

УДК 512.723

Модули стабильных пучков ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ на трехмерной квадрике

Уваров А. Д.

Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского

e-mail: artiom-uvarov@inbox.ru

получена 4 января 2012 года

Ключевые слова: компактификация, схема модулей, когерентный пучок ранга 2 без кручения, трехмерная квадрика

Рассматривается схема $M_Q(2; -1, 2, 0)$ модулей стабильных пучков ранга 2 без кручения с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ на гладкой трехмерной проективной квадрике Q . Многообразие $M_Q(-1, 2)$ модулей расслоений ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$ на Q было изучено Оттавиани и Шуреком в 1994 г. В 2007 г. автором было получено описание замыкания многообразия $M_Q(-1, 2)$ в схеме $M_Q(2; -1, 2, 0)$. В настоящей статье доказывается, что в $M_Q(2; -1, 2, 0)$ существует единственная неприводимая компонента, отличная от $M_Q(-1, 2)$, являющаяся рациональным многообразием размерности 10.

1. Введение

В настоящей статье исследуется пространство модулей стабильных пучков ранга 2 с нечетным детерминантом на гладкой трехмерной квадрике Q . Трехмерная квадрика Q наряду с трехмерным проективным пространством $\mathbb{P}_3$ принадлежит основной серии гладких многообразий Фано с числом Пикара 1. Первые работы по описанию стабильных расслоений ранга 2 на многообразиях Фано основной серии, отличных от $\mathbb{P}_3$, относятся к концу 80-х – началу 90-х годов прошлого века (см. [1], [2], [3]). Более детальное изучение геометрии пространств модулей стабильных расслоений на многообразиях Фано, близких к $\mathbb{P}_3$, началось с середины 90-х годов. Здесь необходимо отметить статью Дж. Оттавиани и М. Шурека [4] по стабильным расслоениям ранга 2 на трехмерной квадрике Q и статьи Д.Г. Маркушевича и А.С. Тихомирова [5] и [6] по стабильным расслоениям на трехмерной кубике в $\mathbb{P}_4$ и двойном пространстве $\mathbb{P}_3$ индекса два. В частности, в работе [4] Оттавиани и Шурек исследовали пространство модулей $M_Q(c_1, c_2)$ стабильных векторных расслоений ранга 2 на Q с первым классом Черна $c_1 = 0$ и $c_1 = -1$ и минимальным возможным вторым классом Черна $c_2 = 1$ и $c_2 = 2$. В частности, они доказали, что $M_Q(-1, 1)$ – точка (класс изоморфизма спинорного расслоения на Q), а $M_Q(0, 2)$ и $M_Q(-1, 2)$ являются

соответственно 9-мерным и 6-мерным неприводимыми рациональными квазипроективными многообразиями. Позднее Н. Перрен в работе [7] описал замыкание многообразия $M_Q(0, 2)$ как компоненту схемы модулей Гизекера–Маруямы $M_Q(2; 0, 2, 0)$, а Д.И. Артамкин в работах [8], [9] нашел другие неприводимые компоненты в схеме $M_Q(2; 0, 2, 0)$. В статье [10] автором было получено описание замыкания $\overline{M_Q(-1, 2)}$ многообразия $M_Q(-1, 2)$ в схеме модулей Гизекера–Маруямы $M := M_Q(2; -1, 2, 0)$ стабильных пучков ранга 2 на Q без кручения с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$. Вопрос о неприводимых компонентах схемы M , отличных от $\overline{M_Q(-1, 2)}$, до настоящего времени оставался открытым.

Настоящая статья посвящена описанию неприводимых компонент схемы M . Мы доказываем гипотезу А.С. Тихомирова о том, что в M существует единственная неприводимая компонента, отличная от $\overline{M_Q(-1, 2)}$, и показываем, что она является рациональным многообразием размерности 10 (см. теорему 1 ниже). Дадим краткое описание содержания работы. В параграфе 2 строится 10-мерное неприводимое семейство пучков $M_1 \subset M$, имеющих нульмерные особенности на Q . Затем показывается, что других пучков с нульмерными особенностями в M нет. В параграфе 3 рассматриваются пучки из M , имеющие одномерные особенности, и доказывается, что все такие пучки имеют своей рефлексивной оболочкой спинорное расслоение. Далее строятся неприводимые семейства M_2 и M_3 пучков из M , имеющих одномерные особенности, и доказывается, что M является дизъюнктивным объединением множеств M_1 , M_2 , M_3 и $\overline{M_Q(-1, 2)}$ (теорема 6). Построенные семейства используются в параграфе 4 для доказательства следующей основной теоремы статьи.

Теорема 1. *В M существует единственная неприводимая компонента, отличная от $\overline{M_Q(-1, 2)}$. Эта компонента является рациональным 10-мерным многообразием и представляет собой замыкание $\overline{M_1}$ многообразия $M_1 = \{ [\mathcal{E}] \in M \mid \dim \text{Sing}(\mathcal{E}) = 0 \}$ в M .*

В параграфе 5 дается доказательство вспомогательных лемм и предложений, используемых в § 2 и 3.

Основным техническим инструментом в настоящей статье является конструкция Серра стабильных пучков из M и других вспомогательных пучков, в частности, рефлексивных пучков ранга 2 (см. [11, гл. I, §5]), адаптированная к случаю трехмерной квадрики Q . Другим важным техническим результатом, используемым в статье (см. параграф 5), является результат Эйна и Сольса [12, Theorem 2.2] о спектре стабильных рефлексивных пучков ранга 2 на Q . Кроме того, мы пользуемся некоторыми численными результатами Оттавиани и Шурека [4] о стабильных пучках ранга 2 с малыми классами Черна на Q .

Всюду в статье основным полем является поле комплексных чисел $\mathbf{k} = \mathbb{C}$.

2. Пучки из M с нульмерными особенностями

В настоящем параграфе строится неприводимое 10-мерное семейство $M_1 \subset M$ стабильных пучков без кручения ранга 2, не локально свободных в конечном числе точек на Q и имеющих своей рефлексивной оболочкой пучок с $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 2$.

Доказывается, что в M не существует пучков с нульмерными особенностями, кроме пучков из M_1 . В дальнейшем мы показываем (см. § 4), что замыкание $\bar{M}_1$ этого семейства в M составляет компоненту в M (см. теорему 1).

Пусть $\mathcal{E}$ – когерентный пучок на Q . Многочлен Черна $c_t(\mathcal{E})$ пучка $\mathcal{E}$ определяется с помощью локально свободной резольвенты пучка $\mathcal{E} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{E}$ следующим образом: $c_t(\mathcal{E}) = \prod_i (-1)^i c_t(\mathcal{L}^i)$, и это определение не зависит от выбора резольвенты.

Напомним, что кольцо когомологий $H^*(Q, \mathbb{Z})$ порождено как свободный $\mathbf{Z}$ -модуль классами гиперплоского сечения $[h] \in H^2(Q, \mathbb{Z})$, прямой $[l] \in H^4(Q, \mathbb{Z})$ и точки $[pt] \in H^6(Q, \mathbb{Z})$. Умножение в этом кольце устроено следующим образом:

$$[h]^2 = 2[l], [h] \cdot [l] = [pt]. \quad (1)$$

С учетом последних равенств многочлен $c_t(\mathcal{E})$ можно записать следующим образом: $c_t(\mathcal{E}) = c_1[h]t + c_2[l]t^2 + c_3[pt]t^3$, где целые числа c_1, c_2 и c_3 называются соответственно первым, вторым и третьим классами Черна пучка $\mathcal{E}$.

Пусть $[\mathcal{E}] \in M \setminus \overline{M_Q(-1, 2)}$ – стабильный пучок ранга 2 на Q с классами Черна $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 0$. Рассмотрим точную тройку:

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{\vee\vee} \rightarrow \mu \rightarrow 0, \quad (2)$$

где $\mu = \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}$. Если $\mu = 0$, то $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}^{\vee\vee}$ есть рефлексивный стабильный пучок с $c_3 = 0$, а значит, он локально свободен, поскольку для рефлексивных стабильных пучков ранга 2 на Q число c_3 есть число точек (взятых с подходящими кратностями), в которых такой пучок не локально свободен. (Доказательство последнего факта дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения для проективного пространства $\mathbb{P}_3$ – см. [13, Prop. 2.6]). Однако локальная свобода пучка $\mathcal{E}$ противоречит условию $[\mathcal{E}] \notin \overline{M_Q(-1, 2)}$. Следовательно, $\mu \neq 0$. Поскольку $\text{Supp} \mu \subset \text{Sing} \mathcal{E}$ и $\mathcal{E}$ – пучок без кручения, а значит, $\dim \text{Sing} \mathcal{E} \leq 1$ (см. [11, с. 110]), то для пучка μ возможны следующие случаи: $\dim \text{Supp} \mu = 0$ и $\dim \text{Supp} \mu = 1$. Ниже в этом параграфе мы рассматриваем случай $\dim \text{Supp} \mu = 0$. Случай $\text{Supp} \mu = 1$ будет рассмотрен в параграфе 3.

Итак, пусть $\dim \text{Supp} \mu = 0$. В этом случае $\chi(\mu) = l(\mu) := h^0(\mu)$. Известна формула для эйлеровой характеристики пучка $\mathcal{E}$ ранга r на Q :

$$\chi(\mathcal{E}) = (2c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3)/6 + 3(c_1^2 - c_2)/2 + 13c_1/6 + r \quad (3)$$

(см. [4, р. 194]). В частности,

$$\chi(\mathcal{E}) = -1, \quad [\mathcal{E}] \in M_Q(2; -1, 2, 0). \quad (4)$$

Далее, из условия $\dim \text{Supp} \mu = 0$ имеем: $c_1(\mu) = c_2(\mu) = 0$ и $c_3(\mu) = 2l(\mu)$. Поскольку $c_t(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = c_t(\mathcal{E})c_t(\mu)$, то $c_1(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = -1, c_2(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 2, c_3(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = c_3(\mu)$. Поэтому минимальное возможное значение для $c_3(\mathcal{E}^{\vee\vee})$, отличное от нуля, равно двум:

$$c_3(\mathcal{E}^{\vee\vee}) \geq 2. \quad (5)$$

Если $c_3(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 2$, то $l(\mu) = 1$ и пучок μ есть поле вычетов точки. В этом случае $\mathcal{F} = \mathcal{E}^{\vee\vee}$ есть рефлексивный пучок ранга 2 на Q с классами Черна $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 2$ (см. [13, р. 124]).

Заметим также, что из стабильности $\mathcal{E}$ следует стабильность $\mathcal{F}$ (доказательство этого факта с учетом того, что $\mathrm{Pic}(Q) = \mathbb{Z}H$, где H – класс гиперплоского сечения квадрики Q , дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения для пучков ранга 2 на проективном пространстве $\mathbb{P}_3$ – см. [11, с. 119]). Итак, верна

Лемма 1. Пусть $[\mathcal{E}] \in M$ – стабильный пучок ранга 2 на квадрике Q с $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$, входящий в точную тройку (2), в которой $\dim \mu = 0$ и $c_2(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = c_3(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 2$. Тогда $\mu = \mathbf{k}_x$ – поле вычетов некоторой точки $x \in Q$.

Ниже нам потребуется результат Эйна и Сольса [12, Theorem 2.2], согласно которому всякий стабильный рефлексивный пучок ранга 2 на квадрике Q с $c_1 = -1$ имеет спектр. Однако в доказательстве этого результата пропущен случай, когда $\bigoplus_{l \leq 0} H^1(\mathcal{E}(l)) = 0$. В этом случае доказательство Эйна и Сольса приводит к противоречию (см. ниже сноску 1 в формуле (37)). Этот пробел, однако, автоматически устраняется, если на пучок $\mathcal{E}$ наложить условие $\bigoplus_{l \leq 0} H^1(\mathcal{E}(l)) \neq 0$. При этом все остальные рассуждения из доказательства Эйна и Сольса сохраняются без изменения. Мы приводим этот видоизмененный результат в виде следующей леммы, которая будет использоваться ниже в предложении 1.

Лемма 2. Пусть $[\mathcal{E}] \in M$ – стабильный рефлексивный пучок ранга 2 на квадрике Q с $c_1 = -1$, удовлетворяющий условию $\bigoplus_{l \leq 0} H^1(\mathcal{E}(l)) \neq 0$. Тогда спектр пучка $\mathcal{E}$ существует.

Доказательство см. в § 5.

Предложение 1. Пусть $\mathcal{F}$ – стабильный рефлексивный пучок на Q с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 \geq 2$. Тогда $\bigoplus_{i \leq 0} H^1(\mathcal{F}(i)) = 0$.

Доказательство см. в § 5.

Предложение 2. На Q не существует стабильных рефлексивных пучков $\mathcal{B}$ с классами Чженя $c_1(\mathcal{B}) = -1$, $c_2(\mathcal{B}) = 2$, $c_3(\mathcal{B}) > 2$.

Доказательство см. в § 5.

Пусть $M_Q(2; -1, 2, 2)$ есть пространство классов изоморфизма стабильных пучков ранга 2 на Q с $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 2$. Рассмотрим в $M_Q(2; -1, 2, 2)$ открытое подмножество $\mathcal{M}$ классов рефлексивных пучков. Заметим, что согласно предыдущим вычислениям в силу предложений 1 и 2 пучок $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ в (2) принадлежит $\mathcal{M}$.

Пусть $\mathcal{F} \in \mathcal{M}$. Из (3) имеем $3 = \chi(\mathcal{F}(1)) = h^0(\mathcal{F}(1)) - h^1(\mathcal{F}(1)) + h^2(\mathcal{F}(1)) - h^3(\mathcal{F}(1))$. По двойственности Серра с учетом стабильности $\mathcal{F}$ имеем $(H^3(\mathcal{F}(1)))^\vee = \mathrm{Ext}^0(\mathcal{F}(1), \mathcal{O}_Q(-3)) = H^0(\mathcal{F}(-3)) = 0$, откуда $3 = h^0(\mathcal{F}(1)) - h^1(\mathcal{F}(1)) + h^2(\mathcal{F}(1))$ и, следовательно,

$$h^0(\mathcal{F}(1)) + h^2(\mathcal{F}(1)) \geq 3. \quad (6)$$

Кроме того, по двойственности Серра, $H^2(\mathcal{F}(1))^\vee = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}(1), \mathcal{O}_Q(-3))$. Далее, из условия $H^1(\mathcal{F}(-3)) = 0$ мы имеем $H^1(\mathrm{Hom}(\mathcal{F}(1), \mathcal{O}_Q(-3))) = H^1(\mathcal{F}(-3)) = 0$. Поэтому кусок точной последовательности локальных и глобальных Ext-ов:

$0 \rightarrow H^1(\mathcal{H}om(\mathcal{F}(1), \mathcal{O}_Q(-3))) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{F}(1), \mathcal{O}_Q(-3)) \rightarrow H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}(1), \mathcal{O}_Q(-3)))$ принимает вид: $0 \rightarrow H^2(\mathcal{F}(1))^\vee \rightarrow H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}(1), \mathcal{O}_Q(-3)))$. Так как $h^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}(1), \mathcal{O}_Q(-3))) = c_3(\mathcal{F}(1)) = 2$ (см. [13, р. 131]), то из последней точной последовательности получаем $h^2(\mathcal{F}(1)) \leq 2$. Отсюда и из неравенства (6) следует, что $h^0(\mathcal{F}(1)) \geq 1$. Возьмем произвольное ненулевое сечение $s \in H^0(\mathcal{F}(1))$, и пусть $C = (s)_0$ – схема нулей сечения s . Предположим, что схема C содержит дивизориальную компоненту. Тогда существует $d > 0$ и сечение $f \in H^0(\mathcal{O}_Q(d))$, такое, что $s = s' \cdot f$, где $s' \in H^0(\mathcal{F}(1-d))$. Соответственно имеет место вложение пучков $\mathcal{O}_Q(d-1) \hookrightarrow \mathcal{F}$, что противоречит стабильности пучка $\mathcal{F}$ при $d > 0$. Следовательно,

$$\text{codim}_Q C = 2. \quad (7)$$

При этом C является схемой Коэна–Маколея (теорема 4.1 статьи [13]). Вычислим многочлен Гильберта $P_C(m)$ схемы C . Рассмотрим точную тройку:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Q(-1) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow 0. \quad (8)$$

Вычисляя классы Чжэня пучка $\mathcal{F}(m)$, мы находим, что $c_1(\mathcal{F}(m)) = 2m - 1$, $c_2(\mathcal{F}(m)) = 2m^2 - 2m + 2$, $c_3(\mathcal{F}(m)) = 2$, откуда $\chi(\mathcal{F}(m)) = \frac{2}{3}m^3 + 2m^2 + \frac{1}{3}m$. Вычисляя эйлерову характеристику пучка $\mathcal{F}(m)$, получаем $P_{\mathcal{F}}(m) = \chi(\mathcal{F}(m)) = \frac{2}{3}m^3 + 2m^2 + \frac{1}{3}m$. Из этого равенства, тройки (8) и троек $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_4}(m-3) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_4}(m-1) \rightarrow \mathcal{O}_Q(m-1) \rightarrow 0$, $0 \rightarrow \mathcal{I}_C(m) \rightarrow \mathcal{O}_{Q_3}(m) \rightarrow \mathcal{O}_C(m) \rightarrow 0$ находим многочлен Гильберта схемы C : $P_C(m) = 2m + 1$. Нетрудно видеть, что схема Коэна–Маколея C с таким многочленом Гильберта является плоской коникой: $C = Q \cap \mathbb{P}_2$, где $\mathbb{P}_2 = \text{Span}(C)$. Тем самым можно рассматривать конику C как точку грассманиана $G := \text{Grass}(2, 4)$ и, следовательно, для пучков $\mathcal{F}$ выполняются условия теоремы 4.1 из статьи [13].

Покажем, что пространство $M_Q(2; -1, 2, 2)$, определенное выше, есть тонкое многообразие модулей. Действительно, согласно статье (см. [14, р. 598]) универсальное семейство стабильных пучков на $M_Q(2; -1, 2, 2) \times Q$ существует, если многочлен Гильберта $H_{\mathcal{E}}(m) = \sum_{i=0}^n a_i C_{m+i}^m$ пучка $[\mathcal{E}] \in M(2; -1, 2, 2)$ удовлетворяет условию $\delta_{\mathcal{E}} := \text{НОД}(a_0, a_1, \dots, a_n) = 1$. Проверим, что $\delta_{\mathcal{E}} = 1$. Для этого воспользуемся известной формулой для $H_{\mathcal{E}}(m)$ (см. [4, р. 194]): $H_{\mathcal{E}}(m) = \chi(\mathcal{E}(m)) = \frac{2}{3}m^3 + 2m^2 + \frac{1}{3}m$. Отсюда $a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = -4, a_3 = 4$ и, тем самым, $\delta_{\mathcal{E}} = 1$, то $M_Q(2; -1, 2, 2)$ есть тонкое многообразие модулей.

Ввиду сказанного выше $\mathcal{M} \subset M_Q(2; -1, 2, 2)$ также является тонким многообразием модулей, то есть существует универсальное семейство $\mathbb{F}$ рефлексивных пучков на Q с базой $\mathcal{M}$.

Обозначим через X множество пар $(\langle \xi \rangle, C)$, где $\xi \in \text{Ext}^1(\mathcal{I}_C(1), \mathcal{O}_Q)$, а C – коника на Q . Заметим, что по конструкции Серра для пучков $\mathcal{F}$ (см. теорему 4.1 из статьи [13]) X как множество имеет следующее эквивалентное описание:

$$X = \{([\mathcal{F}], \langle s \rangle) \mid \langle s \rangle \in P(H^0(\mathcal{F}))\}. \quad (9)$$

Далее, обозначим через Y прямое произведение $Q \times G$ и рассмотрим проекции $f_1 : Y \rightarrow Q$ и $f_2 : Y \rightarrow G(2, 4)$. Для произвольных целых чисел a и b положим $\mathcal{O}_Y(a, b) := \mathcal{O}_Q(a) \boxtimes \mathcal{O}_G(b) = f_1^* \mathcal{O}_Q(a) \otimes f_2^* \mathcal{O}_G(b)$.

Так как $\text{codim}_Q C = 2$, то $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_Q(-1)) = \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_Q(-1)) = 0$ (см. [15, с. 311]). Поэтому, применяя к тройке $0 \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow \mathcal{O}_Q \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$ функтор $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_Q(-1))$, получаем $\mathcal{H}om(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_Q(-1)) = \mathcal{O}_Q(-1)$, так что $H^i(\mathcal{H}om(\mathcal{I}_C(1), \mathcal{O}_Q)) = 0$, $i \geq 1$. Отсюда и из длинной точной последовательности локальных и глобальных Ext-ов $0 \rightarrow H^1(\mathcal{H}om(\mathcal{I}_C(1), \mathcal{O}_Q)) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{I}_C(1), \mathcal{O}_Q) \rightarrow H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_C(1), \mathcal{O}_Q)) \rightarrow H^2(\mathcal{H}om(\mathcal{I}_C(1), \mathcal{O}_Q))$ имеем

$$\text{Ext}^1(\mathcal{I}_C(1), \mathcal{O}_Q) \simeq H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_C(1), \mathcal{O}_Q)). \quad (10)$$

Умножим тензорно точную тройку $0 \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow \mathcal{O}_Q \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$ на $\mathcal{O}_Q(1)$ и, применив к ней функтор $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_Q)$, выпишем часть длинной точной последовательности $\mathcal{E}xt$ -ов: $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_Q(1), \mathcal{O}_Q) \rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_C(1), \mathcal{O}_Q) \rightarrow \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_C(1), \mathcal{O}_Q) \rightarrow \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_Q(1), \mathcal{O}_Q)$. Из этой последовательности с учетом очевидных равенств $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_Q(1), \mathcal{O}_Q) = \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_Q(1), \mathcal{O}_Q) = 0$ получаем, что

$$\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_C(1), \mathcal{O}_Q) \simeq \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_C(1), \mathcal{O}_Q). \quad (11)$$

Имеем $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_C(1), \mathcal{O}_Q) = \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_Q) \otimes \mathcal{O}_Q(-1) = \det \mathcal{N}_{C/Q} \otimes \mathcal{O}_Q(-1) = \mathcal{O}_C(2) \otimes \mathcal{O}_Q(-1) = \mathcal{O}_C(1) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2)$ (см. [6, р. 236]). В итоге пучок $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_C(1), \mathcal{O}_Q)$ имеет вид:

$$\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_C(1), \mathcal{O}_Q) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2). \quad (12)$$

Отсюда и из равенства (11) получаем, что $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_C(1), \mathcal{O}_Q) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2)$. Тем самым из (10) следует, что $\text{Ext}^1(\mathcal{I}_C(1), \mathcal{O}_Q) = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2))$, то есть $\dim \text{Ext}^1(\mathcal{I}_C(1), \mathcal{O}_Q) = 3$ не зависит от коники $y = \{C\} \in G(2, 4)$. Отсюда в силу гладкости $G(2, 4)$ получаем, что морфизм замены базы (см. [16, р. 147])

$$\varphi_y^1 : \mathcal{E}xt_{f_2}^1(\mathcal{I}_Z(1, 0), \mathcal{O}_Y) \otimes \mathbf{k}_y \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{I}_C(1), \mathcal{O}_Q),$$

где $Z := \{(x, C) \in Y \mid x \in C\}$ и $\mathcal{I}_Z(1, 0) := \mathcal{I}_Z \otimes \mathcal{O}_Y(1, 0)$, является изоморфизмом для любой точки $C \in G(2, 4)$. Тем самым пучок относительных Ext-ов $\mathcal{E}xt_{f_2}^1(\mathcal{I}_Z(1, 0), \mathcal{O}_Y)$ локально свободен, и проективный спектр $X := \mathbf{P}((\mathcal{E}xt_{f_2}^1(\mathcal{I}_Z(1, 0), \mathcal{O}_Y))^\vee) = \text{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} S_{\mathcal{O}_{G(2, 4)}}^n (\mathcal{E}xt_{f_2}^1(\mathcal{I}_Z(1, 0), \mathcal{O}_Y))^\vee)$ симметрической алгебры пучка $(\mathcal{E}xt_{f_2}^1(\mathcal{I}_Z(1, 0), \mathcal{O}_Y))^\vee$ – неприводимая приведенная схема. При этом X как множество есть $\{(< \xi >, C) \mid \xi \in \text{Ext}^1(\mathcal{I}_C(1), \mathcal{O}_Q), \text{ а } C - \text{ коника на } Q\}$. Заметим, что по конструкции Серра для пучков $\mathcal{F}$ (см. теорему 4.1 из статьи [13]) X как множество имеет следующее эквивалентное описание:

$$X = \{([\mathcal{F}], < s >) \mid < s > \in P(H^0(\mathcal{F}))\}. \quad (13)$$

Предложение 3. Множество $\mathcal{M}$ классов изоморфизма стабильных рефлексивных пучков с $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 2$ на Q является неприводимым многообразием.

Доказательство. Рассмотрим универсальный пучок $\mathbb{F}$ на $\mathcal{M} \times Q$ и для $y \in \mathcal{M}$ положим $\mathcal{F}_y := \mathbb{F}|_{\{y\} \times Q}$. Рассмотрим проекцию $pr : \mathcal{M} \times Q \rightarrow \mathcal{M}$ и положим $\mathcal{N} := pr_*(\mathbb{F} \otimes (\mathcal{O}_Q(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathcal{M}}))$. В силу (8) для любой точки $y = [F] \in \mathcal{M}$ имеем

$$h^0(\mathcal{F}_y(1)) = 3, h^i(\mathcal{F}_y(1)) = 0, i > 0. \quad (14)$$

Поэтому замена базы [15, с. 370] показывает, что $\mathcal{N} \otimes \mathbf{k}_y = H^0(\mathcal{F}_y(1)) \simeq \mathbf{k}^3$, то есть пучок $\mathcal{N}$ локально свободен. Рассмотрим его геометрическую проективизацию $\pi : P(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{M}$. Для любой точки $y \in \mathcal{M}$ слой $\pi^{-1}(y)$ равен $P(H^0(\mathcal{F}_y(1)))$. Отсюда следует, что $P(\mathcal{N})$ как множество есть $\{(y, \langle s \rangle) : y \in \mathcal{M}, \langle s \rangle \in P(H^0(\mathcal{F}_y(1)))\}$, то есть в силу (13) множества $P(\mathcal{N})$ и X совпадают. В силу неприводимости схемы X схема $\mathcal{M}$ также неприводима. Предложение доказано. $\square$

Доказательство см. в §5.

Предложение 4. $\mathcal{M} \simeq \text{Grass}(2, 5) \setminus \mathbb{P}_3$. В частности, $\dim \mathcal{M} = 6$.

Рассмотрим множество классов пучков $[\mathcal{E}] \in M$, входящее в тройку (2), в которой $[\mathcal{E}^{\vee\vee}] \in \mathcal{M}$. Тогда из леммы 1 следует, что $\mu = \mathbf{k}_x$.

Теорема 2. Множество классов пучков $[\mathcal{E}] \in M$, входящее в тройку (2), в которой $[\mathcal{E}^{\vee\vee}] \in \mathcal{M}$ и $\mu = \mathbf{k}_x$, есть неприводимое многообразие M_1 размерности 10 в M .

Доказательство. Обозначим $Y = \mathcal{M} \times Q$. Пусть Δ – диагональное вложение $Q \hookrightarrow Q \times Q$, тогда $\mathcal{M} \times \Delta(Q) \hookrightarrow \mathcal{M} \times Q \times Q$. Рассмотрим введенный ранее универсальный пучок $\mathbb{F}$ на Y и проективный спектр его симметрической алгебры (как градуированного когерентного пучка $\mathcal{O}_Y$ -модулей) $\mathbb{P}(\mathbb{F}) := \text{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} S_{\mathcal{O}_Y}^n(\mathbb{F}))$

с проекцией $\pi : \mathbb{P}(\mathbb{F}) \rightarrow Y$ (см. [15, глава II, §7]). Нетрудно видеть, что ограничение $\mathcal{F}$ пучка $\mathbb{F}$ на любой слой проекции $pr_1 : Y = \mathcal{M} \times Q \rightarrow \mathcal{M}$ имеет гомологическую размерность 1 (это следует, например, из доказательства предложения 4 – см. среднюю горизонтальную тройку в диаграмме (45)). Так как $pr_1 : Y \rightarrow \mathcal{M}$ – гладкий плоский морфизм со слоем Q и пучок $\mathbb{F}$ – плоский над $\mathcal{M}$, то отсюда следует, что гомологическая размерность пучка $\mathcal{F}$ также равна 1. Тем самым согласно [17, Lemma 4.5] схема $\mathbb{P}(\mathbb{F})$ есть неприводимое многообразие.

На $\mathbb{P}(\mathbb{F})$ существует естественный эпиморфизм $\pi^*\mathbb{F} \xrightarrow{ev} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{F})}(1)$. Обозначим через $\mathbb{P}(\mathbb{F})_\Delta := (\pi \times id)^{-1}(\mathcal{M} \times \Delta(Q))$. Нетрудно видеть, что $\mathbb{P}(\mathbb{F})_\Delta$ совпадает с образом диагонального морфизма $\mathbb{P}(\mathbb{F}) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{F}) \times \mathbb{P}(\mathbb{F})$. Пусть $\mathbb{E}$ – ядро композиции

$\omega : \pi^*\mathbb{F} \boxtimes \mathcal{O}_Q \xrightarrow{ev \boxtimes id} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{F})}(1) \boxtimes \mathcal{O}_Q \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{F})}(1)|_{\mathbb{P}(\mathbb{F})_\Delta}$. Заметим, что пучок $\mathbb{E}$ является плоским над $\mathbb{P}(\mathbb{F})$, поскольку в точной тройке: $0 \rightarrow \mathbb{E} \rightarrow \pi^*\mathbb{F} \boxtimes \mathcal{O}_Q \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{F})}(1)|_{\mathbb{P}(\mathbb{F})_\Delta} \rightarrow 0$ средний и правый пучки плоские над $\mathbb{P}(\mathbb{F})$. Действительно, пучок $\pi^*\mathbb{F} \boxtimes \mathcal{O}_Q$ плоский над $\mathbb{P}(\mathbb{F})$, поскольку $\mathbb{F}$ плоский над Y . Пучок $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{F})}(1)|_{\mathbb{P}(\mathbb{F})_\Delta}$ является плоским над $\mathbb{P}(\mathbb{F})$ в силу изоморфизма $\mathbb{P}(\mathbb{F})_\Delta \simeq \mathbb{P}(\mathbb{F})$. Тем самым имеем морфизм $f_1 : \mathbb{P}(\mathbb{F}) \rightarrow M_Q(2; -1, 2, 0) : z \mapsto [\mathbb{E}]|_{z \times Q}$. По построению f_1 – вложение, образ которого составляет в M некоторую локально-замкнутую подсхему, которую мы обозначим через M_1 . По определению M_1 есть множество троек $([\mathcal{F}], x, \langle \varepsilon \rangle)$, где $\mathcal{F} \in \mathcal{M}$, x – точка на Q , а $\langle \varepsilon \rangle$ – класс изоморфизма ядра сюръекции $\varepsilon : \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{k}_x$. Отсюда получаем, что $\dim M_1 = \dim \mathcal{M} + \dim (\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathbf{k}_x)) / \dim (\text{Aut}(\mathbf{k}_x)) + 3$. В силу предложения 7 и того, что $\dim (\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathbf{k}_x)) / \dim (\text{Aut}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_x)) = 1$, имеем $\dim M_1 = 10$. Тем самым схема M содержит неприводимую локально-замкнутую подсхему M_1 . $\square$

Предложение 5. Многообразие M_1 рационально.

Доказательство. Как показано в доказательстве теоремы 2, M_1 биективно $\mathbb{P}(\mathbb{F})$, где $\mathbb{P}(\mathbb{F})$ бирационально изоморфно $\mathbb{P}_1 \times Y \simeq \mathbb{P}_1 \times \mathcal{M} \times Q$. Следовательно, для доказательства предложения достаточно проверить, что $\mathcal{M}$ рационально. Докажем рациональность $\mathcal{M}$. Согласно предложению 3 $\mathcal{M} = \text{Grass}(2, 5) \setminus \mathbb{P}_3$, а следовательно, $\mathcal{M}$ рационально. Предложение доказано. $\square$

Из неравенства (5), предложений 1, 2 и теоремы 2 следует

Теорема 3. Семейство пучков $[\mathcal{E}] \in M$ с $\dim(\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}) = 0$ совпадает с M_1 .

3. Пучки из M с одномерными особенностями

В настоящем параграфе рассматриваются пучки $\mathcal{E} \in M$, для которых $\dim \text{Supp} \mu = 1$, где $\mu = \mathcal{E}^{\vee\vee} \setminus \mathcal{E}$ – пучок в точной тройке (2). Тем самым пучок $\mathcal{E}$ имеет одномерные особенности. Мы покажем, что для любого такого пучка $\mathcal{E}$ его рефлексивная оболочка $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ есть спинорное расслоение $\mathcal{S}$ на Q (см. [4, p.191]). Далее мы показываем, что в M существует неприводимое семимерное семейство M_2 пучков на Q с особенностями вдоль подмножеств вида l , либо $l \cup x$, где l – прямая, а x – точка на Q и $x \notin l$ (теорема 4), и неприводимое семейство M_3 пучков с особенностью вдоль прямых l на Q (предложение 7), причем пучки в этих семействах M_2 и M_3 отличаются типом пучка μ , и пучки из M_3 не составляют компоненты в M . Далее, мы показываем, что пучки с другими одномерными особенностями составляют множество $\overline{M_Q(-1, 2)} \setminus M_Q(-1, 2)$ в M (предложение 8). В конце параграфа мы показываем, что M есть дизъюнктивное объединение множеств: $M = M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3 \sqcup \overline{M_Q(-1, 2)}$ (теорема 6).

Лемма 3. Пусть $\mathcal{A}$ – стабильный рефлексивный пучок ранга 2 на Q с классами Черна $c_1(\mathcal{A}) = -1$, $c_2(\mathcal{A}) = 1$. Тогда $\mathcal{A} \simeq \mathcal{S}$, где $\mathcal{S}$ – спинорное расслоение на Q .

Доказательство см. в §5.

Для произвольного одномерного пучка $\mathcal{F}$ на Q через $\text{mult}(\mathcal{F})$ будем обозначать положительное число $h^0(\mathcal{F}|_H)$, где H – общее гиперплоское сечение квадрики Q .

Предложение 6. Пусть $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ – пучок из тройки (2), удовлетворяющий условию $\dim(\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}) = 1$. Тогда $\mathcal{E}^{\vee\vee} = \mathcal{S}$ и $\text{mult}(\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}) = 1$.

Доказательство. Пусть $\dim \text{Supp} \mu = 1$, где $\mu = \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}$. В этом случае $c_t(\mu) = 1 - m[l]t^2 + q[pt]t^3$, где $m = \text{mult}(\mu) > 0$ и $q \in \mathbb{Z}$. Из точной тройки (2) с учетом формул (1) получаем многочлен Чженя пучка $\mathcal{E}^{\vee\vee}$:

$$c_t(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = c_t(\mathcal{E})c_t(\mu) = 1 - [h]t + (2 - m)[l]t^2 + (m + q)[pt]t^3. \quad (15)$$

В силу того, что $\mathcal{E}$ – стабильный пучок, $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ также стабилен (см. замечание перед леммой 1). С другой стороны, из формулы (15) вытекает, что

$$c_1(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = -1, \quad c_2(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 2 - m. \quad (16)$$

Поскольку $m > 0$, мы получаем, что $c_2(\mathcal{E}^{\vee\vee}) \leq 1$. С другой стороны, для общего гиперплоского сечения H квадрики Q согласно теореме 1.6 из [12] ограничение $\mathcal{E}^{\vee\vee}|_H$ полустабильно, поэтому неравенство Богомолова (см. [18, р. 71]) дает $c_2(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = c_2(\mathcal{E}^{\vee\vee}|_H) \geq 1$. Следовательно, $c_2(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = \text{mult}(\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}) = 1$. Отсюда и из леммы 2 с учетом (16) получаем утверждение предложения. $\square$

Покажем теперь, что в M существует неприводимое семимерное семейство пучков на Q с особенностями вдоль подмножества $l \cup x$, где l – прямая на Q и x – точка на Q , $x \notin l$, и что пучки с другими одномерными особенностями не составляют компонент в M .

Рассмотрим точную тройку (2), в которой $\dim \text{Supp} \mu = 1$. Тогда из предложения 6 мы получаем, что эта тройка имеет вид

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S} \xrightarrow{\alpha} \mu \rightarrow 0, \quad (17)$$

и $\text{mult}(\mu) = 1$. В частности, $\text{Supp}(\mu) = l$ – прямая на Q .

Обозначим через $\mathcal{T}(\mu)$ максимальный нульмерный подпучок пучка μ . Тогда имеет место следующая точная тройка: $0 \rightarrow \mathcal{T}(\mu) \rightarrow \mu \rightarrow \mathcal{O}_l(-k) \rightarrow 0$, из которой следует, что

$$k := 1 + \chi(\mathcal{T}(\mu)) - \chi(\mu). \quad (18)$$

Последняя тройка вместе с (17) продолжается до диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & 0 & \\ & & & \uparrow & & \uparrow & \\ & & & \mathcal{O}_l(-k) & = & \mathcal{O}_l(-k) & \\ & & & \uparrow \epsilon & & \uparrow \beta & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{S} & \xrightarrow{\alpha} & \mu \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{S}' & \longrightarrow & \mathcal{T}(\mu) \longrightarrow 0 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & 0 & & 0, \end{array} \quad (19)$$

где $l = \text{Supp} \mu$, $\epsilon = \beta \circ \alpha$ и $\mathcal{S}'$ – ядро сюръекции $\mathcal{S} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{O}_l(-k)$. Так как $\chi(\mathcal{E}) = -1$ (см. (4)) и, как нетрудно видеть, $\chi(\mathcal{S}) = 0$, то из диаграммы (19) с учетом формулы (18) получаем $k = \chi(\mathcal{T}(\mu)) = h^0(\mathcal{T}(\mu)) \geq 0$. Поэтому ввиду того, что $\mathcal{S}|_l = \mathcal{O}_l \oplus \mathcal{O}_l(-1)$, сюръекция $\mathcal{S} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{O}_l(-k)$ показывает, что для k возможны два случая: 1) $k = 1$ и 2) $k = 0$. Рассмотрим оба эти случая.

1) $k = 1$. В этом случае $\mathcal{T}(\mu) = \mathbf{k}_x$ – поле вычетов некоторой точки $x \in Q$, и правый столбец диаграммы (19) имеет вид:

$$0 \rightarrow \mathbf{k}_x \rightarrow \mu \rightarrow \mathcal{O}_l(-1) \rightarrow 0. \quad (20)$$

Теорема 4. Рассмотрим множество M_2 классов пучков $[\mathcal{E}] \in M$, входящих в тройку (17), где μ – пучок из тройки (20), в которой либо а) $x \notin l$ и $\mu = \mathcal{O}_l(-1) \oplus \mathbf{k}_x$, либо б) $x \in l$ и тройка (20) не расщепляется. Тогда M_2 является неприводимым множеством размерности 7.

Доказательство. Пусть $\Gamma = \{(x, l) \in Q \times \mathbb{P}_3 | x \in l\}$ – универсальное семейство прямых на Q . Рассмотрим раздутие $\sigma : Y \rightarrow Q \times \mathbb{P}_3$ вдоль Γ . Пусть $\Delta : Q \hookrightarrow Q \times Q$ – диагональное вложение. Положим $Y' := Y \times_{\mathbb{P}_3} \Gamma$, $Y'' := Y \times_Q \Delta(Q)$. Пусть $pr_1 : Y \times Q \rightarrow Q$ и $pr_2 : Y \times Q \rightarrow Y$ – проекции. На $Y \times Q$ имеем пучок $\mathcal{K} = \mathcal{O}_Y \boxtimes \mathcal{O}_Q(-1)|_{Y' \cup Y''}$, ограничение которого на $y \times Q$, где $y \in Y$, дает пучок μ из тройки (20), удовлетворяющий условию настоящей теоремы.

Пусть y – произвольная точка в Y и $\mu := \mathcal{K}_y$ – пучок, входящий в точную тройку (20). Применяя к этой тройке функтор $\mathcal{H}om(\mathcal{S}, \cdot)$, получаем $0 \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{S}, \mathbf{k}_x) \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{S}, \mu) \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{S}, \mathcal{O}_l(-1)) \rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{S}, \mathbf{k}_x)$. Поскольку $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{S}, \mathbf{k}_x) = 0$ в силу локальной свободы $\mathcal{S}$, из данной последовательности имеем, что $\dim \mathcal{H}om(\mathcal{S}, \mu) = \dim \mathcal{H}om(\mathcal{S}, \mathbf{k}_x) + \dim \mathcal{H}om(\mathcal{S}, \mathcal{O}_l(-1)) = 2 + 1 = 3$. Аналогично находим, что $\dim \mathcal{E}xt^1(\mathcal{S}, \mu) = 0$. Полученные равенства в силу замены базы (см. [16, р. 147]) показывают, что пучок $\mathcal{Z} := pr_{2*} \mathcal{H}om(\mathcal{S} \boxtimes \mathcal{O}_Y, \mathcal{K})$ – локально свободный пучок ранга 3, и слой пучка $\mathcal{Z}$ над точкой из $y \in Y$ есть $\mathcal{H}om(\mathcal{S}, \mu)$. Следовательно, проективный спектр $\mathbb{P}(\mathcal{Z}^\vee)$ – неприводимое многообразие.

Рассмотрим проекцию $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{Z}^\vee) \rightarrow Y$ и универсальный морфизм $\varphi : \mathcal{S} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{Z}^\vee)}(-1) \rightarrow \pi^* \mathcal{K}$. Обозначим через U открытое плотное множество $\{z \in \mathbb{P}(\mathcal{Z}^\vee) | \varphi \otimes \mathbf{k}_z : \mathcal{S} \rightarrow \mu \text{ – эпиморфизм}\}$ в $\mathbb{P}(\mathcal{Z}^\vee)$, и в U рассмотрим открытое плотное подмножество $U' := \{z \in U | \text{образ } \mu \text{ эпиморфизма } \varphi \otimes \mathbf{k}_z \text{ распадается в прямую сумму } \mathcal{O}_l(-1) \oplus \mathbf{k}_x\}$. Пусть $pr_3 : U' \times Q \rightarrow Q$ – проекция. Над $U' \times Q$ определена универсальная тройка: $0 \rightarrow \mathbb{E} \rightarrow \mathcal{S} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{Z}^\vee)}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_Q \xrightarrow{\varphi} \pi^* \mathcal{K} \boxtimes \mathcal{O}_Q \rightarrow 0$, где $\mathbb{E}$ – ядро эпиморфизма φ . По построению ограничение этой тройки на $z \times Q$ для произвольной точки $z \in U'$ совпадает с тройкой (17). Поэтому имеем морфизм $f : U' \rightarrow M(2; -1, 2, 0) : z \mapsto [\mathbb{E}|_{z \times Q}]$. По конструкции f – инъективный морфизм и, значит, $\dim U' = \dim f(U')$. Обозначим через M_2 замыкание $f(U')$ в M . Имеем $\dim M_2 = \dim U' = \dim \mathbb{P}(\mathcal{Z}^\vee)$, где $\dim \mathbb{P}(\mathcal{Z}^\vee) = \dim \mathcal{H}om(\mathcal{S}, \mu) - \dim \text{Aut}(\mathcal{O}_l(-1) \oplus \mathbf{k}_x) + \dim Y = 1 + 6 = 7$. Теорема 4 доказана. $\square$

Предложение 7. Рассмотрим множество M_3 классов пучков $[\mathcal{E}] \in M$, входящих в тройку (17), в которой $\mu = \mathcal{O}_l(-1) \oplus \mathbf{k}_x$ и $x \in l$. Тогда M_3 – неприводимое множество размерности 4.

Доказательство. Пусть $\Lambda = \{(x, l) \in Q \times \mathbb{P}_3 | x \in l\}$ – тело семейства прямых на Q , и пусть $pr : Q \times \Lambda \rightarrow \Lambda$ – проекция. Рассмотрим расслоенное произведение $\Lambda' := \Lambda \times_{\mathbb{P}_3} \Lambda$ и многообразие $\Lambda'' := Q_\Delta \times \mathbb{P}_3 \cap Q \times \Lambda$, где Q_Δ – диагональ в $Q \times Q$, а пересечение берется в $Q \times Q \times \mathbb{P}_3$. Оба многообразия Λ' и Λ'' естественным образом лежат в $Q \times \Lambda$, притом $\Lambda'' \simeq \Lambda$. На $Q \times \Lambda$ рассмотрим пучок $\mathcal{W} := \mathcal{O}_Q(-1) \boxtimes \mathcal{O}_\Lambda|_{\Lambda'} \oplus \mathcal{O}_{\Lambda''}$. По построению, для произвольной точки $y \in \Lambda$ пучок $\mu := \mathcal{W}|_{Q \times y}$ удовлетворяет условию настоящего предложения. Равенства $\dim \mathcal{H}om(\mathcal{S}, \mu) = 3$ и $\dim \mathcal{E}xt^1(\mathcal{S}, \mu) = 0$ вместе с морфизмом замены базы (см. [16, р. 147]) показывают,

что $\mathcal{H} := pr_* \mathcal{H}om(\mathcal{S} \boxtimes \mathcal{O}_\Lambda, \mathcal{W})$ – локально свободный пучок ранга 3, и слой пучка $\mathcal{H}$ над точкой $y \in \Lambda$ есть $\text{Hom}(\mathcal{S}, \mu)$. Следовательно, проективный спектр $\mathbb{P}(\mathcal{H}^\vee)$ неприводим в силу неприводимости Λ .

Рассмотрим проекцию $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{H}^\vee) \rightarrow \Lambda$, естественный морфизм $\varphi : \mathcal{S} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{H}^\vee)}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_Q \boxtimes \pi^* \mathcal{W}$ и открытое плотное множество $U := \{z \in \mathbb{P}(\mathcal{H}^\vee) \mid \varphi|_Q \times z - \text{эпиморфизм}\}$ в $\mathbb{P}(\mathcal{H}^\vee)$. Над $V \times Q$ определена универсальная тройка: $0 \rightarrow \mathbb{E} \rightarrow \mathcal{S} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{H}^\vee)}(-1) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_Q \boxtimes \pi^* \mathcal{W} \rightarrow 0$, где $\mathbb{E}$ – ядро эпиморфизма φ . По построению имеем морфизм $f : V \rightarrow M : z \mapsto [\mathbb{E}|_{Q \times z}]$. По конструкции f – инъективное отображение V на локально замкнутое подмножество в M , которое обозначим через M_3 . Имеем $\dim M_3 = \dim V = \dim \mathbb{P}(\mathcal{H}^\vee)$, где $\dim \text{Hom}(\mathcal{S}, \mu) = 3$ и $\dim \text{Aut}(\mathcal{O}_l(-1) \oplus \mathbf{k}_x) = 3$ (В последнем равенстве учтено, что $x \in l$). Отсюда $\dim \mathbb{P}(\mathcal{H}^\vee) = \dim \text{Hom}(\mathcal{S}, \mu) - \dim \text{Aut}(\mathcal{O}_l(-1) \oplus \mathbf{k}_x) + \dim \Lambda = 3 - 3 + 4 = 4$. Предложение 7 доказано. $\square$

2) $k = 0$. В этом случае $\mathcal{T}(\mu) = 0$, $\mu = \mathcal{O}_l$, и средняя строка диаграммы (19) имеет вид:

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{O}_l \rightarrow 0. \quad (21)$$

Предложение 8. Множество классов пучков $[\mathcal{E}] \in M$, входящих в точную тройку (21), составляет множество $\overline{M_Q(-1, 2)} \setminus M_Q(-1, 2)$.

Доказательство. Для каждого пучка $[\mathcal{E}] \in \overline{M_Q(-1, 2)}$ определена следующая точная тройка:

$$\xi : 0 \rightarrow \mathcal{O}_Q(-1) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{I}_{l_1 \cup l_2} \rightarrow 0, \quad (22)$$

где $\mathcal{I}_{l_1 \cup l_2}$ – пучок идеалов пары непересекающихся прямых или двойной прямой (см. [10, предложение 1]), а $\xi \in \text{Ext}^1(\mathcal{I}_{l_1 \cup l_2}, \mathcal{O}_Q(-1))$ – элемент, определяющий расширение (22).

Далее, по аналогии с (10)–(12) получаем $\text{Ext}^1(\mathcal{I}_{l_1 \cup l_2}, \mathcal{O}_Q(-1)) = H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_{l_1 \cup l_2}, \mathcal{O}_Q(-1)))$, $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_{l_1 \cup l_2}, \mathcal{O}_Q(-1)) = \mathcal{O}_{l_1} \oplus \mathcal{O}_{l_2}$. Откуда $\text{Ext}^1(\mathcal{I}_{l_1 \cup l_2}, \mathcal{O}_Q(-1)) = H^0(\mathcal{O}_{l_1} \oplus \mathcal{O}_{l_2})$. Следовательно, элемент ξ из (22) представим в виде $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, где $\xi_1 \in H^0(\mathcal{O}_{l_1})$ и $\xi_2 \in H^0(\mathcal{O}_{l_2})$. Если пучок $\mathcal{E}$ локально свободен, то по конструкции Серра имеем $\xi_1 \neq 0$ и $\xi_2 \neq 0$ (см. [13, р. 136]).

Если теперь положить $\xi_1 \neq 0$ и $\xi_2 = 0$, то легко видеть, что из тройки (22) и леммы о змее следует тройка $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{O}_{l_2} \rightarrow 0$, которая совпадает с (21) при $l = l_2$. Отсюда получаем, что классы пучков $\mathcal{E}$, для которых $\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E} = \mathcal{O}_l$, лежат в $\overline{M_Q(-1, 2)} \setminus M_Q(-1, 2)$. Предложение доказано. $\square$

Легко проверить, используя результаты работы [10], что, обратно, всякий пучок из $\overline{M_Q(-1, 2)} \setminus M_Q(-1, 2)$ удовлетворяет тройке (21).

Из теоремы 4 и предложений 6, 7 и 8 вытекает следующая теорема.

Теорема 5. Множество классов пучков $[\mathcal{E}] \in M \setminus \overline{M_Q(-1, 2)}$, для которых $\dim(\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}) = 1$, совпадает с $M_2 \sqcup M_3$.

Из теорем 2, 3, 4, 5 и предложения 7 следует

Теорема 6. M есть дизъюнктное объединение множеств:

$M = M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3 \sqcup \overline{M_Q(-1, 2)}$. При этом $\dim M_1 = 10$, $\dim M_2 = 7$, $\dim M_3 = 4$.

4. Доказательство теоремы 1. Монады для пучков из M

В настоящем параграфе доказывается теорема 1, в которой утверждается неприводимость схемы $M \setminus \overline{M_Q(-1, 2)}$ (см. §1.). Кроме того, в конце этого параграфа строятся монады для пучков из M (теорема 7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Так как для всякого пучка $[\mathcal{E}] \in M$ имеем $c_1(E) = -1$, то $\mathcal{E}$ стабилен (см., например, [12, р. 12]). Следовательно, $T_{[\mathcal{E}]}M = \text{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, и по теории деформации [18, р. 101] для $\mathcal{E}$ выполняется неравенство $\dim_{[\mathcal{E}]} M \geq \dim \text{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) - \dim \text{Ext}^2(\mathcal{E}, \mathcal{E})$. Положим $\chi(\mathcal{E}, \mathcal{E}) := \sum_i (-1)^i \dim \text{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{E})$. В силу стабильности пучка $\mathcal{E}$ имеем $\dim \text{Ext}^0(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 1$, и с учетом двойственности Серра $\dim \text{Ext}^3(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 0$. Отсюда $\dim \text{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) - \dim \text{Ext}^2(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = -\chi(\mathcal{E}, \mathcal{E}) + 1$. Далее, согласно [4, р. 194] для локально свободных пучков $[\mathcal{E}] \in M$ верна формула $\chi(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 7 - 6c_2(\mathcal{E})$. Повторяя теперь для случая квадрики Q рассуждения, проведенные для случая $\mathbb{P}_3$ в доказательстве предложения 3.4 из [13], получаем, что эта же формула верна и для произвольного пучка $[\mathcal{E}] \in M$. Подставляя ее в предыдущее соотношение, получаем равенство $\dim_{[\mathcal{E}]} M \geq \dim \text{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) - \dim \text{Ext}^2(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 6$. Поэтому M_3 не является компонентой схемы M , поскольку в силу теоремы 6 $\dim M_3 = 4$. Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно проверить, что $M_2 \subset \overline{M}_1$.

Покажем, что $M_2 \subset \overline{M}_1$. Для этого рассмотрим произвольный пучок $[\mathcal{E}] \in M_1$, входящий в точную тройку (2): $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{k}_y \rightarrow 0$, где $\mathcal{F} := \mathcal{E}^{\vee\vee}$, а y – точка на Q (см. теорема 2). С другой стороны, $\mathcal{F}$ удовлетворяет тройке (8): $0 \rightarrow \mathcal{O}_Q(-1) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow 0$, где C – плоская коника на Q . Две последние тройки объединяются в диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_Z(-1) & \longrightarrow & \mathbf{k}_y & \longrightarrow & \mathcal{A} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_Q(-1) & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{I}_C \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_Z(-1) & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{I}_{\tilde{C}} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0,
 \end{array} \tag{23}$$

где $\mathcal{A} = \mathcal{I}_C/\mathcal{I}_{\tilde{C}}$, $\tilde{C}$ – некоторая подсхема в Q , содержащая C , и Z – некоторая подсхема в Q . Из верхней тройки диаграммы (23) следует, что либо 1) $Z = \{y\}$ –

точка и тем самым $\mathcal{A} = 0$, либо 2) $Z = \emptyset$ и $\mathcal{A} = \mathbf{k}_y$. Рассмотрим оба эти случая.

1) $Z = \{y\}$, $\mathcal{A} = 0$. В этом случае $\tilde{C} = C$ и нижняя тройка диаграммы (23) принимает вид: $0 \rightarrow \mathcal{I}_y(-1) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow 0$. Эта тройка, тензорно умноженная на $\mathcal{O}_Q(1)$, продолжается до диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_Q(-1) & \longrightarrow & 2\mathcal{O}_Q & \longrightarrow & \mathcal{I}_C(1) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow ev & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_y & \longrightarrow & \mathcal{E}(1) & \longrightarrow & \mathcal{I}_C(1) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \mathcal{I}_{y,H} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{I}_{y,H} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0, & &
 \end{array} \tag{24}$$

где ev – морфизм вычисления, а H – некоторое гиперплоское сечение Q . Итак, $[\mathcal{E}] \in M_1$ при условии $\mathcal{A} = 0$ входит в точную тройку:

$$0 \rightarrow 2\mathcal{O}_Q \xrightarrow{ev} \mathcal{E}(1) \rightarrow \mathcal{I}_{y,H} \rightarrow 0. \tag{25}$$

2) $Z = \emptyset$, $\mathcal{A} = \mathbf{k}_y$. В этом случае точны тройки $0 \rightarrow \mathcal{O}_Q(-1) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{I}_{\tilde{C}} \rightarrow 0$ и $0 \rightarrow \mathcal{I}_{\tilde{C}} \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow \mathbf{k}_y \rightarrow 0$, из которых вытекает диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_Q & \longrightarrow & 2\mathcal{O}_Q & \longrightarrow & \mathcal{O}_Q \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow ev & & \downarrow ev \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_Q & \longrightarrow & \mathcal{E}(1) & \longrightarrow & \mathcal{I}_{\tilde{C}}(1) \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & \mathcal{I}_{y,H} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{I}_{y,H} \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0.
 \end{array} \tag{26}$$

Из этой диаграммы следует, что пучок $[\mathcal{E}] \in M_1$ в случае $\mathcal{A} = \mathbf{k}_y$ также входит в тройку (25). Таким образом, всякий пучок $[\mathcal{E}] \in M_1$ входит в тройку (25).

Покажем теперь, что всякий пучок $[\mathcal{E}] \in M_2 \sqcup M_3$ также входит в тройку (25). По определению (теорема 4 и предложение 7) $\mathcal{E}$ входит в тройку (17), в которой μ удовлетворяет тройке: $0 \rightarrow \mathbf{k}_x \rightarrow \mu \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_l(-1) \rightarrow 0$. Из последней тройки, подкрученной на $\mathcal{O}_Q(1)$ следует, что $h^0(\mu(1)) = 2$ и поэтому из тройки (17), подкрученной на $\mathcal{O}_Q(1)$, следует, что $h^0(\mathcal{E}(1)) \geq 2$. Нетрудно видеть, что два общих сечения s_1 и s_2

из $H^0(\mathcal{E}(1))$ порождают пучок $\mathcal{E}(1)$ в общей точке и тем самым дают инъективный морфизм $s = (s_1, s_2) : 2\mathcal{O}_Q \rightarrow \mathcal{E}(1)$. Этот морфизм продолжается до диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & (27) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & 2\mathcal{O}_Q & \xrightarrow{s} & \mathcal{E}(1) & \longrightarrow & \mathcal{R} \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & 2\mathcal{O}_Q & \xrightarrow{\tilde{s}} & \mathcal{S}(1) & \longrightarrow & \mathcal{I}_{l',H}(1) \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow \alpha & & \downarrow \eta \\
 & & & & \mu(1) & \equiv & \mu(1) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0,
 \end{array}$$

в которой $\mathcal{R} := \text{coker } s$, $\tilde{s}$ и η – индуцированные морфизмы, $H = (\lambda^2 \tilde{s})_0$ – гиперплоское сечение Q , а l' – некоторая прямая в H . Правая вертикальная тройка последней диаграммы продолжается до диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & (28) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathbf{k}_x \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{I}_{l',H}(1) & \xrightarrow{\eta} & \mu(1) \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow \beta \circ \eta & & \downarrow \beta \\
 & & & & \mathcal{O}_l & \equiv & \mathcal{O}_l \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0,
 \end{array}$$

в которой $\mathcal{L} = \ker \beta \circ \eta$. Из средней вертикальной тройки этой диаграммы получаем, что $\mathcal{L} = \mathcal{I}_{l \cup l', H}(1)$. Так как $\text{im}(\beta \circ \eta) = \mathcal{O}_l$, то $l \cap l' \neq \emptyset$, и поэтому $\mathcal{L} = \mathcal{O}_H$. Отсюда из верхней горизонтальной тройки диаграммы (28) получаем, что $\mathcal{R} = \mathcal{I}_{x,H}$. Поэтому верхняя горизонтальная тройка диаграммы (27) принимает вид: $0 \rightarrow 2\mathcal{O}_Q \rightarrow \mathcal{E}(1) \rightarrow \mathcal{I}_{x,H} \rightarrow 0$. Таким образом, мы показали, что всякий пучок $[\mathcal{E}] \in M_2 \sqcup M_3$ также входит в тройку (25).

Итак, всякий пучок из $M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3$ входит в тройку (25). Воспользуемся этим для доказательства существования неприводимого семейства D , снабженного морфизмом f в схему M , такого, что $f(D) \supset M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3$. Для этого рассмотрим график инциденции $\Upsilon := \{(x, \mathbb{P}_3) \in \mathbb{P}_4 \times \mathbb{P}_4^\vee \mid x \in \mathbb{P}_3\}$, и пусть $pr : \mathbb{P}_4 \times \mathbb{P}_4^\vee \rightarrow \mathbb{P}_4$ – проекция, где $\mathbb{P}_4 = \text{Span } Q$. Положим $T := pr^{-1}(Q) \cap \Upsilon$, $P := Q \times T$. Нетрудно видеть, что T есть расслоение над Q со слоем $\mathbb{P}_3$, так что T неприводимо, гладко и рационально.

Возьмем произвольную точку $h = (y, \mathbb{P}_3) \in T$, и пусть $H := \mathbb{P}_3 \cap Q$. Спектральная последовательность локальных и глобальных Ext-ов: $E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{E}xt^q(\mathcal{I}_{y,H}, \mathcal{O}_Q)) \Rightarrow \text{Ext}^{p+q}(\mathcal{I}_{y,H}, \mathcal{O}_Q)$ дает $0 \rightarrow H^1(\mathcal{H}om(\mathcal{I}_{y,H}, \mathcal{O}_Q)) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{I}_{y,H}, \mathcal{O}_Q) \rightarrow H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_{y,H}, \mathcal{O}_Q)) \rightarrow H^2(\mathcal{H}om(\mathcal{I}_{y,H}, \mathcal{O}_Q))$. Из этой последовательности с учетом равенства $\mathcal{H}om(\mathcal{I}_{y,H}, \mathcal{O}_Q) = 0$ имеем

$$\text{Ext}^1(\mathcal{I}_{y,H}, \mathcal{O}_Q) = H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_{y,H}, \mathcal{O}_Q)). \quad (29)$$

Применим к точной тройке $0 \rightarrow \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathcal{I}_y \rightarrow \mathcal{I}_{y,H} \rightarrow 0$ функтор $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_Q)$ и выпишем часть длинной точной последовательности $\mathcal{E}xt$ -ов:

$0 \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{I}_y, \mathcal{O}_Q) \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{O}(-1), \mathcal{O}_Q) \rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_{y,H}, \mathcal{O}_Q) \rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_y, \mathcal{O}_Q)$. Из этой последовательности с учетом равенств $\mathcal{H}om(\mathcal{I}_y, \mathcal{O}_Q) = \mathcal{O}_Q$ и $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_y, \mathcal{O}_Q) = 0$ получаем, что $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_{y,H}, \mathcal{O}_Q) = \mathcal{O}_Q(1)/\mathcal{O}_Q = \mathcal{O}_H(1)$. Отсюда и из равенства (29) следует, что $\text{Ext}^1(\mathcal{I}_{y,H}, 2\mathcal{O}_Q) = H^0(2\mathcal{O}_H(1)) = \mathbf{k}^8$. Рассмотрим проекцию $g : P \rightarrow T$, и пусть $L := \{(x, (y, \mathbb{P}_3)) \in P \mid x = y\}$ – универсальная подсхема в P . Из предыдущего равенства и того, что многообразие T , определенное выше, является гладким, получаем, что для всех точек $h = (y, \mathbb{P}_3) \in T$ морфизм замены базы $\phi_h^1 : \mathcal{E}xt_g^1(\mathcal{I}_{L,P}, 2\mathcal{O}_P) \otimes \mathbf{k}_h \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{I}_{y,\mathbb{P}_3 \cap Q}, 2\mathcal{O}_Q)$ является изоморфизмом, и пучок относительных Ext-ов $\mathcal{E}xt_g^1(\mathcal{I}_{L,P}, 2\mathcal{O}_P)$ локально свободен (см. [16, р. 147]).

Положим $D := \mathbb{P}((\mathcal{E}xt_g^1(\mathcal{I}_{L,P}, 2\mathcal{O}_P)^\vee)$. Из локальной свободы пучка $\mathcal{E}xt_g^1(\mathcal{I}_{L,P}, 2\mathcal{O}_P)$ и неприводимости T следует, что D – неприводимое проективное многообразие, рациональное в силу рациональности T .

По построению на $D \times Q$ определен пучок $\mathbb{E}$, являющийся универсальным семейством расширений вида (25) (см. [19, р. 110]). Так как согласно доказанному выше пучки из M_1 , M_2 и M_3 являются такими расширениями, то $f(D) \supset M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3$, где $f : D \rightarrow M : t \mapsto [\mathbb{E}|_{t \times Q}]$ – модулярный морфизм. Отсюда в силу теоремы 6, неприводимости и проективности D получаем, что $f(D) = \overline{M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3}$. Поэтому в силу неравенства $\dim M_1 = 10 > 7 = \max\{\dim M_2, \dim M_3\}$ (теорема 6) и неприводимости D получаем, что

$$M_2 \sqcup M_3 \subset \overline{M_1} = \overline{M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3}. \quad (30)$$

При этом компонента $\overline{M_1}$ имеет размерность 10 и в силу предложения 5 рациональна. Теорема 1 доказана. $\square$

Дадим теперь описание пучков $\mathcal{E}$ из $M_Q(2; -1, 2, 0)$ с помощью монад. С начала рассмотрим произвольный пучок $\mathcal{E}$ из $\overline{M_Q(-1, 2)} \setminus M_Q(-1, 2)$. В предложении 8 было показано, что $\mathcal{E}$ из $\overline{M_Q(-1, 2)} \setminus M_Q(-1, 2)$ входит в точную тройку $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow S \rightarrow \mathcal{O}_l \rightarrow 0$, где l – некоторая прямая на Q . Эта тройка стандартным образом продолжается до диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{O}_l \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow \beta & & \uparrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{O}_Q \longrightarrow 0, \end{array} \quad (31)$$

в которой $\ker \beta = \ker \gamma = \mathcal{I}_l$. Точная тройка $0 \rightarrow \mathcal{I}_l \rightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\beta} \mathcal{S} \rightarrow 0$, распадается, поскольку, как легко видеть, $\text{Ext}^1(\mathcal{S}, \mathcal{I}_l) = H^1(\mathcal{S}^\vee \otimes \mathcal{I}_l) = 0$. Поэтому $\mathcal{C} = \mathcal{I}_l \oplus \mathcal{S}$

имеет резольвенту $0 \rightarrow \mathcal{O}_Q(-1) \rightarrow 2S \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$, которая вместе с нижней тройкой в (31) дает монаду :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-1) \rightarrow 2S \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0, \quad (32)$$

с кохомологическим пучком $\mathcal{E}$.

Далее, пучки из $M_Q(-1, 2)$ также являются кохомологическими пучками монады (32) согласно замечанию (4.8) на странице 219 работы Оттавиани и Шурика [4]. Таким образом, мы получаем, что всякий пучок $[\mathcal{E}] \in \overline{M_Q(-1, 2)}$ является кохомологией монады (32).

Теперь рассмотрим пучки $[\mathcal{E}]$ из M_1 . Всякий такой пучок $\mathcal{E}$ входит в тройку $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{\vee\vee} \xrightarrow{\varepsilon} \mu \rightarrow 0$, в которой $\mu = \mathcal{O}_y$ есть поле вычетов точки y на Q и $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ – пучок из $\mathcal{M}$ (см. теорему 2). Как показано в доказательстве предложения 4, всякий пучок $\mathcal{F} \in \mathcal{M}$ (в нашем случае $\mathcal{F} = \mathcal{E}^{\vee\vee}$) удовлетворяет тройке (8), а тем самым диаграмме (45), средняя горизонтальная тройка которой имеет вид: $0 \rightarrow \mathcal{O}_Q(-2) \rightarrow 3\mathcal{O}_Q(-1) \xrightarrow{\psi} \mathcal{F} \rightarrow 0$, $\mathcal{F} = \mathcal{E}^{\vee\vee}$. Из этой и предыдущей тройки непосредственно следует монада с кохомологическим пучком $\mathcal{E}$:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-2) \rightarrow 3\mathcal{O}(-1) \xrightarrow{\varepsilon \circ \psi} \mathcal{O}_y \rightarrow 0. \quad (33)$$

Далее, в силу формулы (30) и теоремы 6 имеем

$$\overline{M}_1 \setminus (M_1 \sqcup \overline{M_Q(-1, 2)}) = M_2 \sqcup M_3. \quad (34)$$

Возьмем произвольный пучок $[\mathcal{E}] \in M_2 \sqcup M_3$ и рассмотрим для него тройки (17) и (20) : $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S} \xrightarrow{a} \mu \rightarrow 0$, $0 \rightarrow \mathcal{O}_y \rightarrow \mu \xrightarrow{b} \mathcal{O}_l(-1) \rightarrow 0$ и индуцированную тройку: $0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{S} \xrightarrow{b \cdot a} \mathcal{O}_l(-1) \rightarrow 0$, где $\mathcal{K} := \ker(b \cdot a)$. Простое вычисление с этой тройкой показывает, что $H^0(\mathcal{K}(1)) = 3$ и что пучок $\mathcal{K}(1)$ порождается своими сечениями, то есть точна тройка $0 \rightarrow \ker(ev) \rightarrow 3\mathcal{O}_Q(-1) \xrightarrow{ev} \mathcal{K} \rightarrow 0$, где $\ker(ev) = (\det(\mathcal{K}(1)))^\vee(-1) = \mathcal{O}_Q(-2)$. Эта тройка вместе с тройкой $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{O}_y \rightarrow 0$ показывает, что $\mathcal{E}$ является кохомологией монады (33).

Как следствие, из монад (32), (33) и теоремы 1 получаем следующую теорему.

Теорема 7. *Всякий пучок из $M_Q(2; -1, 2, 0) = \overline{M_Q(-1, 2)} \sqcup \overline{M}_1$ является кохомологией монады (32) либо монады (33). Более точно,*

- (i) *всякий пучок $[\mathcal{E}] \in \overline{M_Q(-1, 2)}$ является кохомологией монады (32),*
- (ii) *всякий пучок $[\mathcal{E}] \in \overline{M}_1 \setminus (\overline{M}_1 \cap \overline{M_Q(-1, 2)})$ является кохомологией монады (33).*

5. Приложение: о свойствах рефлексивных пучков ранга 2 на Q с малыми классами Черна

В этом параграфе мы даем доказательство леммы 2 и предложений 1, 2 и 4 из § 2, а также леммы 3 из § 3. Предварительно нам потребуется следующее определение спектра пучка ранга 2 на Q по Эйну и Сольсу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{E}$ – стабильный рефлексивный пучок ранга 2 на квадрике Q с $c_1 = -1$ и $c_2 \geq 2$. Набор $sp(\mathcal{E}) = \{k_1, \dots, k_m\}$ из $m = c_2(\mathcal{E}) - 1$ чисел называется *спектром* пучка $\mathcal{E}$, если он удовлетворяет следующим свойствам:

$$1.a) \ h^1(\mathcal{E}(l)) = \sum_i h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(k_i + l + 1)) \text{ для всех } l \leq 0.$$

$$1.b) \ h^2(\mathcal{E}(l)) = \sum_i h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(k_i + l + 1)) \text{ для всех } l \geq -2.$$

2.a) Если целое число $k > 0$ содержится в $sp(\mathcal{E})$, то числа $0, 1, \dots, k$ также содержатся в $sp(\mathcal{E})$.

2.b) Если целое число $k < 0$ содержится в $sp(\mathcal{E})$, то числа $-1, -2, \dots, k$ также содержатся в $sp(\mathcal{E})$.

$$3) \ \sum k_i = -c_3/2 - c_2 + 1.$$

4) Если $\mathcal{E}$ – векторное расслоение, то $\{-k_i - 2\} = \{k_i\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.

Пусть Q_2 – общее гиперплоское сечение Q , определяемое элементом $x \in H^0(\mathcal{O}_Q(1))$, такое, что $\mathcal{E}|_{Q_2}$ является стабильным векторным расслоением (такое гиперплоское сечение Q_2 существует в силу теоремы 1.6 статьи [12]). Пусть $M = \bigoplus_j H^1(\mathcal{E}|_{Q_2}(j))$ – градуированный модуль, и пусть $N \subseteq M$ – образ модуля $\bigoplus_j H^1(\mathcal{E}(j))$ относительно отображения ограничения на Q_2 . Для $l \leq 0$ имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow H^1(\mathcal{E}(l-1)) \xrightarrow{x} H^1(\mathcal{E}(l)) \rightarrow N_l \rightarrow 0, \quad (35)$$

где N_l – компонента степени l в N . Отсюда

$$\dim N_l = h^1(\mathcal{E}(l)) - h^1(\mathcal{E}(l-1)). \quad (36)$$

Теперь найдем набор чисел $\{k_i\}$, удовлетворяющих условиям 1.a) и 1.b). Условие 1.a) можно записать в следующем виде: $h^1(\mathcal{E}(l)) = \sum_{k_i \geq -l-1} (k_i + l + 2)$. С учетом последнего равенства, формула (36) выглядит следующим образом:

$$\dim N_l = \sum_{k_i \geq -l-1} (1) = \#\{k_i \geq -l-1\}.^1 \quad (37)$$

Оставшаяся часть доказательства настоящей леммы полностью повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 2.2 из статьи [12]. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.

Покажем, что пучок $\mathcal{F}$ не имеет спектра. Действительно, предположим, что спектр пучка $\mathcal{F}$ существует. По определению, для $c_2 = 2$ этот спектр состоит из одного элемента $\{k_1\}$. Тогда по свойству 3) из определения спектра имеем $k_1 = -c_3/2 - 1 \leq -2$, откуда по свойству 2.b) того же определения спектр содержит также числа -1 и -2 , вопреки тому, что он состоит из одного элемента. Теперь

¹При выводе формулы (37) в теореме 2.2 статьи [12] авторы не накладывают условие $\bigoplus_{l \leq 0} H^1(\mathcal{E}(l)) \neq 0$. Однако, если это условие не выполняется, то из тройки (35) следует, что $N_l = 0$ для всех $l \leq 0$ и тогда формула (37) показывает, что в спектре могут содержаться лишь числа $k_i \leq -2$. Это противоречит пунктам 1.a) и 2.b) в определении спектра, совпадающим с пунктами 1(a) и 2(b) в формулировке теоремы 2.2 статьи [12].

утверждение предложения непосредственно вытекает из леммы 2. Предложение 1 доказано. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.

Предположим противное, то есть пусть существует пучок $\mathcal{B}$ с указанными в предложении свойствами. Рассмотрим точную тройку:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Q(-1) \rightarrow \mathcal{O}_Q \rightarrow \mathcal{O}_{Q_2} \rightarrow 0, \quad (38)$$

где Q_2 – двумерная квадрака. Тензорно умножим последовательность (38) на $\mathcal{B}(1)$:

$$0 \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}(1) \rightarrow \mathcal{B}_{Q_2}(1) \rightarrow 0. \quad (39)$$

Вычислим эйлеровы характеристики пучков, входящих в точную тройку (39). С учетом того, что $c_3(\mathcal{B}) = 2k$, где $k = 0, 1, \dots$, получаем (см. [12, р. 13]), что $\chi(\mathcal{B}) = k - 1$, $\chi(\mathcal{B}(1)) = k + 2$ и, следовательно,

$$\chi(\mathcal{B}_{Q_2}(1)) = 3. \quad (40)$$

В силу двойственности Серра, и того, что $\omega_{Q_2} = \omega_{\mathbb{P}_3} \otimes \mathcal{O}_{Q_2}(2) = \mathcal{O}_{Q_2}(-2)$ и $\mathcal{B}_{Q_2}^\vee = \mathcal{B}_{Q_2}(1)$, равенство $(H^2(\mathcal{B}_{Q_2}(1)))^\vee = H^0(\mathcal{H}om(\mathcal{B}_{Q_2}(1), \omega_{Q_2}))$ принимает вид

$$(H^2(\mathcal{B}_{Q_2}(1)))^\vee = H^0(\mathcal{B}_{Q_2}(-2)). \quad (41)$$

Умножим тензорно тройку (38) на $\mathcal{B}(-2)$ и рассмотрим первую часть длинной точной последовательности групп когомологий: $0 \rightarrow H^0(\mathcal{B}(-2)) \rightarrow H^0(\mathcal{B}(-1)) \rightarrow H^0(\mathcal{B}_{Q_2}(-2)) \rightarrow H^1(\mathcal{B}(-2))$. Поскольку $H^0(\mathcal{B}(-1)) = 0$ в силу стабильности $\mathcal{B}$, а $H^1(\mathcal{B}(-2)) = 0$ в силу предложения 1 из полученной последовательности находим: $H^0(\mathcal{B}_{Q_2}(-2)) = 0$. Отсюда и из (41) следует равенство $H^2(\mathcal{B}_{Q_2}(1)) = 0$, из которого с учетом (40) имеем: $h^0(\mathcal{B}_{Q_2}(1)) - h^1(\mathcal{B}_{Q_2}(1)) = 3$. Следовательно, $h^0(\mathcal{B}_{Q_2}(1)) \geq 3$. Выпишем кусок длинной точной когомологической последовательности для точной тройки (39): $0 \rightarrow H^0(\mathcal{B}) \rightarrow H^0(\mathcal{B}(1)) \rightarrow H^0(\mathcal{B}_{Q_2}(1)) \rightarrow H^1(\mathcal{B})$.

Так как $H^0(\mathcal{B}) = 0$ в силу стабильности пучка $\mathcal{B}$ и, кроме того, $H^1(\mathcal{B}) = 0$ по условию предложения, то из предыдущей точной последовательности следует, что $H^0(\mathcal{B}(1)) \cong H^0(\mathcal{B}_{Q_2}(1))$. Отсюда в силу последнего неравенства имеем $h^0(\mathcal{B}(1)) \geq 3$, а значит, пучок $\mathcal{B}(1)$ имеет ненулевые сечения. Рассуждая, как и в доказательстве формулы (7), легко получаем, что схема Z нулей общего сечения $s \in H^0(\mathcal{B}(1))$ имеет чистую размерность 1. Тем самым определена точная тройка:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Q \rightarrow \mathcal{B}(1) \rightarrow \mathcal{I}_Z(1) \rightarrow 0, \quad (42)$$

и из условий на классы Чжэня пучка $\mathcal{B}$ следует, что Z – схема степени 2. Поэтому Z как схема чистой размерности 1 может иметь одну из следующих возможных структур:

- 1) Z – дизъюнктивная пара прямых $l_1 \sqcup l_2$;
- 2) $Z = C$ – приведенная коника;
- 3) $Z = l^{(2)}$ – прямая с некоторой двойной структурой без вложенных точек.

В случае 1) стандартное вычисление показывает, что $c_t(\mathcal{I}_Z) = 1 + 2t^2 + 2t^3$, откуда с учетом (42) получаем $c_3(\mathcal{B}) = 0$, вопреки условию предложения.

В случае 2) последовательность (42) совпадает с тройкой (8), а значит, $c_3(\mathcal{B}) = 2$, что противоречит условию предложения.

Рассмотрим случай 3). Так как Z есть прямая с двойной структурой $l^{(2)}$ без вложенных точек, то структурный пучок $\mathcal{O}_Z$ входит в следующую точную тройку:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_l(-a) \rightarrow \mathcal{O}_{l^{(2)}} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_l \rightarrow 0, \quad (43)$$

для некоторого целого числа a . Здесь пучок $\mathcal{O}_l(-a)$ есть факторрасслоение конормального расслоения $\mathcal{N}_{l/Q}^\vee$ (см., например, [20, р. 314]):

$$\mathcal{N}_{l/Q}^\vee \twoheadrightarrow \mathcal{O}_l(-a). \quad (44)$$

Из тройки (43) стандартным вычислением находим многочлен Чженя пучка $\mathcal{O}_{l^{(2)}}$, а именно: $c_t(\mathcal{O}_{l^{(2)}}) = 1 - 2t^2 - (2a + 2)t^3$. Следовательно, многочлен Чженя пучка $\mathcal{B}$ из тройки (42) имеет вид: $c_t(\mathcal{B}) = 1 - t + 2t^2 + 2at^3$. Отсюда в силу условий предложения 5 получаем неравенство $a \geq 2$, которое вместе с изоморфизмом $\mathcal{N}_{l/Q}^\vee \simeq \mathcal{O}_l \oplus \mathcal{O}_l(-1)$ (см., например, [4, р. 221]) показывает, что сюръекции (44) не существует. Следовательно, предположив, что $Z = l^{(2)}$, получаем противоречие. Предложение 2 доказано. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.

Пусть $\mathcal{F} \in \mathcal{M}$, а значит, $\mathcal{F}$ удовлетворяет тройке (8). Эта тройка стандартным образом продолжается до диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & 0 & \\ & & & \uparrow & & \uparrow & \\ & & & 0 & & 0 & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_Q(-2) & \longrightarrow & 2\mathcal{O}_Q(-1) & \longrightarrow & \mathcal{I}_C \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_Q(-2) & \longrightarrow & 3\mathcal{O}_Q(-1) & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & \mathcal{O}_Q(-1) & = & \mathcal{O}_Q(-1) \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & 0 & & 0, \end{array} \quad (45)$$

в которой верхняя горизонтальная тройка есть стандартная резольвента пучка идеалов $\mathcal{I}_C$ коники C из тройки (8). Из средней горизонтальной тройки этой диаграммы мы имеем $\mathcal{F} = \text{Coker}(\mathcal{O}_Q(-2) \rightarrow 3\mathcal{O}_Q(-1))$. Левый морфизм $\mathcal{O}_Q(-2) \xrightarrow{h_1, h_2, h_3} 3\mathcal{O}_Q(-1)$ в этой тройке задается умножением на уравнения трех гиперплоских сечений $h_i = H_i \cap Q$, $i = 1, 2, 3$, квадрики Q , где H_1, H_2, H_3 – гиперплоскости в $\mathbb{P}_4$. Поэтому $\text{Sing}(\mathcal{F}) = H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap Q$. Из равенства $c_3(\mathcal{F}) = 2$ и рефлексивности $\mathcal{F}$ следует, что $\text{Sing}(\mathcal{F}) = x \cup y$ – пара точек (возможно совпавших) на Q . Следовательно, $l := H_1 \cap H_2 \cap H_3$ – прямая в $\mathbb{P}_4$, не лежащая в Q . Тем самым

пучок $\mathcal{F}$ можно рассматривать как точку из $Grass(2, 5) \setminus \mathbb{P}_3$, где $\mathbb{P}_3$ – база семейства прямых на Q , вложенная в $Grass(2, 5)$ по Веронезе. Предложение доказано. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.

Согласно определению спектра, данному выше, пучок $\mathcal{A}$ не имеет спектра, поскольку $c_2(\mathcal{A}) = 1$, и, следовательно, из леммы 2 мы имеем $\bigoplus_{l \leq 0} H^1(\mathcal{A}(l)) = 0$. Далее, повторяя доказательство предложения 2 с заменой пучка $\mathcal{B}$ на пучок $\mathcal{A}$, находим $h^0(\mathcal{A}(1)) \geq 4$. Рассуждая, как и в доказательстве формулы (7), легко получаем, что схема Z нулей общего сечения $s \in H^0(\mathcal{A}(1))$ имеет чистую размерность 1. Тем самым определена точная тройка

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Q \rightarrow \mathcal{A}(1) \rightarrow \mathcal{I}_Z(1) \rightarrow 0, \quad (46)$$

и из условий на классы Чженя пучка $\mathcal{A}$ следует, что Z – схема степени 1, то есть Z – прямая на Q . Стандартное вычисление показывает, что $\dim \operatorname{Ext}^1(\mathcal{I}_Z(1), \mathcal{O}_Q) = 1$, то есть существует единственное с точностью до изоморфизма нетривиальное расширение вида (46). Как известно, пучок $\mathcal{A}$, определяемый таким расширением, есть спинорное расслоение $\mathcal{S}$ на Q . Лемма 3 доказана. $\square$

Список литературы

1. Szurek M., Wisniewski J. *Fano bundles on Fine Moduli Spaces over $\mathbb{P}_3$* // Pacific Journal of Mathematics. 1990. 141. P. 197–208.
2. Tyurin A. *The moduli spaces of vector bundles on threefolds, surfaces and curves I*: preprint. Erlangen, 1990.
3. Wisniewski J. *Ruled Fano 4-folds of index 2* // Proceedings of the American Mathematical society. 1983. 105. P. 55–61.
4. Ottaviani J., Szurek M. *On moduli of stable 2-bundles with small chern classes on Q_3* // Annali di Matematica Pura ed Applicata CLXVII. 1994. P. 191–241.
5. Markushevich D., Tikhomirov A. *The Abel-Jakobi map of a moduli component of vector bundles on the cubic threefold* // J. Algebraic Geometry. 2001. 10. P. 11–22.
6. Markushevich D., Tikhomirov A. *A parametrization of the theta divisor of quartic double solid* // Intern. Math. Res. 2003. 51. P. 2747–2778.
7. Perrin N. *Mt Limites de fibres vectoriels dans $M_{\mathbf{Q}_3}(0, 2)$* // Compte Rendus Acad. Sci. Paris. 2002. 334. P. 779–782.
8. Артамкин Д.И. *Компонента не локально свободных полустабильных пучков ранга 2 на трехмерной квадрике* // Материалы конференции "Чтения Ушинского". Ярославль: ЯГПУ, 2004. С. 6–13.
9. Артамкин Д.И. *Свойства стабильных пучков ранга 2 на трехмерной квадрике* // Ярославский педагогический вестник. Ярославль: ЯГПУ, 2004. Т. 1–2. С. 83–88.

10. **Уваров А.Д.** *Компактификация многообразия модулей $M_Q(-1, 2)$ стабильных векторных расслоений ранга 2 на трехмерной квадрике* // Ярославский педагогический вестник. Ярославль: ЯГПУ, 2011. Т. 3: Естественные науки. С. 40–47.
11. **Оконек К., Шнейдер М., Шпиндлер Х.** *Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах*. М.: Мир, 1984.
12. **Ein L., Sols I.** *Stable vector bundles on quadric hypersurfaces* // Nagoya Math. J. 1984. 96. P. 11–22.
13. **Hartshorne R.** *Stable reflexive sheaves* // Math. Ann. 1980. 254. P. 121–176.
14. **Maruyama M.** *Moduli of stable sheaves. II* // J. Math. Kyoto Univ. 1978. 18. P. 557–614.
15. **Хартсхорн Р.** *Алгебраическая геометрия*. М.: Мир, 1981.
16. **Banica C., Putinar M., Schumacher G.** *Variation der globalen Ext in Deformationen kompakter komplexer Raume* // Mathematische Annalen. 1980. 250. P. 135–155.
17. **Strømme A.** *Ample Divisors on fine Moduli spaces on projective plane* // Math. Z. 1984. 187. P. 405–423.
18. **Huybrechts D., Lehn M.** *The Geometry of Moduli spaces of sheaves* // Aspects of Mathematics E 31, Braunschweig, Vieweg, 1997.
19. **Lange H.** *Universal Families of Extensions* // Journal of Algebra. 1983. 83. P. 101–112.
20. **Hulek K., Van de Ven A.** *he Horrocks-Mumford bundle and the Ferrand construction* // Manuscripta Math. 1985. 50. P. 313–335.

Stable Sheave Moduli of Rank 2 with Chern Classes $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 0$ on Q_3

Uvarov A. D.

Keywords: compactification, moduli scheme, coherent torsion free sheave of rank 2, 3-dimensional quadric

In this paper we consider the scheme $M_Q(2; -1, 2, 0)$ of stable torsion free sheaves of rank 2 with Chern classes $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 0$ on a smooth 3-dimensional projective quadric Q . The manifold $M_Q(-1, 2)$ of moduli bundles of rank 2 with Chern classes $c_1 = -1, c_2 = 2$ on Q was studied by Ottaviani and Szurek in 1994. In 2007 the author described the closure $M_Q(-1, 2)$ in the scheme $M_Q(2; -1, 2, 0)$. In this paper we prove that in $M_Q(2; -1, 2, 0)$ there exists a unique irreducible component different from $\overline{M_Q(-1, 2)}$ which is a rational variety of dimension 10.

Сведения об авторах:

Уваров Артем Дмитриевич,

Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского,
ассистент кафедры математического анализа