MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS, VOL. 28, NO. 3, 2021
journal homepage: www.mais-journal.ru

ALGORITHMS

A Simple Algorithm for Finding a Non-negative Basic Solution of a System of Linear Algebraic Equations

G. D. Stepanov[1]

DOI: 10.18255/1818-1015-2021-3-234-237

[1]Voronezh State Pedagogical University, 86 Lenin str, Voronezh 394043, Russia.

MSC2020: 90C05
Research article
Full text in Russian

Received July 11, 2021
After revision August 24, 2021
Accepted August 25, 2021

This article describes an algorithm for obtaining a non-negative basic solution of a system of linear algebraic equations. This problem, which undoubtedly has an independent interest,
in particular, is the most time-consuming part of the famous simplex method for solving linear programming problems. Unlike the artificial basis Orden's method used in the classical simplex method, the proposed algorithm does not attract artificial variables and economically consumes computational resources.
The algorithm consists of two stages, each of which is based on Gaussian exceptions. The first stage coincides with the main part of the Gaussian complete exclusion method, in which the matrix of the system is reduced to the form with an identity submatrix. The second stage is an iterative cycle, at each of the iterations of which, according to some rules, a resolving element is selected, and then a Gaussian elimination step is performed, preserving the matrix structure obtained at the first stage. The cycle ends either when the absence of non-negative solutions is established, or when one of them is found.
Two rules for choosing a resolving element are given. The more primitive of them allows for ambiguity of choice and does not exclude looping (but in very rare cases). Use of the second rule ensures that there is no looping.

Keywords: linear equation systems; nonnegative solution; linear programming; the rule of choosing a resolving element

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Gleb D. Stepanov correspondence author	orcid.org/0000-0003-3237-849X. E-mail: stpnv42@mail.ru PhD, associate professor.

For citation: G. D. Stepanov, "A Simple Algorithm for Finding a Non-negative Basic Solution of a System of Linear Algebraic Equations", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 28, no. 3, pp. 234-237, 2021.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ, ТОМ 28, № 3, 2021
сайт журнала: www.mais-journal.ru

ALGORITHMS

Простой алгоритм отыскания неотрицательного базисного решения системы линейных алгебраических уравнений

Г. Д. Степанов[1]

DOI: 10.18255/1818-1015-2021-3-234-237

[1]Воронежский государственный педагогический университет, ул. Ленина, д. 86, г. Воронеж, 394043 Россия.

УДК УДК 519.852
Научная статья
Полный текст на русском языке

Получена 11 июля 2021 г.
После доработки 24 августа 2021 г.
Принята к публикации 25 августа 2021 г.

В данной статье описывается алгоритм получения неотрицательного базисного решения системы линейных алгебраических уравнений. Эта задача, в частности, является наиболее трудоемким этапом знаменитого симплекс-метода решения задач линейного программирования, хотя бесспорно представляет и самостоятельный интерес. В отличии от метода искусственного базиса Ордена, применяемого в классическом симплекс-методе, предлагаемый алгоритм не использует искусственных переменных и экономно расходует вычислительные ресурсы.

Алгоритм состоит из двух этапов, основу каждого из которых составляют Гауссовы исключения. Первый этап совпадает с основной частью метода полных исключений Гаусса, в котором матрица системы приводится к виду с единичной подматрицей. Второй этап представляет из себя итерационный цикл, на каждой из итераций которого по некоторым правилам выбирается разрешающий элемент, а затем выполняется шаг исключения Гаусса, сохраняющий структуру матрицы, полученную на первом этапе. Цикл завершается, либо когда будет установлено отсутствие неотрицательных решений, либо когда будет найдено одно из них.

Приводятся два правила выбора разрешающего элемента. Более примитивное из них допускает неоднозначность выбора и не исключает зацикливания (но в очень редких случаях). Использование второго правила гарантирует отсутствие зацикливания.

Ключевые слова: система линейных алгебраических уравнений; неотрицательное решение; линейное программирование; правило выбора разрешающего элемента

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Глеб Дмитриевич Степанов автор для корреспонденции	orcid.org/0000-0003-3237-849X. E-mail: stpnv42@mail.ru канд.физ.-мат.наук, доцент.

Для цитирования: G. D. Stepanov, "A Simple Algorithm for Finding a Non-negative Basic Solution of a System of Linear Algebraic Equations", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 28, no. 3, pp. 234-237, 2021.

Сразу отметим, что рассматриваемый алгоритм получен в ходе усовершенствования симплекс-метода, который в течение многих десятков лет (см. [1—8]) является основным методом решения важной прикладной задачи – задачи линейного программирования (ЗЛП). Сама по себе очень естественная задача отыскания неотрицательного решения системы

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ + \ldots + a_{1n}x_n \ &= a_{10}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ + \ldots + a_{2n}x_n \ &= a_{20}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= a_{m0}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $m < n$, представляет особый интерес именно в связи с тем, что является одним из этапов симплекс-метода.

Задача линейного программирования заключается в поиске максимума или минимума линейной функции на множестве неотрицательных решений системы (1). С алгебраической точки зрения симплекс-метод можно рассматривать как обобщение метода полных исключений Гаусса. Так же как метод Гаусса симплекс-метод удобно формулировать в терминах преобразований расширенной матрицы системы (1), которые не меняют множества решений этой системы. Оба этих метода реализуются в виде последовательности шагов исключения, на каждом из которых в матрице системы выбирается ненулевой разрешающий элемент a_{pq}, а затем элементы расширенной матрицы преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} a^{\text{н}}_{pj} &= a_{pj}/a_{pq} \qquad\qquad (j \in \{0, 1, \ldots, n\}), \\ a^{\text{н}}_{ij} &= a_{ij} - a_{pj}a_{iq}/a_{pq} \quad (i \in \{1, \ldots, m\} \setminus p, \ \ j \in \{0, 1, \ldots, n\}), \end{aligned} \tag{2}$$

где через $a^{\text{н}}_{ij}$ обозначены элементы после шага исключения.

Симплекс-метод состоит из трех этапов, причем первый этап, по существу, совпадает с основной частью метода полного исключения Гаусса. На этом этапе расширенная матрица системы преобразуется к виду

$$\begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1n-m} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{20} & a_{21} & \ldots & a_{2n-m} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m0} & a_{m1} & \ldots & a_{mn-m} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

или отличающемуся от (3) перестановкой столбцов с номерами большими нуля. Такие матрицы здесь будем называть G-матрицами. Перестановок столбцов, приводящих G-матрицу к виду (3), может быть несколько. При выделенной каким-либо образом одной из них через $s_1, s_2, \ldots, s_n$ обозначим соответствующую перестановку исходных номеров столбцов. Номера $r_1 = s_{n-m+1}, r_2 = s_{n-m+2}, \ldots, r_m = s_n$ и переменные с этими номерами называются базисными. Вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в котором все внебазисные переменные равны нулю, а базисные переменные $x_{r_i} = -a_{i0}$ $(i = 1, 2, \ldots m)$, является решением системы уравнений. Такие решения называются базисными.

Второй этап симплекс-метода заключается в преобразовании G-матрицы в аналогичную матрицу, с неотрицательными элементами нулевого столбца, т.е. в отыскании неотрицательного базисного решения. Этот этап в симплекс-методе является наиболее трудоемким.

На третьем этапе, называющемся основной процедурой, G-матрица с неотрицательным нулевым столбцом преобразуется в такую же матрицу так, чтобы соответствующее базисное решение удовлетворяло критериям оптимальности целевой функции.

Этап 2 симплекс-метода оказывается более трудоемким, чем этап 3, по той причине, что он традиционно сводится методом искусственного базиса к применению основной процедуры. Метод связан с добавлением в систему новых переменных и формированием искусственной целевой функции. Явным недостатком этого приема является увеличение размера задачи, что крайне нежелательно при больших m и n.

На самом деле алгоритм этапа 2 проще составить по аналогии с алгоритмом этапа 3, но с более простым правилом выбора разрешающего элемента a_{pq} и более простыми условиями окончания. Первый вариант такого правила выбора выглядит следующим образом.

Правило 1. *Для G-матрицы p надо выбирать так, что $a_{p0} < 0$. При уже выбранном p, надо выбирать q так, что $a_{pq} < 0$.*

Сам алгоритм представляет из себя итерационный цикл, на каждой из итераций которого в G-матрице по правилу 1 (или его уточнению) выбирается разрешающий элемент a_{pq}, а затем матрица преобразуется по формулам (2). Цикл завершается либо при отсутствии требуемого p, что означает неотрицательность нулевого столбца и соответствующего базисного решения, либо при отсутствии требуемого q, что свидетельствует об отсутствии у системы уравнений неотрицательных решений.

Любой из двух вариантов окончания цикла, означает решение задачи, стоящей перед этапом 2. Но при использовании правила 1 не исключено еще и зацикливание. Правило 1 определяет выбор разрешающего элемента неоднозначно и при использовании его приходится уточнять. Возможны более удачные уточнения и менее удачные. При компьютерных экспериментах с естественными вариантами уточнения правила задача решалась очень быстро, т.е. либо находилось неотрицательное решение системы уравнений, либо выявлялось его отсутствие. Зацикливание было выявлено лишь при очень вычурных уточнениях. По сути, можно сказать, что некоторые уточнения правила 1, приводят к довольно эффективным эвристическим алгоритмам, для которых пока не найдены примеры, приводящие к зацикливанию. Более того, удалось получить уточнение правила 1, которое гарантирует отсутствие зацикливания.

Правило 2. *Для G-матрицы в качестве номера разрешающей строки из всех p, при которых $a_{p0} < 0$, надо брать номер с наименьшим r_p. При уже выбранном p надо брать наименьшее q, при котором $a_{pq} < 0$.*

Теорема 1. *Для G-матриц итерационный цикл, тело которого состоит из выбора разрешающего элемента по правилу 2 и последующего шага исключения, конечен.*

Несмотря на простоту формулировки правила 2, доказательство теоремы весьма непросто и связано с обоснованием конечности этапов сразу четырех алгоритмов решения ЗЛП. Два из этих алгоритмов предназначены для упрощения симплекс-метода, а два – являются двойственными к ним.

О трудоемкости полученного алгоритма можно лишь сказать, что при вычислительных экспериментах количество итераций, затрачиваемое на решение задач, было сравнимо с n, но, наверное, возможны и "плохие" примеры, как пример из [9] для основной процедуры симплекс-метода.

References

[1] S. I. Gass, *Linear Programming: Methods and Applications.* McGraw-Hill: New York, 1958.

[2] D. B. Yudin and E. G. Holstein, *Linear Programming.* Moscow: Nauka, 1963.

[3] G. Dantzig, “Linear programming, its applications and generalizations”, *Princeton University Press*, 1963.

[4] T. Hu, *Integer programming and network flows.* Addison-Wesley, 1969.

[5] S. Ashmanov, *Linear programming.* Moscow: Nauka, 1981.

[6] C. H. Papadimitriou and K. Steiglitz, *Combinatorial optimization: algorithms and complexity.* Prentice-Hall, 1982.

[7] A. Schrijver, *Theory of linear and integer programming.* Moscow: Mir, 1991.

[8] F. P. Vasiliev and A. Y. Ivanitsky, *Linear Programming.* MCCME, 2020.

[9] V. Klee and G. J. Minty, “How good is the simplex algorithm?”, *Inequalities*, vol. 3, no. 3, pp. 159–175, 1972.