

Numerical Modeling Tools and S-derivatives

A. N. Morozov¹

DOI: [10.18255/1818-1015-2022-1-20-29](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2022-1-20-29)

¹P. G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia.

MSC2020: 41A35, 41A45, 65D25

Research article

Full text in Russian

Received January 15, 2022

After revision February 28, 2022

Accepted March 9, 2022

Numerical study of various processes leads to the need of clarification (extensions) of the limits of applicability of computational constructs and modeling tools. For dynamical systems, this question may be related with a generalization of the concept of a derivative, which keeps the used constructions relevant. In this article we introduce the concept of weak local differentiability in a space of Lebesgue integrable functions and consider the consistency of this concept with such fundamental computational constructions as the Taylor expansion and finite differences, as well as properties of functions with a given type of differentiability on a segment.

The function f from $L_1[a; b]$ is called S -differentiable at the point x_0 from $(a; b)$, if there are coefficients c and q , for which $\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - c - q \cdot (x - x_0)) dx = o(h^2)$. Formulas are found for calculating the coefficients c and q , coefficients c and q , which are conveniently denoted $f'_s(x_0)$ and $f''_s(x_0)$ respectively. It is shown that if the function f belongs to $W_1^{n-1}[a; b]$, n is greater than 1, and the function $f^{(n-1)}$ is S -differentiable at the point x_0 from $(a; b)$, then f is approximated by a Taylor polynomial with accuracy $o((x - x_0)^n)$, and the ratio of $\Delta_h^n(f, x_0)$ to h^n tends to $f_s^{(n)}(x_0)$ as h tends to 0. Based on the quotient $\Delta_h^n(f, \cdot)$ and h^n , a sequence is built $\{\Lambda_m^n[f]\}$ piecewise constant functions subordinate to partitions segment $[a; b]$ into m equal parts. It is shown that for the function f from $W_1^{n-1}[a; b]$, for which the value is defined $f_s^{(n)}(x_0)$, $\{\Lambda_m^n[f](x_0)\}$ converges to $f_s^{(n)}(x_0)$ as m tends to infinity, and for f from $W_p^n[a; b]$ the sequence $\{\Lambda_m^n[f]\}$ converges to $f^{(n)}$ in the norm of the space $L_p[I]$. The place of S -differentiability in practical and theoretical terms is determined by its bilateral relations with ordinary differentiability. It is proved that if f belongs to $W_1^{n-1}[I]$ and the function $f^{(n-1)}$ is uniformly S -differentiable on I , then f belongs to $C^n[I]$. The constructions are algorithmic in nature and can be applied in numerically computer research of various relevant models.

Keywords: Difference Expressions; the Taylor Polynomial; S -derivative; Numerical Simulation; Numerical Finding of Derivatives on a Computer; the Spreading of the Differentiation Operator

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anatoly Nikolaevich Morozov | orcid.org/0000-0001-9940-159X. E-mail: moroz@uniyar.ac.ru
correspondence author | PhD.

Funding: The work was carried out within the framework of the initiative research work of the YarGU. P.G. Demidov No. VIP-016.

For citation: A. N. Morozov, "Numerical Modeling Tools and S-derivatives", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 29, no. 1, pp. 20-29, 2022.

Инструменты численного моделирования и S-производные

А. Н. Морозов¹DOI: [10.18255/1818-1015-2022-1-20-29](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2022-1-20-29)¹Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, д. 14, г. Ярославль, 150003 Россия.

УДК 519.65

Научная статья

Полный текст на русском языке

Получена 15 января 2022 г.

После доработки 28 февраля 2022 г.

Принята к публикации 9 марта 2022 г.

Численное исследование различных процессов приводит к необходимости уточнения (расширения) границ применимости вычислительных конструкций и инструментов моделирования. Для динамических систем данный вопрос может быть связан с обобщением понятия производной, сохраняющим актуальными применяемые конструкции. В настоящей статье вводится понятие слабой локальной дифференцируемости в пространстве интегрируемых по Лебегу функций и рассматриваются согласованность этого понятия с такими основополагающими вычислительными построениями как разложение Тейлора и конечные разности, а также свойства функций, обладающих данным видом дифференцируемостью на отрезке.

Функцию f из $L_1[a; b]$ назовём S-дифференцируемой в точке x_0 из $(a; b)$, если существуют коэффициенты c и q , при которых выполняется $\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - c - q \cdot (x - x_0)) dx = o(h^2)$. Найдены формулы для вычисления коэффициентов c и q , которые удобно обозначить $f_s(x_0)$ и $f'_s(x_0)$ соответственно. Показано, что если функция f принадлежит $W_1^{n-1}[a; b]$, n больше 1, и функция $f^{(n-1)}$ является S-дифференцируемой в точке x_0 из $(a; b)$, то f приближается тейлоровским многочленом с точностью $o((x - x_0)^n)$, а отношение $\Delta_h^n(f, x_0)$ к h^n стремится к $f_s^{(n)}(x_0)$ при стремлении h к 0. На основе частного $\Delta_h^n(f, \cdot)$ и h^n строится последовательность $\{\Lambda_m^n[f]\}$ кусочно-постоянных функций, подчинённых разбиениям отрезка $[a; b]$ на m равных частей. Показано, что для функции f из $W_1^{n-1}[a; b]$, для которой определено значение $f_s^{(n)}(x_0)$, $\{\Lambda_m^n[f](x_0)\}$ сходится к $f_s^{(n)}(x_0)$ при стремлении m к бесконечности, а для $f \in W_p^n[a; b]$ последовательность $\{\Lambda_m^n[f]\}$ сходится к $f^{(n)}$ по норме пространства $L_p[I]$. Место S-дифференцируемости в практическом и теоретическом плане определяется её двусторонними соотношениями с обычной дифференцируемостью. Доказан факт, что если f принадлежит $W_1^{n-1}[I]$, и функция $f^{(n-1)}$ является равномерно S-дифференцируемой на I , то f принадлежит $C^n[I]$. Рассмотренные построения имеют алгоритмический характер, и могут быть применены в численном исследовании на ЭВМ соответствующих моделей.

Ключевые слова: разностные выражения; многочлен Тейлора; S-производная; численное моделирование; численное нахождение производных; распространение оператора дифференцирования

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Анатолий Николаевич Морозов
автор для корреспонденции

orcid.org/0000-0001-9940-159X. E-mail: moroz@uniyar.ac.ru
канд. физ.-мат. наук, доцент.

Финансирование: Работа выполнена в рамках инициативной НИР ЯрГУ им. П. Г. Демидова № VIP-016.

Для цитирования: A. N. Morozov, "Numerical Modeling Tools and S-derivatives", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 29, no. 1, pp. 20-29, 2022.

Введение и основные обозначения

Как обычно, $L_p[I]$ обозначает пространство действительных измеримых функций, интегрируемых в степени p ($0 < p < \infty$) по Лебегу на отрезке $I = [a; b]$,

$$\|f\|_{L_p[I]} = \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}};$$

при $p = \infty$ всюду ниже рассматривается $B[I]$ — пространство измеримых ограниченных на отрезке I функций, —

$$\|f\|_{B[I]} = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Когда неясность исключена, сокращаем обозначения до L_p и $\|f\|_p$ или соответственно до B и $\|f\|_\infty$. Длину I обозначаем $|I|$.

Также используются ($k \in \mathbb{N}$) $C^k = C^k[I]$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке I функций — и ($1 \leq p < \infty$)

$$W_p^k = W_p^k[I] = \left\{ f : f^{(k-1)} \text{ абсолютно непрерывна на отрезке } I, f^{(k)} \in L_p[I] \right\}$$

с нормами $\|f\|_p + \|f^{(k)}\|_p$.

Численное исследование различных процессов приводит к необходимости уточнения (расширения) границ применимости вычислительных конструкций и инструментов моделирования. Для динамических систем данный вопрос может быть связан с обобщением понятия производной, сохраняющим актуальными применяемые конструкции. Эффективность такого подхода была продемонстрирована, например, в работе А. П. Кальдерона и А. Зигмунда ([1]), где были даны приложения обобщённого локального понятия производной к изучению локальных свойств решений дифференциальных уравнений ($1 \leq p \leq \infty$). В одномерном случае их формулировка приводит к следующему определению.

Определение 1. Функция $f \in L_p[I]$ называется (k, p) -дифференцируемой в точке $x \in I$, если существует алгебраический многочлен P степени не больше k , для которого выполняется

$$\|f - P\|_{L_p[J_{x,h}]} = o(h^{k+\frac{1}{p}}), \text{ при } h \rightarrow 0, \text{ где } J_{x,h} = [x-h; x+h] \cap I.$$

Такой многочлен может быть только один, его часто называют тейлоровским. Здесь есть возможность ещё уменьшить требования к взаимоотношению функции и приближающего её многочлена. При $k = 1$ это фактически ведёт к обновлению классической операции дифференцирования.

Определение 2. Функцию $f \in L_1[a; b]$ назовём S -дифференцируемой в точке $x_0 \in (a; b)$, если существует алгебраический многочлен P степени не больше 1, для которого выполняется

$$\int_{x_0}^{x_0+h} (f - P)(x) dx = o(h^2) \text{ при } h \rightarrow 0. \quad (1)$$

Односторонняя S -дифференцируемость определяется стандартным образом, в частности, применительно к точке a требуется выполнение условия (1) при $h \rightarrow 0+$, а к точке b — при $h \rightarrow 0-$.

Покажем единственность многочлена, рассматриваемого в определении 2. Его удобно представить в виде $P(x) = c + q \cdot (x - x_0)$.

Предложение 1. Если $f \in L_1[a; b]$, $a < x_0 < b$ и

$$\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - c - q \cdot (x - x_0)) dx = o(h^2) \text{ при } h \rightarrow 0,$$

то

$$i) \quad c = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx;$$

$$ii) \quad q = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h(f, x_0)}{h},$$

где

$$\Delta_h(f, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{h} \int_{x_0+h}^{x_0+2h} f(x) dx - \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx.$$

При односторонней S -дифференцируемости в точке рассматриваются соответствующие односторонние пределы.

Доказательство. Из условия сразу получается, что имеет место

$$\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - c) dx = o(h) \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

откуда следует пункт i).

Пусть $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Тогда по условию справедливо разложение

$$F(x) = F(x_0) + c \cdot (x - x_0) + \frac{q}{2} \cdot (x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Учитывая, что

$$\Delta_h(f, x_0) = \frac{1}{h} \cdot (F(x_0+2h) - 2F(x_0+h) + F(x_0)) = \frac{\Delta_h^2(F, x_0)}{h},$$

получаем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h(f, x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q \cdot h^2 + \Delta_h^2(o((x - x_0)^2), x_0)}{h^2} = q.$$

Предложение доказано.

Ясно, что из обычной дифференцируемости функции в точке (определяемой в пространстве B) следует её S -дифференцируемость в этой точке. Получается, что там, где существуют и не равны между собой односторонние (обычные) производные или какая-то из них равна бесконечности, невозможна S -дифференцируемость. Так функция $f(x) = |x|^\alpha$ является S -дифференцируемой в нуле только при $\alpha > 1$. Рассмотрим примеры, отражающие основные черты обсуждаемого понятия.

Пример 1. Пусть для определённости f – чётная функция, задаваемая при $x \geq 0$ формулой

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x),$$

где

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in J_k = \left[\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{3k}}; \frac{1}{2^k}\right], \\ 0, & \text{если } x \notin J_k, \end{cases}$$

тогда f S -дифференцируема в нуле.

Доказательство. Для h , удовлетворяющего условию $0 < |h| \leq \frac{1}{2}$, пусть $m \in \mathbb{N}$ таково, что $\frac{1}{2^{m+1}} < |h| \leq \frac{1}{2^m}$, тогда

$$\left| \int_0^h f(x) dx \right| \leq \sum_{k=m}^{\infty} |J_k| = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^{3k}} = \frac{64}{7} \cdot \left(\frac{1}{2^{m+1}} \right)^3 < \frac{64}{7} \cdot h^3.$$

Из чего следует доказываемое утверждение.

Отметим, что пример 1 указывает на взаимосвязь S -дифференцируемости с фрактальными свойствами.

Рассмотрим случай, представляющий интерес с точки зрения моделирования «непрерывных» процессов.

Пример 2. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

является S -дифференцируемой в каждой точке.

Доказательство. В силу чётности функции f достаточно доказать её S -дифференцируемость справа в точке 0.

При $x > 0$ точки $x_k = 1/k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, являются нулями данной функции.

Для каждого $0 < h < 1/\pi$ пусть $k > 2$ таково, что $\frac{1}{k\pi} \leq h < \frac{1}{(k-2)\pi}$, тогда

$$\left| \int_0^h f(x) dx \right| \leq \left| \int_0^{\frac{1}{k\pi}} f(x) dx \right| + \left| \int_{\frac{1}{k\pi}}^{\frac{1}{(k-2)\pi}} f(x) dx \right|.$$

Представим

$$\left(0; \frac{1}{k\pi}\right] = \dots \cup \left(\frac{1}{(k+2l+2)\pi}; \frac{1}{(k+2l)\pi}\right] \cup \dots \cup \left(\frac{1}{(k+2)\pi}; \frac{1}{k\pi}\right], \quad l \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим некоторый полуинтервал $\left(\frac{1}{(m+2)\pi}; \frac{1}{m\pi}\right]$ из этого набора и соответствующий интеграл.

Применяя замену $t = 1/x$ получаем:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{1}{(m+2)\pi}}^{\frac{1}{m\pi}} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \right| &= \left| \int_{m\pi}^{(m+2)\pi} \frac{\sin t}{t^3} dt \right| = \left| \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} \left(\frac{\sin t}{t^3} + \frac{\sin(t+\pi)}{(t+\pi)^3} \right) dt \right| \leq \\ &\leq \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} \left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{(t+\pi)^3} \right) dt \leq 3\pi \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} \frac{(t+\pi)^2}{t^3 \cdot (t+\pi)^3} dt \leq 3\pi \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} \frac{dt}{t^4} \leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{m^4}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\frac{1}{k\pi}} f(x) dx \right| &\leq \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{k^4} + \dots + \frac{1}{(k+2l)^4} + \dots \right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{(k+2x)^4} = \frac{1}{6\pi} \cdot \frac{1}{(k-2)^3}, \\ \left| \int_{\frac{1}{k\pi}}^{\frac{1}{(k-2)\pi}} f(x) dx \right| &\leq \int_{(k-2)\pi}^{k\pi} \frac{dt}{t^3} \leq \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(k-2)^3}. \end{aligned}$$

Имеем

$$\left| \int_0^h f(x) dx \right| \leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(k-2)^3} \leq \frac{9}{\pi} \cdot h^3,$$

из чего вытекает S -дифференцируемость функции f в нуле.

1. Инструменты численного моделирования и производные в пространстве L_1

Для S -дифференцируемой в точке x_0 функции f положим

$$f_s(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx,$$

$$f'_s(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h(f, x_0)}{h}.$$

Второе число назовём S -производной функции f в точке x_0 . Как уже отмечалось, из существования $f'_s(x_0)$ следует существование $f'_s(x_0)$ и их равенство.

Рассмотрим связь некоторых классических конструкций с понятием S -дифференцируемости. Определим обычным образом k -ю разность функции f в точке x :

$$\Delta_h^k(f, x) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \cdot \binom{k}{j} \cdot f(x+jh).$$

Теорема 1. Пусть $f \in W_1^{n-1}[a; b]$, $n \geq 2$, и функция $f^{(n-1)}$ является S -дифференцируемой в точке $x_0 \in [a; b]$, тогда справедливо разложение

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f_s^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \text{ при } x \rightarrow x_0,$$

и существуют

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^k(f, x_0)}{h^k} = f_s^{(k)}(x_0), \quad k = 1, \dots, n,$$

где $f_s^{(n-1)}(x_0) = (f^{(n-1)})_s(x_0)$, $f_s^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'_s(x_0)$. В точках a и b подразумеваются односторонние разложения и пределы.

Доказательство. Для функции $f \in W_1^{n-1}[a; b]$, $n \geq 2$, и точки $x_0 \in (a; b)$ запишем начальное разложение Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-2} \cdot f^{(n-1)}(t) dt}{(n-2)!}.$$

По условию $f^{(n-1)}$ представима в виде

$$f^{(n-1)}(t) = f_s^{(n-1)}(x_0) + f_s^{(n)}(x_0) \cdot (t-x_0) + o_L((t-x_0)^2),$$

где $o_L((t-x_0)^2)$ обозначает функцию, интеграл от которой по отрезку $[x_0; x]$ даёт $o((x-x_0)^2)$ при $x \rightarrow x_0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-2} \cdot f^{(n-1)}(t) dt}{(n-2)!} &= \frac{f_s^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!} \cdot \int_{x_0}^x (x-t)^{n-2} dt + \\ &+ \frac{f_s^{(n)}(x_0)}{(n-2)!} \cdot \int_{x_0}^x (x-t)^{n-2} \cdot (t-x_0) dt + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} \cdot o_L((t-x_0)^2) dt. \end{aligned}$$

Выполнив интегрирование в правой части, получаем в итоге

$$\int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-2} \cdot f^{(n-1)}(t) dt}{(n-2)!} = \frac{f_s^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} \cdot (x-x_0)^{n-1} + \frac{f_s^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n + o((x-x_0)^n),$$

что доказывает первое утверждение теоремы.

Для k -ой разности функции хорошо известно (см., например, [2], с.159, или [3], с.54), что ($h > 0$):

$$\Delta_h^k(x^j, \cdot) = k! \cdot h^k \cdot \delta_{j,k}, \quad j = 0, 1, \dots, k,$$

где $\delta_{j,i}$ — символ Кронекера. Также имеет место простая оценка:

$$\|\Delta_h^k(f)\|_B \stackrel{\text{def}}{=} \|\Delta_h^k(f, \cdot)\|_{B[a; b-kh]} \leq 2^k \cdot \|f\|_B.$$

Поэтому из

$$f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{a_j}{j!} \cdot (x-x_0)^j + o((x-x_0)^k)$$

следует

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\Delta_h^k(f, x_0)}{h^k} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{a_k \cdot h^k + \Delta_h^k(o((x-x_0)^k), x_0)}{h^k} = a_k.$$

При $h < 0$ имеем $\Delta_h^k(f, x_0) = (-1)^k \cdot \Delta_{|h|}^k(f, x_0 - k \cdot |h|)$, значит,

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\Delta_h^k(f, x_0)}{h^k} = a_k.$$

Теорема доказана.

Отметим, что при $n=2$ легко проверяется наличие обратного соотношения в первом утверждении теоремы: если $f \in W_1^1[a; b]$ и в точке $x_0 \in (a; b)$ справедливо разложение

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x-x_0) + a_2 \cdot (x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2) \quad \text{при } x \rightarrow x_0,$$

то функция f' является S -дифференцируемой в точке x_0 ,

В качестве «глобального» аналога «разделённой конечной разности» можно взять следующую конструкцию.

По определённой на отрезке $[a; b]$ функции f и разбиению $\tau_m = \{[t_{i-1}; t_i]\}_{i=1}^m$ / $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$ / полуинтервала $[a; b]$ на равные полуинтервалы построим ступенчатую функцию, задаваемую формулой

$$\Lambda_m^k[f](x) = \frac{\Delta_h^k(f, t_{i-1})}{h^k} \quad \text{при } x \in [t_{i-1}; t_i]$$

на каждом интервале из τ_m /заключительный справа полуинтервал замкнём/, где $h = \frac{b-a}{m \cdot k}$.

Теорема 2. Пусть $f \in W_1^{n-1}[a; b]$, $n \geq 2$, и функция $f^{(n-1)}$ является S -дифференцируемой в точке $x_0 \in [a; b]$, тогда в этой точке последовательность

$$\{\Lambda_m^k[f]\} \text{ сходит к } f_s^{(k)}(x_0) \text{ при } m \rightarrow \infty, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\text{где } f_s^{(n-1)}(x_0) = (f^{(n-1)})_s(x_0), \quad f_s^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'_s(x_0).$$

В точках a и b подразумевается односторонняя S -дифференцируемость.

Доказательство. По теореме 1 для $1 \leq k \leq n$ из условия имеем

$$f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f_s^{(j)}(x_0)}{j!} \cdot (x-x_0)^j + o((x-x_0)^k).$$

Рассмотрим некоторое разбиение τ_m отрезка $[a; b]$. Пусть точка x_0 содержится в полуинтервале $[t_{i-1}; t_i]$, $1 \leq i \leq m$, из τ_m /при $i=m$ – в отрезке $[t_{m-1}; t_m]$ /. Получаем

$$\begin{aligned} \left| \Lambda_m^k[f](x_0) - f_s^{(k)}(x_0) \right| &= \left| \frac{\Delta_h^k \left(\frac{f_s^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + o((x-x_0)^k), t_{i-1} \right)}{h^k} - f_s^{(k)}(x_0) \right| = \\ &= \left| h^{-k} \cdot \Delta_h^k(o((x-x_0)^k), t_{i-1}) \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Здесь снова использованы формулы, применённые в доказательстве теоремы 1.

2. Исследование сходимости вычислительной конструкции $\Lambda_m^k[\cdot]$ и условий S -дифференцируемости на отрезке

Важной стороной использования обсуждаемых производных в вычислительных целях являются свойства функций, S -дифференцируемых на множестве. В теоретическом плане место таких производных определяется двусторонними соотношениями с обычными производными.

S -дифференцируемая в конкретной точке функция может изучаться как определённого вида предел непрерывно дифференцируемых функций. По предложению 1 и теоремам 1-2 в такого вида точках сохраняется сходимость выражений, основанных на «разделённых конечных разностях». Поэтому актуально рассматривать распространение оператора дифференцирования в метриках, построенных при помощи таких конструкций.

Определим обычные L_p -модули гладкости ($0 < p < \infty$):

$$\omega_k(f, t)_p = \sup_{0 < h < t} \left\| \Delta_h^k(f) \right\|_{L_p[a; b-kh]}.$$

Как известно, на пространстве W_p^k имеет место (см. [4]) равенство:

$$\sup_{t>0} t^{-k} \omega_k(f, t)_p = \limsup_{h \rightarrow 0} \left\| h^{-k} \Delta_h^k(f) \right\|_{L_p[a; b-kh]} = \left\| f^{(k)} \right\|_p,$$

т. е.

$$\| \cdot \|_p + \sup_{t>0} t^{-k} \omega_k(\cdot, t)_p - \text{норма}.$$

Таким образом, пространство W_p^k является пополнением C^k по данной норме, а построение k -ой производной в W_p^k равносильно распространению оператора k -кратного дифференцирования, определяемому этим пополнением.

Данное рассуждение можно дополнить описанием поведения последовательностей $\{\Lambda_m^k[\cdot]\}$ на обсуждаемых пространствах.

Если $f \in C^k[x_0; x_0+k \cdot h]$, то

$$\frac{\Delta_h^k(f, x_0)}{h^k} = f^{(k)}(\xi), \quad x_0 \leq \xi \leq x_0 + k \cdot h,$$

(см. более общую формулу в доказательстве теоремы 3), поэтому на пространстве C^k последовательности $\{\Lambda_m^k[\cdot]\}$ сходятся равномерно.

Теорема 3. Если $f \in W_p^k$, то $\{\Lambda_m^k[f]\}$ сходится к $f^{(k)}$ по норме пространства L_p .

Доказательство. Для заданной функции $f \in W_p^k$ и $\varepsilon > 0$ найдётся функция $f_\varepsilon \in C^k$ такая, что $\|f^{(k)} - f_\varepsilon^{(k)}\|_p < \varepsilon$. Получается, что в неравенстве

$$\|\Lambda_m^k[f] - f^{(k)}\|_p \leq \|\Lambda_m^k[f] - \Lambda_m^k[f_\varepsilon]\|_p + \|\Lambda_m^k[f_\varepsilon] - f_\varepsilon^{(k)}\|_p + \|f^{(k)} - f_\varepsilon^{(k)}\|_p$$

третье слагаемое в правой части может быть сделано сколь угодно малым за счёт выбора функции f_ε , а второе слагаемое станет меньше любой требуемой величины, начиная с некоторого соответственно большого номера m . Нужно оценить первое слагаемое.

В условиях теоремы при произвольном значении $m \in \mathbb{N}$ по определению имеет место

$$\|\Lambda_m^k[f]\|_p = \left(\sum_{i=1}^m \left| \frac{\Delta_h^k(f, t_{i-1})}{h^k} \right|^p k \cdot h \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Для k -й разности функции из W_1^k выполняется (см. [3], с. 137)

$$\Delta_h^k(f, x) = h^k \int_0^{k \cdot h} \frac{N_k(t/h)}{h} f^{(k)}(x+t) dt,$$

где N_k – нормализованный B -сплайн порядка k с узлами в точках $0, 1, \dots, k$. Т.е. N_k – неотрицательная кусочно-полиномиальная функция степени $k-1$, принадлежащая пространству $C^{k-2}(-\infty; \infty)$, имеющая носитель $(0; k)$ с $k+1$ равноотстоящими узлами на нём (включая конечные точки интервала) и обладающая свойством $\int_0^k N_k(t) dt = 1$ ([3], с.128, формула (4.40)). Кроме того,

$\|N_k\|_{B[0; k]} \leq 1$ ([3], с. 125, формула (4.32)).

Рассмотрим отдельно случай $p = 1$. Очевидно

$$\|\Lambda_n^k[f]\|_1 = k \cdot \sum_{i=1}^m \left| \int_0^{k \cdot h} N_k(t/h) f^{(k)}(t_{i-1} + t) dt \right| \leq k \cdot \|f^{(k)}\|_1.$$

Пусть $1 < p < \infty$. Тогда по интегральному неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \|\Lambda_m^k[f]\|_p &\leq k^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^m \left(\int_0^{k \cdot h} \left(\frac{N_k(t/h)}{h} \right)^{\frac{p}{p-1}} dt \right)^{p-1} \left(\int_0^{k \cdot h} |f^{(k)}(t_{i-1} + t)|^p dt \right) h \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= k^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{k \cdot h} \left(N_k(t/h) \right)^{\frac{p}{p-1}} d(t/h) \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f^{(k)}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq k^{\frac{1}{p}} \cdot \|f^{(k)}\|_p. \end{aligned} \quad (2)$$

Заключительное неравенство в преобразованиях основано на том, что из свойств

$\|N_k\|_{B[0; k]} \leq 1$ и $\|N_k\|_{L_1[0; k]} = 1$ вытекает $\|N_k\|_{L_q[0; k]} \leq 1$ при любом $1 < q < \infty$.

Формула (2) показывает, что $\|\Lambda_m^k[f] - \Lambda_m^k[f_\varepsilon]\|_p$ оценивается через $\|f^{(k)} - f_\varepsilon^{(k)}\|_p$, из чего следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Дальнейшее распространение оператора дифференцирования может быть осуществлено с помощью аналогичного построения.

Пусть $(0 < p < \infty)$

$$H_p^k = \left\{ f \in L_p : \sup_{t>0} t^{-k} \omega_k(f, t)_p < \infty \right\}.$$

Очевидно, что $H_{p_1}^k \supset H_{p_2}^k$, если $p_1 < p_2$. Чтобы избежать постоянных оговорок, для значений индекса, меньших единицы, в дальнейшем будет использоваться буква r , т. е. всюду ниже $0 < r < 1$.

Определим для каждого r пространство Y_r^k как пополнение C^k в метрике, порождаемой квазинормой пространства H_r^k (см. [5]). Метрику определяет функционал

$$\|\cdot\|_r^r + \left(\sup_{t>0} t^{-k} \omega_k(\cdot, t)_r \right)^r.$$

Для функции $f \in C^k$ применим обозначение:

$$\Lambda^k[f] \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_m^k[f].$$

Так как на C^k выполняется

$$\|f^{(k)}\|_r = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-k} \omega_k(f, t)_r,$$

то имеем следующий факт: для $f_1, f_2 \in C^k$

$$\|\Lambda^k[f_1] - \Lambda^k[f_2]\|_r^r = \|(f_1 - f_2)^{(k)}\|_r^r = \left(\lim_{t \rightarrow 0} t^{-k} \omega_k(f_1 - f_2, t)_r \right)^r = \left(\sup_{t>0} t^{-k} \omega_k(f_1 - f_2, t)_r \right)^r.$$

Следовательно, действие Λ^k выходит за пределы пространства W_1^k .

Теорема 4. ([5]) Оператор Λ^k при каждом r имеет единственное линейное непрерывное распространение до оператора из Y_r^k в L_r . Это распространение обладает свойствами:

- i) $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-k} \omega_k(f, t)_r = \|\Lambda^k[f]\|_r$,
- ii) если $f \in W_1^k[J]$, $J \subseteq I$, то $\Lambda^k[f] \Big|_J = f^{(k)}$.

Обратное соотношение между S -дифференцируемостью и дифференцируемостью (в пространстве B) может быть выражено, например, при помощи равномерного существования первой конструкции. S -дифференцируемая во всех точках отрезка I функция f называется равномерно S -дифференцируемой на I , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что при $|h| < \delta$ для каждой точки $x_0 \in I$ выполняется

$$\frac{1}{h^2} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f - P)(x) dx \right| < \varepsilon \quad (x_0+h \in I),$$

где P – многочлен из условия S -дифференцируемости в точке x_0 .

Для единой формулировки положим $W_1^0 = L_1$.

Теорема 5. Пусть $f \in W_1^{n-1}[I]$ ($n \in \mathbb{N}$) такова, что функция $f^{(n-1)}$ является равномерно S -дифференцируемой на I , тогда $f \in C^n[I]$.

Доказательство. Из условия теоремы получаем, что равномерно по точкам x_0 из I выполняется

$$f^{(n-2)}(x) = f^{(n-2)}(x_0) + f_s^{(n-1)}(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f_s^{(n)}(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \quad \text{при } x \rightarrow x_0,$$

/для $n = 1$ под $f^{(n-2)}$ подразумевается F – первообразная функции f /. Следовательно, равномерно на I есть соотношение

$$\frac{\Delta_h^2(f^{(n-2)}, x_0)}{h^2} = f_s^{(n)}(x_0) + \frac{\Delta_h^2(o((x - x_0)^2), x_0)}{h^2} = f_s^{(n)}(x_0) + o(h^0) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (3)$$

Убедимся, что $f_s^{(n)} \in C[I]$. Из равномерного выполнения на I соотношения (3) вытекает равномерная сходимость $\{\Delta_m^n[f^{(n-2)}]\}$ к $f_s^{(n)}$. Разбиения отрезка на равные части обладают свойством «смещения узлов» (см., например, [3], с.241), поэтому из равномерной сходимости последовательности ступенчатых функций, подчинённых таким разбиениям, следует непрерывность предельной функции (предположив противоположное, тот час же получим противоречие).

На основе условия $f_s^{(n)} \in C[I]$ получаем из (2), что

$$\sup_{t>0} t^{-2} \omega_2(f^{(n-2)}, t)_p = \limsup_{h \rightarrow 0} \|h^{-2} \Delta_h^2(f^{(n-2)})\|_{L_p[a; b-2h]} = \|f_s^{(n)}\|_p < \infty.$$

Это даёт принадлежность функции $f^{(n-2)}$ пространству W_p^2 при каждом $1 \leq p < \infty$, из чего следует существование n -ой производной и равенство $f^{(n)} = f_s^{(n)}$ в пространствах L_p .

References

- [1] A. P. Calderon and A. Zygmund, “Local Properties of Solution of Elliptic Partial Differential Equation”, *Studia Mathematica*, vol. 20, no. 2, pp. 171–225, 1961.
- [2] V. K. Dzyadyk, *Introduction to the Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials*. Nauka, 1977.
- [3] L. L. Schumaker, *Spline Functions: Basic Theory*. Wiley, New York, 1981.
- [4] Y. A. Brudnyi, “Criteria for the Existence of Derivatives in L_p ”, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, vol. 2, no. 1, pp. 35–55, 1967.
- [5] A. N. Morozov, “Local Approximations of Differentiable Functions”, *Mathematical Notes*, vol. 100, no. 2, pp. 256–262, 2016.