equal] \arrow[u] & \mathcal{O}(-3) \arrow[u] & \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Отсюда пучок $\mathcal{I}_C$ имеет локально свободную резольвенту.

$$0 \to \mathcal{O}(-3) \to \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \to \mathcal{I}_C \to 0 \tag{48}$$

2) Применим к точной тройке $0 \to \mathcal{I}_{x_1 \cup x_2}(-1) \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_C \to 0$ функтор $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, *)$, получим

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{I}_{x_1 \cup x_2}(-1)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{I}_C). \tag{49}$$

3) Вычислим $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{I}_C)$. Применим к точной тройке $0 \to \mathcal{I}_{x_1 \cup x_2}(-1) \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_C \to 0$ функтор $\mathrm{Hom}(*, \mathcal{I}_C)$, получим

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{I}_C) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_{x_1 \cup x_2}(-1), \mathcal{I}_C) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_C, \mathcal{I}_C) \to$$
$$\to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{I}_C) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{x_1 \cup x_2}(-1), \mathcal{I}_C). \tag{50}$$

3.1) Вычислим $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{x_1 \cup x_2}(-1), \mathcal{I}_C)$. Применим к точной тройке $0 \to \mathcal{I}_{x_1 \cup x_2}(-1) \to \mathcal{O}(-1)$ функтор $\mathrm{Hom}(*, \mathcal{I}_C)$, получим

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(-1), \mathcal{I}_C) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{x_1 \cup x_2}(-1), \mathcal{I}_C) \to$$
$$\to \mathrm{Ext}^2(\mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}, \mathcal{I}_C). \tag{51}$$

3.1.1) Вычислим $\mathrm{Ext}^2(\mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}, \mathcal{I}_C)$. В силу двойственности Серра имеем $\mathrm{Ext}^2(\mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}, \mathcal{I}_C) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_C, (\mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2})(-4))^\vee$. Вычислим $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_C, \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2})$. Применим к точной тройке (48) функтор $\mathrm{Hom}(*, \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2})$, получим $0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_C, \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2), \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-3), \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_C, \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2), \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2})$. Имеем очевидные равенства $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2), \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}) = \mathrm{H}^1((\mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2})(1)) \oplus \mathrm{H}^1((\mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2})(2)) = 0$, $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-3), \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}) = \mathrm{H}^0((\mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2})(3)) = \mathbf{k}^2$, $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2), \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}) = \mathrm{H}^0((\mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2})(1)) \oplus \mathrm{H}^0((\mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2})(2)) = \mathbf{k}^4$ и $\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_C, \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}) = \mathrm{H}^0(\mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}) = \mathbf{k}^2$, так как $x_1, x_2 \notin C$. В силу этих равенств и из идущей перед ними точной последовательности непосредственно получаем, что $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_C, \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}) = 0$. Отсюда имеем равенство

$$\mathrm{Ext}^2(\mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}, \mathcal{I}_C) = 0. \tag{52}$$

Отсюда и из равенства $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(-1), \mathcal{I}_C) = \mathrm{H}^1(\mathcal{I}_C(1)) = 0$, используя (51), получаем

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1), \mathcal{I}_C) = 0. \tag{53}$$

3.2) Используя лемму 3, получаем равенство

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_C, \mathcal{I}_C) = \mathbf{k}^8. \tag{54}$$

3.3) Так как $x_1 \cup x_2 \notin C$, то имеем равенство

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1), \mathcal{I}_C) = \mathrm{H}^0(\mathcal{I}_C(1)) = \mathbf{k}. \tag{55}$$

3.4) Далее, в силу стабильности пучка $\mathcal{E}$ имеем

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{I}_C) = 0. \tag{56}$$

Используя равенства (53), (54), (55), (56) и точную тройку (50), получаем равенство

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{I}_C) = \mathbf{k}^7. \tag{57}$$

4) Вычислим $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1))$. Применим к точной тройке $0 \to \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1) \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_C \to 0$ функтор $\mathrm{Hom}(*, \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1))$, получим

$$\begin{gathered}\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_C, \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)) \to \\ \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1), \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_C, \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)).\end{gathered} \tag{58}$$

4.1) Вычислим $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_C, \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1))$. Применим к точной тройке (48) функтор $\mathrm{Hom}(*, \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1))$, получим точную последовательность $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(-3), \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_C, \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2), \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1))$. Отсюда, в силу очевидных равенств $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(-3), \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)) = \mathrm{H}^1(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(-3), \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-2))) = 0$, $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2), \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)) = \mathrm{H}^2(\mathcal{I}_{x_1\cup x_2}) \oplus \mathrm{H}^2(\mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(1)) = 0$ имеем

$$\mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_C, \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)) = 0. \tag{59}$$

4.2) В силу леммы 3 имеем равенство

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1), \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)) = \mathbf{k}^6. \tag{60}$$

4.3) Вычислим $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_C, \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1))$. Применим к точной тройке (48) функтор $\mathrm{Hom}(*, \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1))$, получим

$$\begin{gathered}0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_C, \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2), \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)) \to \\ \to \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-3), \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_C, \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)) \to \\ \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2), \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)) \to \\ \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(-3), \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)).\end{gathered} \tag{61}$$

Очевидны равенства $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(-3), \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)) = \mathrm{H}^1(\mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(2)) = 0$, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2), \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)) = \mathrm{H}^1(\mathcal{I}_{x_1\cup x_2}) \oplus \mathrm{H}^1(\mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(1)) = \mathbf{k}$, $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-3), \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)) =$

$\mathrm{H}^0(\mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(2)) = \mathbf{k}^8$, $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-2), \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)) = \mathrm{H}^0(\mathcal{I}_{x_1\cup x_2})\oplus\mathrm{H}^0(\mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(1)) = \mathbf{k}^2$ и $\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_C, \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)) = 0$, так как $x_1, x_2 \notin C$. Отсюда и из точной последовательности (61) получаем

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_C, \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)) = \mathbf{k}^7. \tag{62}$$

Теперь, используя равенства (59), (60), (62) и точную последовательность (58), получаем

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)) = \mathbf{k}^{12}. \tag{63}$$

Далее, используя равенства (57), (63) и точную последовательность (49), получаем

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \le 19. \tag{64}$$

Тем самым предложение доказано. □

С учетом предложения 5 и леммы 3 для пучков $\mathcal{E}$, включающихся в точную тройку (46), неравенство (44) запишем в виде:

$$19 \ge \mathrm{T}_{[\mathcal{E}]}\mathrm{M}_2 \ge \dim f(\mathbb{P}) = 19. \tag{65}$$

Тем самым $\mathrm{T}_{[\mathcal{E}]}\mathrm{M}_2 = 19$ и

$$\dim \mathrm{M}_2 = 19. \tag{66}$$

Отсюда получаем пункт 2 теоремы 1, что завершает ее доказательство.

Список литературы

1. **Hartshorne R. Sols I.** *Stable rank 2 vector bundles on $\mathbb{P}^3$ with $c_1 = -1, c_2 = 2$ (English)* // J. Reine Angew. Math. 1981. 325. P. 145–152.

2. **Meseguer J., Sols I., Stromme S. A.** *Compactification of a family of vector bundles on $\mathbb{P}^3$ (English)* // 18th Scand. Congr. Math., Proc., Aarhus 1980, Prog. Math. 1981. 11. P. 474–494.

3. **Hartshorne R.** *Stable reflexive sheaves (English)* // Math. Ann. 1980. 254. P. 121–176.

4. **Оконек К., Шнейдер М., Шпиндлер Х.** *Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах.* М.: Мир, 1984.

5. **D. Huyberchts, M. Lehn.** *The Geometry of moduli spaces of sheaves.* A Publication of the Max-Planck-Institut für Matematik, Bonn, 1997.

6. **Chang M.-C.** *Stable rank 2 reflexive sheaves on $\mathbb{P}^3$ with small c_2 and applications* // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. 284, №1. P. 57–89.

7. **Maruyama M.** *Moduli of stable sheaves. II (English)* // J. Math. Kyoto Univ. 1978. 18. P. 557–614.

8. **Stromme S.-A.** *Ample Divisors on Fine Moduli Spaces on Projective Plane* // Math. Z. 1984. 187. P. 405–423.

Some New Components of the Moduli Scheme $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2;-1,2,0)$ of Stable Coherent Torsion Free Sheaves of Rank 2 on $\mathbb{P}^3$

Zavodchikov M.A.

Keywords: compactification, moduli scheme, coherent torsion free sheave of rank 2, 3-dimensional projective space

In this paper we consider Giseker-Maruyama moduli scheme $\mathrm{M} := \mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2;-1,2,0)$ of stable coherent torsion free sheaves of rank 2 with Chern classes $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ on 3-dimensional projective space $\mathbb{P}^3$. We will define two sets of sheaves $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$ in M and we will prove that closures of $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$ in M are irreducible components of dimensions 15 and 19, accordingly.

Сведения об авторе:
Заводчиков Михаил Александрович,
Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского,
ассистент кафедры геометрии