Модел. и анализ информ. систем. Т. **20**, № **5** (2013) 25–44
©*Нестеров П.Н., Агафончиков Е.Н.,* 2013

УДК 517.929

Особенности колебания решений адиабатических осцилляторов с запаздыванием[1]

Нестеров П.Н., Агафончиков Е.Н.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: nesterov.pn@gmail.com; agafonchikov-evg@mail.ru

получена 14 августа 2013

Ключевые слова: адиабатический осциллятор, дифференциальное уравнение с запаздыванием, резонанс, метод усреднения, асимптотика.

Исследуются особенности колебаний решений адиабатических осцилляторов при наличии в уравнении запаздывания. Изложена методика построения асимптотических формул в окрестности бесконечности для одного класса линейных систем с запаздывающим аргументом. Кроме того, изучается динамика изменения зоны параметрического резонанса одного адиабатического осциллятора при изменении величины запаздывания.

1. Постановка задачи

Объектом исследования в этой статье являются уравнения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x(t) + q(t)x(t-h) = 0, \tag{1}$$

где $h > 0$, а функция $q(t)$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Нас будет интересовать вопрос о динамике решений уравнения (1) при достаточно больших значениях t. В частности, мы выясним, как влияет запаздывание на характер колебания решений уравнения (1), а также на скорость роста (убывания) амплитуды этих колебаний. Мы рассмотрим случаи монотонного и колебательного стремления к нулю функции $q(t)$.

Коротко опишем структуру данной работы. В разделе 2 мы изложим метод асимптотического интегрирования, который будет использоваться в дальнейшем для построения асимптотических формул для решений уравнения (1). В разделе 3 мы исследуем динамику решений уравнения (1) с функцией $q(t)$ вида

$$q(t) = \frac{a}{t^\rho}, \qquad a \neq 0, \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 12-01-31004 мол_а, а также гранта Президента Российской Федерации № МК-80.2013.1.

и

$$q(t) = \frac{a}{t^\rho} \sin \lambda t, \qquad a \neq 0, \ \lambda \neq 0, \tag{3}$$

где a, λ, ρ — вещественные числа и $\rho > 0$. В разделе 4 изучается вопрос о влиянии фактора запаздывания на «размер» области параметрического резонанса для уравнения (1), в котором

$$q(t) = a\frac{\sin \varphi(t)}{\sqrt{t}}, \qquad \varphi(t) = t + \alpha \ln t, \qquad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

2. Асимптотическое интегрирование одного класса линейных систем с запаздыванием

Рассмотрим следующую систему линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием:

$$\dot{x} = v(t)A(t)x(t-h), \qquad x \in \mathbb{C}^n. \tag{5}$$

Здесь $(n \times n)$-матрица $A(t)$ является или ω-периодической, или состоит из тригонометрических многочленов, т.е. имеет вид

$$A(t) = \sum_{j=1}^{N} C_j e^{\mathrm{i}\lambda_j t}, \tag{6}$$

где C_j — постоянные, вообще говоря, комплексные матрицы, а λ_j — вещественные числа. Скалярная функция $v(t)$ абсолютно непрерывна на интервале $[t_0, \infty)$ и обладает следующими свойствами:

1^0. $v(t) \to 0$ при $t \to \infty$;
2^0. $\dot{v}(t) \in L_1[t_0, \infty)$;
3^0. $v^{k+1}(t) \in L_1[t_0, \infty)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

В качестве фазового пространства для системы (5), как обычно, выберем пространство $C_h \equiv C\big([-h, 0], \mathbb{C}^n\big)$ непрерывных на $[-h, 0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^n$ с нормой

$$\|\varphi\| = \sup_{-h \le \theta \le 0} |\varphi(\theta)|.$$

Будем говорить, что некоторая функция $x(t)$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ удовлетворяет системе (5) при $t \ge T$, если $x(t)$ непрерывна на множестве $[T-h, \infty)$, абсолютно непрерывна на множестве $[T, \infty)$ и равенство (5) выполнено почти всюду на $[T, \infty)$. При сформулированных условиях для любой $\varphi \in C_h$ и любого $T \ge t_0$ существует единственная функция $x(t)$, которая удовлетворяет системе (5) с начальным условием $x_T = \varphi$ (см. [7]). Функцию $x(t)$ будем называть решением системы (5) с начальным условием $x_T = \varphi$. Здесь мы используем стандартное обозначение x_t для функции $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ $(-h \le \theta \le 0)$ — элемента пространства C_h.

Запишем величину $x(t-h)$ в виде

$$x(t-h) = x(t) - \int\limits_{t-h}^{t} \dot{x}(s)ds. \tag{7}$$

Заменяя производную $\dot{x}(s)$ правой частью системы (5), перейдем от этой системы к системе

$$\dot{x} = v(t)A(t)x(t) - v(t)A(t)\int\limits_{t-h}^{t} v(s)A(s)x(s-h)ds.$$

Используя тривиальное тождество $v(s) = v(t) - \big(v(t) - v(s)\big)$, представим эту систему в следующем виде:

$$\dot{x} = v(t)A(t)x(t) - v^2(t)A(t)\int\limits_{t-h}^{t} A(s)x(s-h)ds + \\ + v(t)A(t)\int\limits_{t-h}^{t}\big(v(t)-v(s)\big)A(s)x(s-h)ds. \quad (8)$$

Вместо величины $x(s-h)$ во втором слагаемом в правой части системы (8) подставим ее представление в виде

$$x(s-h) = x(t) - \int\limits_{s-h}^{t}\dot{x}(\tau)d\tau$$

и вновь заменим $\dot{x}$ правой частью системы (5). При этом третье слагаемое в правой части системы (8) мало в некотором смысле при $t \to \infty$ и по этой причине не подлежит дальнейшему преобразованию. Таким образом мы приходим к следующей системе:

$$\dot{x} = \Big[v(t)A(t) - v^2(t)A(t)\int\limits_{t-h}^{t} A(s)ds\Big]x(t) + v^2(t)A(t)\int\limits_{t-h}^{t} A(s)\int\limits_{s-h}^{t} v(\tau)A(\tau)x(\tau-h)d\tau ds + \\ + v(t)A(t)\int\limits_{t-h}^{t}\big(v(t)-v(s)\big)A(s)x(s-h)ds. \quad (9)$$

Со вторым слагаемым в правой части системы (9) осуществляем затем аналогичные ранее сделанным преобразования.

В работе [13] показано, что в результате такой последовательности действий система (5) может быть приведена к следующему виду:

$$\dot{x} = \Big[v(t)A_1(t) + v^2(t)A_2(t) + \ldots + v^k(t)A_k(t)\Big]x(t) + R(t, x_t). \quad (10)$$

Здесь $(n \times n)$-матрицы $A_j(t)$ являются или ω-периодическими или имеют вид (6) в зависимости от типа исходной матрицы $A(t)$. В частности,

$$A_1(t) = A(t), \qquad A_2(t) = -A(t)\int\limits_{t-h}^{t} A(s)ds, \qquad A_3(t) = A(t)\int\limits_{t-h}^{t} A(s)\int\limits_{s-h}^{t} A(\tau)d\tau ds. \quad (11)$$

Далее, $R(t,\cdot)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из пространства $C_{(k+1)h} \equiv C\big([-(k+1)h,0],\mathbb{C}^n\big)$ непрерывных на отрезке $[-(k+1)h,0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^n$ в пространство $\mathbb{C}^n$, а $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ $(-(k+1)h \le \theta \le 0)$ — элемент пространства $C_{(k+1)h}$. Кроме того, существует скалярная функция $\gamma(t) \in L_1[t_0+kh,\infty)$ такая, что $|R(t,\varphi)| \le \gamma(t)\|\varphi\|$ для любой $\varphi \in C_{(k+1)h}$ при $t \ge t_0+kh$ $(\|\varphi\| = \sup_{-(k+1)h\le\theta\le 0}|\varphi(\theta)|)$. Операторы с таким свойством будем в дальнейшем называть операторами из класса $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0+kh,\infty)$.

Системы уравнений (5) и (10), вообще говоря, не являются эквивалентными. Можно утверждать лишь следующее: пусть функция $x(t)$ является решением системы (5) при $t \ge T \ge t_0$ с начальным условием $x_T = \varphi$, где $\varphi \in C_h$, тогда функция $x(t)$ при $t \ge T+kh$ является решением системы (10) с начальным условием $x_{T+kh} = \tilde{\varphi}$, где $\tilde{\varphi} \in C_{(k+1)h}$ и

$$\tilde{\varphi}(\theta) = x(T+kh+\theta), \qquad -(k+1)h \le \theta \le 0. \tag{12}$$

Таким образом множество всех решений системы (5), определенных при $t \ge T \ge t_0$, образует при $t \ge T+kh$ в пространстве всех решений системы (10) некоторое подмножество.

Асимптотика всех решений системы (10) может быть получена следующим образом. Сначала от системы (10) при достаточно больших t с помощью замены

$$x(t) = \Big[I + v(t)Y_1(t) + v^2(t)Y_2(t) + \ldots + v^k(t)Y_k(t)\Big]y(t), \tag{13}$$

где I — единичная матрица, а матрицы $Y_j(t)$ с нулевым средним значением либо являются ω-периодическими (если таковыми являются матрицы $A_j(t)$ в системе (10)), либо имеют вид (6), перейдем к усредненной системе

$$\dot{y} = \Big[v(t)A_1 + v^2(t)A_2 + \ldots + v^k(t)A_k\Big]y(t) + R_1(t,y_t). \tag{14}$$

Здесь матрицы A_j являются постоянными матрицами, а $R_1(t,y_t)$ — некоторый оператор из класса $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0+kh,\infty)$. В частности,

$$A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(t)\big], \qquad A_2 = \mathrm{M}\big[A_2(t) + A_1(t)Y_1(t)\big], \qquad \Bigg(\mathrm{M}\big[F(t)\big] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(s)ds\Bigg), \tag{15}$$

где матрица $Y_1(t)$ с нулевым средним значением определяется как решение матричного дифференциального уравнения вида

$$\dot{Y}_1 = A_1(t) - A_1. \tag{16}$$

Возможность приведения системы (10) при достаточно больших t к виду (14) с помощью замены (13) является простым переносом результатов работы [6] на случай систем с запаздыванием.

Система уравнений (14) проще системы (10) в том смысле, что она не содержит осциллирующих коэффициентов в главной части. В частности, можно воспользоваться известными из теории обыкновенных дифференциальных уравнений результатами для приведения этой системы к почти диагональному виду. Представим систему (14) в виде

$$\dot{y} = \Big[A_s + W(t)\Big]v^s(t)y(t) + R_1(t,y_t), \tag{17}$$

где $(n \times n)$-матрица $W(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\dot{W}(t) \in L_1[t_0, \infty)$. (Мы пишем, что матрица $F(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$, если $|F(t)| \in L_1[t_0, \infty)$ и $|\cdot|$ — некоторая матричная норма.) Справедлива следующая лемма (см., например, [1, 3, 4, 10]).

Лемма 1 (о диагонализации переменной матрицы). *Пусть все собственные числа матрицы A_s различны, а матрица $W(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\dot{W}(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Тогда при достаточно больших t существует невырожденная матрица $C(t)$ такая, что:*

(i) *по столбцам этой матрицы расположены собственные векторы матрицы $A_s + W(t)$ и $C(t) \to C_0$ при $t \to \infty$. Постоянная матрица C_0 составлена из собственных векторов матрицы A_s;*

(ii) *производная $\dot{C}(t) \in L_1[t_0, \infty)$;*

(iii) *она приводит матрицу $A_s + W(t)$ к диагональному виду, т.е.*

$$C^{-1}(t)\big[A_s + W(t)\big]C(t) = \tilde{\Lambda}(t),$$

где $\tilde{\Lambda}(t) = \mathrm{diag}\big(\tilde{\lambda}_1(t), \ldots, \tilde{\lambda}_n(t)\big)$ и $\tilde{\lambda}_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ — собственные числа матрицы $A_s + W(t)$.

В системе (17) осуществим замену

$$y(t) = C(t)z(t), \tag{18}$$

где $C(t)$ — матрица из леммы 1. Приходим к системе

$$\dot{z} = \tilde{\Lambda}(t)v^s(t)z(t) + R_3(t, z_t), \tag{19}$$

где

$$R_3(t, z_t) = -C^{-1}(t)\dot{C}(t)z(t) + C^{-1}(t)R_2(t, C(t+\theta)z_t).$$

В силу свойств (i) и (ii) матрицы $C(t)$ оператор $R_3(t, z_t)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0 + kh, \infty)$. Система типа (19) является функционально-дифференциальным аналогом так называемой L-диагональной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для построения асимптотики решений такой системы можно воспользоваться вариантом классической теоремы Н. Левинсона, полученным в работе [9]. Опишем подробнее этот результат.

Рассмотрим следующую линейную систему:

$$\dot{z} = \Lambda(t)z(t) + R(t, z_t). \tag{20}$$

Здесь $z \in \mathbb{C}^n$, $z_t(\theta) = z(t + \theta)$ $(-\tau \leq \theta \leq 0)$ — элемент пространства $C_\tau \equiv C\big([-\tau, 0], \mathbb{C}^n\big)$ непрерывных на $[-\tau, 0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^n$. Далее, $\Lambda(t) = \mathrm{diag}\big(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)\big)$ — диагональная матрица, элементами которой являются локально интегрируемые на $[t_0, \infty)$ функции со значениями в $\mathbb{C}$; $R(t, \cdot)$ — линейный ограниченный оператор из класса $\mathcal{L}_1^\tau[t_0, \infty)$. По аналогии с системами обыкновенных дифференциальных уравнений системы функционально-дифференциальных уравнений вида (20) будем называть $\mathcal{L}$-диагональными. Пусть для каждой пары индексов (i, j) имеет место либо неравенство

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big)ds \leq K_1, \qquad t_2 \geq t_1 \geq t_0, \tag{21}$$

либо неравенство

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big) ds \geq K_2, \qquad t_2 \geq t_1 \geq t_0, \tag{22}$$

где K_1, K_2 — некоторые постоянные. Кроме того, предположим, что для любого $j = 1, \ldots, n$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{t}^{t+\tilde{\theta}} \mathrm{Re}\,\lambda_j(s) ds \geq K_3, \qquad t \geq t_0, \quad 0 \leq \tilde{\theta} \leq \tau, \tag{23}$$

где K_3 — некоторая постоянная.

Имеет место следующая теорема (см. [9, Теорема 2]).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (21), (22) *и* (23). *Тогда при достаточно больших $T \geq t_0$ и любом $j = 1, \ldots, n$ существует функция $z_j(t) : [T - h, \infty) \to \mathbb{C}^n$, которая удовлетворяет системе уравнений* (20) *при $t \geq T$ и допускает следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:*

$$z_j(t) = \big[e_j + o(1)\big] \exp\Big\{\int\limits_{T}^{t} \lambda_j(s) ds\Big\}, \tag{24}$$

где $e_j = (0, \ldots, 0, \overset{(j)}{1}, 0, \ldots, 0)$.

Асимптотика произвольного решения системы (20) при $t \to \infty$ описывается следующей теоремой [9, Теорема 5].

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда, если функция $z(t)$ удовлетворяет системе* (20) *при $t \geq T$, то существуют константы $c_1,\ldots,c_n$ такие, что*

$$z(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j\, z_j(t) + o\big(e^{-\beta t}\big), \qquad t \to \infty, \tag{25}$$

где функции $z_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ имеют асимптотику вида (24), *а величина β произвольна.*

Таким образом, если система (10) приводится к виду (19), то асимптотика всех ее решений может быть построена с помощью теорем 1 и 2. Как было ранее отмечено, система (10) и исходная система (5), вообще говоря, не эквивалентны. Тем не менее, справедлив следующий результат, установленный в [13]. Будем рассматривать множество всех решений системы (5) как некоторое подмножество множества решений системы (10) в указанном ранее смысле. Предположим, что система (10) приводится к $\mathcal{L}$-диагональному виду (19). Следовательно, множество всех решений системы (5) переходит в некоторое подмножество всех решений системы (19). Тогда, если асимптотика всех решений системы (19) может быть построена с помощью теорем 1 и 2, то для любого $l = 1, \ldots, n$ в данном подмножестве существуют решения, для которых коэффициент c_l в асимптотическом представлении (25) отличен от нуля. Отсюда следует, что асимптотика всех решений системы (5) и системы (10) может быть описана одними и теми же формулами и качественная динамика этих систем одинакова.

3. Исследование колебаний адиабатических осцилляторов с запаздыванием

Уравнения вида (1) в случае $h = 0$ называют обычно адиабатическими осцилляторами. Пример такого уравнения доставляет адиабатический осциллятор с функцией $q(t)$ вида (3). Известно (см. [2,10–12,14,15]), что если ($\lambda = \pm 2$) и ($\rho \leq 1$) или ($\lambda = \pm 1$) и ($\rho \leq 1/2$), уравнение (1) ($h = 0$) с функцией $q(t)$ вида (3) имеет неограниченные решения при любых значениях параметра $a \neq 0$. В частности, амплитуда колебаний решений $x(t)$ растет, как величина $O\big(f(t)\big)$, где

$$f(t) = \begin{cases} \exp\Big\{\dfrac{|a|}{4}\displaystyle\int t^{-\rho}dt\Big\}, & \dfrac{1}{2} < \rho \leq 1, \\ \exp\Big\{\dfrac{|a|}{4}\dfrac{t^{1-\rho}}{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\Big\}, & 0 < \rho \leq \dfrac{1}{2}, \end{cases} \tag{26}$$

в случае $\lambda = \pm 2$, и

$$f(t) = \begin{cases} \exp\Big\{\dfrac{a^2\sqrt{5}}{24}\displaystyle\int t^{-2\rho}dt\Big\}, & \dfrac{1}{3} < \rho \leq \dfrac{1}{2}, \\ \exp\Big\{\dfrac{a^2\sqrt{5}}{24}\dfrac{t^{1-2\rho}}{1-2\rho}\big(1+o(1)\big)\Big\}, & 0 \leq \rho \leq \dfrac{1}{3}, \end{cases} \tag{27}$$

когда $\lambda = \pm 1$. Если $\lambda \neq \pm 1, \pm 2$, то все решения уравнения (1) с функцией $q(t)$ вида (3) ограничены при $t \geq t_0$ и не стремятся к нулю при $t \to \infty$.

В случае уравнения (1) с монотонно стремящейся к нулю функцией $q(t)$ вида (2) и $h = 0$ несложно показать, что все решения ограничены при $t \geq t_0$ и не стремятся к нулю при $t \to \infty$. Более точно, для линейно независимых решений этого уравнения при $t \to \infty$ справедливо следующее асимптотическое представление:

$$x_{1,2}(t) = \big(1 + o(1)\big) \exp\Big\{\pm \mathrm{i}\Big(t + O\Big(\int t^{-\rho}dt\Big)\Big)\Big\}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению уравнения (1) с функциями вида (2) и (3) в случае $h \neq 0$.

3.1. Построение асимптотики решений уравнения (1), (2)

От уравнения (1) перейдем к системе уравнений:

$$\dot{y}_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y_0(t) + q(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y_0(t-h), \qquad y_0(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix},$$

где функция $q(t)$ определяется формулой (2). Сделаем в этой системе замену $y_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix} y_1(t)$. Приходим к системе

$$\dot{y}_1(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} y_1(t) + \frac{\mathrm{i}}{2} q(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} y_1(t-h). \tag{28}$$

Если

$$\rho > 1,$$

то система (28) имеет $\mathcal{L}$-диагональную форму, а следовательно, для построения асимптотики ее решений при $t \to \infty$ можно воспользоваться теоремой 2. Несложно проверить, что в этом случае для решений исходного уравнения (1) справедлива следующая асимптотическая формула:

$$x(t) = c_1 e^{\mathrm{i}t} + c_2 e^{-\mathrm{i}t} + o(1), \qquad t \to \infty, \tag{29}$$

где c_1, c_2 — некоторые комплексные постоянные.

В дальнейшем будем предполагать, что

$$\rho \le 1.$$

Осуществляя в системе (28) замену $y_1(t) = \mathrm{diag}\big(e^{\mathrm{i}t}, e^{-\mathrm{i}t}\big) y_2(t)$, получим систему вида (5):

$$\dot{y}_2(t) = t^{-\rho} A(t) y_2(t-h), \tag{30}$$

где

$$A(t) = \frac{a\mathrm{i}}{2} \begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}h} & e^{\mathrm{i}h} e^{-2\mathrm{i}t} \\ -e^{-\mathrm{i}h} e^{2\mathrm{i}t} & -e^{\mathrm{i}h} \end{pmatrix}. \tag{31}$$

В системе (30) проделаем последовательность преобразований, описанную в разделе 2. Приходим к системе уравнений вида (10):

$$\dot{y}_2(t) = \Big[t^{-\rho} A_1(t) + t^{-2\rho} A_2(t) + \ldots + t^{-k\rho} A_k(t)\Big] y_2(t) + R(t, (y_2)_t). \tag{32}$$

Здесь $A_1(t), A_2(t), \ldots, A_k(t)$ — матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены, а $R(t,(y_2)_t)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из пространства $C_{(k+1)h}$ в пространство $\mathbb{C}^2$ и принадлежащий классу $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0, \infty)$, где t_0 достаточно велико. Натуральный параметр k определяется из условия, что $0 < k\rho \le 1 < (k+1)\rho$. Матрицы $A_i(t)$ $(i = 1,2,3)$ определяются по формулам (11). В системе (32) при достаточно больших t произведем усредняющую замену вида (13). Получаем следующую усредненную систему:

$$\dot{y}_3(t) = \Big[t^{-\rho} A_1 + t^{-2\rho} A_2 + \ldots + t^{-k\rho} A_k\Big] y_3(t) + R_1(t, (y_3)_t). \tag{33}$$

Здесь $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — постоянные матрицы, а $R_1(t,(y_3)_t)$ — некоторый оператор из класса $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0, \infty)$. В частности, для матриц A_1 и A_2 имеем следующие представления:

$$A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(t)\big] = \mathrm{M}\big[A(t)\big] = \frac{a\mathrm{i}}{2} \begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}h} & 0 \\ 0 & -e^{\mathrm{i}h} \end{pmatrix}$$

и

$$A_2 = \mathrm{M}\big[A_2(t) + A_1(t) Y_1(t)\big], \quad \dot{Y}_1 = A_1(t) - A_1, \quad \mathrm{M}\big[Y_1(t)\big] = 0.$$

Откуда

$$A_2 = \frac{a^2}{8} \begin{pmatrix} (2h - \mathrm{i}) e^{-2\mathrm{i}h} & 0 \\ 0 & (2h + \mathrm{i}) e^{2\mathrm{i}h} \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A_1 имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{a}{2}\big(\sin h \pm \mathfrak{i}\cos h\big). \tag{34}$$

Собственные числа $\lambda_{1,2}$ различны, если $\cos h \neq 0$, т.е. когда $h \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbb{N}_0$. Если $\rho > 1/2$, то система (33) имеет $\mathcal{L}$-диагональный вид, и асимптотика ее решений строится с помощью теоремы 2. В том случае, когда $\rho \leq 1/2$, для приведения системы (33) к $\mathcal{L}$-диагональной форме необходимо воспользоваться леммой 1. В ситуации, когда собственные числа $\lambda_{1,2}$ различны, эта лемма применима. Если же собственные числа $\lambda_{1,2}$ совпадают, т.е.

$$h = \frac{\pi}{2} + \pi m, \qquad m \in \mathbb{N}_0, \tag{35}$$

следует вычислить собственные числа матрицы A_2. Действительно, в этом случае $A_1 = (-1)^m(a/2)I$, а следовательно, замены типа (18) не изменяют вид данной матрицы. Поскольку собственные числа матрицы A_2 в случае (35) различны, то для диагонализации матрицы $t^{-2\rho}A_2 + \ldots + t^{-k\rho}A_k$ в системе (33) мы можем использовать лемму 1.

Таким образом, для решений уравнения (1) с функцией $q(t)$ вида (2) мы получаем следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} x(t) = c_1\big(1 + o(1)\big)\exp\big\{\mathfrak{i}(t + \operatorname{Im}\lambda_1 g(t))\big\}\exp\big\{\operatorname{Re}\lambda_1 g(t)\big\} + \\ + c_2\big(1 + o(1)\big)\exp\big\{-\mathfrak{i}(t + \operatorname{Im}\lambda_1 g(t))\big\}\exp\big\{\operatorname{Re}\lambda_1 g(t)\big\} + o\big(e^{-\beta t}\big), \end{aligned} \tag{36}$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные, β — произвольное действительное число, величина λ_1 определяется формулой (34), и $g(t)$ — общее обозначение для действительных функций вида

$$g(t) = \begin{cases} \displaystyle\int t^{-\rho}dt, & \dfrac{1}{2} < \rho \leq 1, \\ \dfrac{t^{1-\rho}}{1-\rho}\big(1 + o(1)\big), & 0 < \rho \leq \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{37}$$

Указанное асимптотическое представление справедливо лишь в том случае, когда $\operatorname{Im}\lambda_1 \neq 0$ и $\operatorname{Re}\lambda_1 \neq 0$. Если $\operatorname{Im}\lambda_1 = 0$ или $\operatorname{Re}\lambda_1 = 0$, то асимптотическая формула (36) имеет место лишь на промежутке $1/2 < \rho \leq 1$. Для исследования этого критического случая в ситуации, когда $\rho < 1/2$, необходимо учесть вид собственных чисел матрицы A_2. Несложно проверить, что если $\operatorname{Im}\lambda_1 = 0$, т.е. выполнено равенство (35), то асимптотическое представление для решений уравнения (1) имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) = c_1\big(1 + o(1)\big)\exp\big\{\mathfrak{i}\big(t + (a^2/8)\hat{g}(t)\big)\big\}\exp\big\{(-1)^m(a/2)g(t)\big\} + \\ + c_2\big(1 + o(1)\big)\exp\big\{-\mathfrak{i}\big(t + (a^2/8)\hat{g}(t)\big)\big\}\exp\big\{(-1)^m(a/2)g(t)\big\} + o\big(e^{-\beta t}\big), \end{aligned}$$

где функция $g(t)$ определяется формулой (37) и

$$\hat{g}(t) = \begin{cases} \displaystyle\int t^{-2\rho}dt, & \dfrac{1}{3} < \rho \leq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{t^{1-2\rho}}{1-2\rho}\big(1 + o(1)\big), & 0 < \rho \leq \dfrac{1}{3}. \end{cases} \tag{38}$$

В том случае, когда $\rho \le 1/2$ и $\operatorname{Re}\lambda_1 = 0$, т.е. $h = \pi m$, $m \in \mathbb{N}_0$, асимптотическое представление для решений уравнения (1) выглядит следующим образом:

$$x(t) = c_1\bigl(1+o(1)\bigr)\exp\bigl\{\mathrm{i}\bigl(t+(-1)^m(a/2)g(t)\bigr)\bigr\}\exp\bigl\{(a^2\pi m/4)\hat{g}(t)\bigr\}+ \\ + c_2\bigl(1+o(1)\bigr)\exp\bigl\{-\mathrm{i}\bigl(t+(-1)^m(a/2)g(t)\bigr)\bigr\}\exp\bigl\{(a^2\pi m/4)\hat{g}(t)\bigr\}+o\bigl(e^{-\beta t}\bigr),$$

где $g(t)$ определяется формулой (37), а функция $\hat{g}(t)$ — формулой (38).

В завершение этого пункта заметим, что если $a > 0$, то максимальная скорость роста (убывания) амплитуды колебаний достигается при значениях h, определяемых формулой (35), в которой $m = 0, 2, 4, \ldots$ ($m = 1, 3, 5, \ldots$), и является величиной порядка $O\bigl(f(t)\bigr)$, где

$$f(t) = \begin{cases} \exp\Bigl\{\pm\dfrac{a}{2}\displaystyle\int t^{-\rho}dt\Bigr\}, & \dfrac{1}{2} < \rho \le 1, \\ \exp\Bigl\{\pm\dfrac{a}{2}\dfrac{t^{1-\rho}}{(1-\rho)}\bigl(1+o(1)\bigr)\Bigr\}, & 0 < \rho \le \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, в рассмотренном случае амплитуда колебаний решений уравнения (1), (2) может расти интенсивнее, нежели в ситуации обыкновенного дифференциального уравнения (1) ($h = 0$) с функцией $q(t)$ вида (3) при главном резонансе $\lambda = \pm 2$ (сравните с (26)).

3.2. Асимптотика решений уравнения (1), (3)

В работе [13] получены асимптотические формулы для решений уравнения (1) с функцией $q(t)$ вида (3). Приведем здесь эти формулы, а также проанализируем характер колебаний решений уравнения (1), (3).

Если $\lambda \ne \pm 2$ и $1/2 < \rho \le 1$, то решения уравнения (1), (3) при $t \to \infty$ имеют асимптотику вида (29). В случае $\lambda = \pm 2$ справедливо следующее асимптотическое представление для решений уравнения (1), (3) при $t \to \infty$:

$$x(t) = c_1\Bigl[\bigl(1+o(1)\bigr)e^{\mathrm{i}t} + \bigl(e^{-\mathrm{i}h}+o(1)\bigr)e^{-\mathrm{i}t}\Bigr]\exp\Bigl\{\frac{a}{4}g(t)\Bigr\}+ \\ + c_2\Bigl[\bigl(1+o(1)\bigr)e^{\mathrm{i}t} + \bigl(-e^{-\mathrm{i}h}+o(1)\bigr)e^{-\mathrm{i}t}\Bigr]\exp\Bigl\{-\frac{a}{4}g(t)\Bigr\}+o\bigl(e^{-\beta t}\bigr). \quad (39)$$

Здесь c_1, c_2 — некоторые комплексные постоянные, β — произвольное действительное число, а функция $g(t)$ имеет вид (37). Следовательно, скорость роста амплитуды колебаний в главной части такая же, как и в случае, когда запаздывание в уравнении (1), (3) отсутствует (см. формулу (26)).

Пусть теперь $\lambda \ne \pm 2$ и $0 < \rho \le 1/2$. Если $\lambda = \pm 1$, то асимптотика решений уравнения (1), (3) при $t \to \infty$ имеет следующий вид:

$$x(t) = c_1\Bigl[\bigl(\delta_1+o(1)\bigr)e^{\mathrm{i}t} + \bigl(\delta_2+o(1)\bigr)e^{-\mathrm{i}t}\Bigr]\exp\bigl\{\mu_1\hat{g}(t)\bigr\} + O\Bigl(\exp\bigl\{\mu_2\hat{g}(t)\bigr\}\Bigr). \quad (40)$$

Здесь c_1 — произвольная комплексная постоянная, δ_1, δ_2 — некоторые комплексные числа, а величины μ_1 и μ_2 определяются формулой

$$\mu_{1,2} = -\frac{a^2}{6}\sin^3 h \pm \frac{a^2}{24}\sqrt{16\sin^6 h - 12\sin^2 h + 5}. \quad (41)$$

Функция $\hat{g}(t)$ имеет вид (38). В асимптотическом представлении (40) предполагается, что величины μ_1 и μ_2 отличны от нуля. Из формулы (40) следует, что при $0 < \rho \leq 1/2$ уравнение (1), (3) имеет неограниченные решения, если $\mu_1 > 0$. В том случае, когда $0 < \rho \leq 1/2$ и $\mu_1 < 0$ все решения уравнения (1), (3) стремятся к нулю при $t \to \infty$. Легко проверить, что

$$\mu_1 > 0 \quad \sim \quad \sin h < \sqrt{\frac{5}{12}}, \tag{42}$$

$$\mu_1 < 0 \quad \sim \quad \sin h > \sqrt{\frac{5}{12}}. \tag{43}$$

Несложный анализ величины μ_1 как функции переменной h приводит нас к следующему результату. Максимальная скорость роста амплитуды колебаний в случае $\lambda = \pm 1$ достигается при значениях запаздывания $h = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{N}_0$ и является величиной вида $O\big(f(t)\big)$, где

$$f(t) = \begin{cases} \exp\Big\{\dfrac{7a^2}{24}\displaystyle\int t^{-2\rho} dt\Big\}, & \dfrac{1}{3} < \rho \leq \dfrac{1}{2}, \\ \exp\Big\{\dfrac{7a^2}{24}\dfrac{t^{1-2\rho}}{1-2\rho}\big(1+o(1)\big)\Big\}, & 0 \leq \rho \leq \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

В частности, сравнение этой формулы с формулой (27) позволяет утверждать, что при наличии запаздывания решения уравнения (1), (3) в случае $\lambda = \pm 1$ и $0 < \rho < 1/2$ могут расти более интенсивно, чем при $h = 0$. Наконец, заметим, что максимальная скорость затухания амплитуды колебаний в случае $\lambda = \pm 1$ достигается при значениях запаздывания $h = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{N}_0$ и является величиной вида $O\big(f(t)\big)$, где

$$f(t) = \begin{cases} \exp\Big\{-\dfrac{a^2}{24}\displaystyle\int t^{-2\rho} dt\Big\}, & \dfrac{1}{3} < \rho \leq \dfrac{1}{2}, \\ \exp\Big\{-\dfrac{a^2}{24}\dfrac{t^{1-2\rho}}{1-2\rho}\big(1+o(1)\big)\Big\}, & 0 \leq \rho \leq \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Перейдем теперь к исследованию случая $\lambda \neq \pm 1, \pm 2$ и $0 < \rho \leq 1/2$. Для решений уравнения (1), (3) имеет место следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)\exp\big\{\mathrm{i}(t + \operatorname{Im}\nu\hat{g}(t))\big\}\exp\big\{\operatorname{Re}\nu\hat{g}(t)\big\} + \\ + c_2\big(1+o(1)\big)\exp\big\{-\mathrm{i}(t + \operatorname{Im}\nu\hat{g}(t))\big\}\exp\big\{\operatorname{Re}\nu\hat{g}(t)\big\} + o\big(e^{-\beta t}\big), \end{aligned} \tag{44}$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные, β — произвольное действительное число,

$$\nu = \frac{a^2\mathrm{i}}{8\lambda}\left(\frac{e^{\mathrm{i}\lambda h}}{\lambda - 2} + \frac{e^{-\mathrm{i}\lambda h}}{\lambda + 2}\right)e^{-2\mathrm{i}h},$$

а символом $\hat{g}(t)$ обозначены действительные функции вида (38). Несложно проверить, что

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\nu &= \frac{a^2}{4\lambda(\lambda^2-4)}\left(\lambda\sin 2h\cos\lambda h - 2\cos 2h\sin\lambda h\right),\\
\operatorname{Im}\nu &= \frac{a^2}{4\lambda(\lambda^2-4)}\left(\lambda\cos 2h\cos\lambda h + 2\sin 2h\sin\lambda h\right).
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Асимптотическое представление (44) справедливо лишь в том случае, когда $\operatorname{Re}\nu \neq 0$ и $\operatorname{Im}\nu \neq 0$. Очевидно, характер поведения решений уравнения (1), (3) будет определяться величиной $\operatorname{Re}\nu$. Приведем здесь следующий результат, касающийся поведения величины $\operatorname{Re}\nu$ как функции переменных λ и h.

Утверждение 1. *Функция $\operatorname{Re}\nu(\lambda, h)$ обладает следующими свойствами.*

1^0. *При $\lambda = 0$ и $\lambda = \pm 2$ функция $\operatorname{Re}\nu(\lambda, h)$ может быть доопределена до функции, непрерывной во всех точках плоскости (λ, h).*

2^0. *Для любого значения параметра $\lambda \neq \pm 2$ можно выбрать две бесконечные и неограниченные сверху последовательности значений h, h'_n и h''_n, $n \in \mathbb{N}$, такие что*

$$
\operatorname{Re}\nu(\lambda, h'_n) > 0, \qquad \operatorname{Re}\nu(\lambda, h''_n) < 0.
$$

3^0. *В замкнутой области*

$$
\mathcal{D}(n) = \left\{(\lambda, h) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R},\ 0 \le h \le \frac{\pi n}{2}\right\}, \quad n = 3, 4, \ldots
$$

максимальное и минимальное значения функции $\operatorname{Re}\nu(\lambda, h)$ достигаются в точках $\big(0, h_{max}(n)\big)$ $\big(0, h_{min}(n)\big)$ соответственно, где

$$
h_{max}(n) = \begin{cases} \dfrac{\pi n}{2}, & n \text{ — четно},\\[2mm] \dfrac{\pi(n-1)}{2}, & n \text{ — нечетно}, \end{cases} \qquad
h_{min}(n) = \begin{cases} \dfrac{\pi n}{2}, & n \text{ — нечетно},\\[2mm] \dfrac{\pi(n-1)}{2}, & n \text{ — четно}, \end{cases}
$$

и

$$
\operatorname{Re}\nu\big(0, h_{max}(n)\big) = \begin{cases} \dfrac{a^2\pi n}{16}, & n \text{ — четно},\\[2mm] \dfrac{a^2\pi(n-1)}{16}, & n \text{ — нечетно}, \end{cases}
\tag{46}
$$

$$
\operatorname{Re}\nu\big(0, h_{min}(n)\big) = \begin{cases} -\dfrac{a^2\pi n}{16}, & n \text{ — нечетно},\\[2mm] -\dfrac{a^2\pi(n-1)}{16}, & n \text{ — четно}. \end{cases}
\tag{47}
$$

Мы не будем приводить подробное доказательство всех пунктов этого утверждения, ограничившись лишь некоторыми комментариями. Непрерывность функции $\operatorname{Re}(\nu, h)$ легко устанавливается, если доопределить эту функцию до непрерывной по переменной λ в точках прямых $\lambda = 0$ и $\lambda = \pm 2$. Для этого достаточно заметить, что

$$
\lim_{\lambda\to 0}\operatorname{Re}\nu(\lambda, h) = -\frac{a^2}{16}\big(\sin 2h - 2h\cos 2h\big)
\tag{48}
$$

и

$$\lim_{\lambda\to\pm2}\operatorname{Re}\nu(\lambda,h)=-\frac{a^2h}{16}+\frac{a^2\sin 4h}{64}. \tag{49}$$

Для обоснования второго пункта утверждения необходимо показать, что для любого фиксированного значения $\lambda\neq\pm2$ существует неограниченная последовательность h_n, такая что в точках (λ,h_n) функция $\operatorname{Re}\nu(\lambda,h)$ меняет свой знак. В случае $\lambda=0$ этот факт является простым следствием предельного соотношения (48). Если $\lambda\neq 0,\pm2$, то функция $\operatorname{Re}\nu(\lambda,h)$ является почти периодической функцией переменной h с нулевым средним значением. Известное свойство почти периодических функций состоит в том, что если эта функция не меняет своего знака и не равна нулю тождественно, то ее среднее значение отлично от нуля (см., например, [3]). Следовательно, функция $\operatorname{Re}\nu(\lambda,h)$ обязана менять знак в каких-то точках (λ,h_n). Тот факт, что последовательность h_n неограничена, опять же является следствием почти периодичности функции $\operatorname{Re}\nu(\lambda,h)$. Доказательство третьего пункта утверждения представляет собой техническую задачу, и мы не будем здесь на этом останавливаться. Заинтересованный читатель легко может проверить его справедливость самостоятельно.

Из утверждения 1 выводим следующие результаты касательно динамики решений уравнения (1), (3). Во-первых, усиливать или гасить колебания решений этого уравнения при $\rho\le 1/2$ можно при любом значении параметра $\lambda\neq 0,\pm2$. При этом для значений параметров (λ,h) из области $\mathcal{D}(n)$ максимальная скорость роста амплитуды колебаний не достигается в конечной точке (т.к. $\lambda\neq0$), но приближается к максимальной, если $\lambda\to0$ и $h=h_{\max}(n)$. В этом случае максимальная скорость роста амплитуды колебаний приближается к величине вида $O\big(f(t)\big)$, где

$$f(t)=\begin{cases}\exp\Big\{\operatorname{Re}\nu\big(0,h_{\max}(n)\big)\displaystyle\int t^{-2\rho}dt\Big\}, & \dfrac13<\rho\le\dfrac12,\\ \exp\Big\{\operatorname{Re}\nu\big(0,h_{\max}(n)\big)\dfrac{t^{1-2\rho}}{1-2\rho}\big(1+o(1)\big)\Big\}, & 0\le\rho\le\dfrac13.\end{cases} \tag{50}$$

Аналогично заключаем, что максимальная скорость убывания решений при значениях параметров (λ,h) из области $\mathcal{D}(n)$ также не достигается в конечной точке, но приближается к максимальной, если $\lambda\to0$ и $h=h_{\min}(n)$. В этом случае максимальная скорость убывания амплитуды колебаний приближается к величине вида $O\big(f(t)\big)$, где

$$f(t)=\begin{cases}\exp\Big\{\operatorname{Re}\nu\big(0,h_{\min}(n)\big)\displaystyle\int t^{-2\rho}dt\Big\}, & \dfrac13<\rho\le\dfrac12,\\ \exp\Big\{\operatorname{Re}\nu\big(0,h_{\min}(n)\big)\dfrac{t^{1-2\rho}}{1-2\rho}\big(1+o(1)\big)\Big\}, & 0\le\rho\le\dfrac13.\end{cases} \tag{51}$$

Следовательно, увеличивая запаздывание h, мы можем увеличивать скорость роста (убывания) амплитуды колебаний решений уравнения (1), (3), не изменяя при этом амплитуду воздействия (т.е. параметры a и ρ).

Далее, отметим еще один способ увеличения скорости роста (убывания) амплитуды колебаний решений уравнения (1), (3). Фиксируем параметры a, $\rho\le1/2$, $\lambda\neq0$ и положим $h=h_{\max}(n)$ ($h=h_{\min}(n)$). Вместо функции $q(t)$, задаваемой формулой

(3), перейдем к медленно меняющейся функции $q(\varepsilon t)$, где $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр (т.е. «растянем» воздействие). Тогда при стремлении ε к нулю скорость роста (убывания) амплитуды колебаний будет приближаться к величине $O\big(f(t)\big)$, где $f(t)$ определяется формулой (50) (формулой (51)). Кроме того, поскольку

$$q(\varepsilon t) = \frac{a}{(\varepsilon t)^\rho}\sin(\lambda\varepsilon t) = \frac{\hat{a}}{t^\rho}\sin(\lambda\varepsilon t), \qquad \hat{a} = \frac{a}{\varepsilon^\rho}, \tag{52}$$

то в формулах (46) и (47), задающих величины $\operatorname{Re}\nu\big(0, h_{\max}(n)\big)$ и $\operatorname{Re}\nu\big(0, h_{\min}(n)\big)$, следует заменить параметр a на $\hat{a}$. Так как $\hat{a} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, то уменьшение параметра ε оказывает существенное влияние на скорость роста (убывания) амплитуды колебаний решений уравнения (1), в котором функция $q(t)$ определяется формулой (52).

В завершение этого раздела отметим еще одну особенность динамики решений уравнения (1), (3) в ситуации, когда $\lambda \approx \pm 2$ и $\rho \le 1/2$. Напомним, что если $\lambda = \pm 2$ и $\rho \le 1$, то асимптотика решений уравнения (1), (3) определяется формулой (39), а следовательно, у этого уравнения всегда имеются неограниченные решения. Вернемся к рассмотрению предельного равенства (49). Легко показать, что выражение в правой части (49) принимает лишь отрицательные значения для всех $h > 0$. Следовательно, в силу (44) при любом фиксированном значении запаздывания h и при всех значениях параметра λ достаточно близких к $\lambda = \pm 2$ все решения уравнения (1), (3) стремятся к нулю при $t \to \infty$. Такая особенность в поведении решений систем с запаздыванием с близкими к основному резонансу частотами внешнего воздействия для систем с малым параметром была отмечена, например, в работе [5].

4. Построение области резонанса для уравнения (1), (4)

В данном разделе исследуется задача о параметрическом резонансе в уравнении (1), (4). Известно (см., например, [6, 8]), что в отсутствии запаздывания в плоскости параметров (a, α) у уравнения (1), (4) ($h = 0$) имеется зона параметрического резонанса (область неустойчивости решений):

$$-\frac{5a^2}{24} \le \alpha \le \frac{a^2}{24}, \quad a \ne 0. \tag{53}$$

Нас будет интересовать вопрос, как будет изменяться область резонанса (53) при изменении запаздывания h.

От уравнения (1) перейдем к системе (28), точно так же, как это было сделано в разделе 3.1. В системе (28) функция $q(t)$ на сей раз определяется формулой (4). Перейдем в этой системе к новому времени

$$\tau = t + \alpha\ln t. \tag{54}$$

Из геометрических соображений непосредственно следует, что это трансцендентное уравнение имеет единственный корень $t(\tau)$ такой, что $t(\infty) = \infty$. Заметим, что если $\tilde{y}_1(\tau) = y_1(t(\tau))$, то $\tilde{y}_1(\tau - \varphi(\tau)) = y_1\big(t - h\big)$, где

$$\varphi(\tau) = h - \alpha\ln\left(1 - \frac{h}{t(\tau)}\right). \tag{55}$$

Используя асимптотические формулы для функций $t(\tau)$ и $t'(\tau)$ при $\tau \to \infty$

$$t(\tau) = \tau - \alpha \ln \tau + o(1), \qquad t'(\tau) = 1 - \frac{\alpha}{\tau} + O\left(\frac{\ln \tau}{\tau^2}\right), \tag{56}$$

получим следующее представление для системы (28) в новом времени τ:

$$\tilde{y}_1' = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \tilde{y}_1(\tau) - \frac{\alpha}{\tau} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \tilde{y}_1(\tau) + \frac{\mathrm{i}}{2} \frac{a \sin \tau}{\sqrt{\tau}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \tilde{y}_1\big(\tau - \varphi(\tau)\big) + R_1\big(\tau, (\tilde{y}_1)_\tau\big). \tag{57}$$

Из (56) следует, что для функции $\varphi(\tau)$ при $\tau \to \infty$ справедливо следующее асимптотическое представление:

$$\varphi(\tau) = h + \frac{\alpha h}{\tau} + O\left(\frac{\ln \tau}{\tau^2}\right). \tag{58}$$

Таким образом, фазовым пространством системы (57) можно считать пространство $C_{h+\delta} \equiv C\big([-h-\delta, 0], \mathbb{C}^2\big)$ непрерывных на $[-h-\delta, 0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^2$, где $\delta > 0$ — некоторое фиксированное число. Далее, $(\tilde{y}_1)_\tau(\theta) = \tilde{y}_1(\tau+\theta)$ $(-h-\delta \le \theta \le 0)$ — элемент пространства $C_{h+\delta}$. Наконец, $R_1\big(\tau, (\tilde{y}_1)_\tau\big)$ — линейный ограниченный оператор из класса $\mathcal{L}_1^{h+\delta}[\tau_0, \infty)$.

В системе (57) выполним замену $\tilde{y}_1 = \operatorname{diag}\left(e^{\mathrm{i}\tau}, e^{-\mathrm{i}\tau}\right) y_2$, предварительно разложив $\sin \tau$ по формуле Эйлера. Приходим к системе

$$y_2' = \tau^{-1/2} A_1(\tau) y_2\big(\tau - \varphi(\tau)\big) + \tau^{-1} B_1 y_2(\tau) + R_2\big(\tau, (y_2)_\tau\big), \tag{59}$$

где

$$A_1(\tau) = \frac{a}{4} \begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}h}(e^{\mathrm{i}\tau} - e^{-\mathrm{i}\tau}) & e^{\mathrm{i}h}(e^{-\mathrm{i}\tau} - e^{-3\mathrm{i}\tau}) \\ e^{-\mathrm{i}h}(e^{\mathrm{i}\tau} - e^{3\mathrm{i}\tau}) & e^{\mathrm{i}h}(e^{-\mathrm{i}\tau} - e^{\mathrm{i}\tau}) \end{pmatrix}, \qquad B_1 = -\mathrm{i}\alpha \operatorname{diag}(1, -1). \tag{60}$$

Здесь мы, разумеется, учли асимптотическое представление (58) для функции $\varphi(\tau)$. Система (59) не является системой вида (5), однако для ее дальнейшего упрощения можно применить изложенный в разделе 2 метод. Обоснование соответствующей методики проводится точно так же, как это сделано в работе [13] для систем функционально-дифференциальных уравнений более общего вида, нежели система (5). Таким образом, система (59) может быть преобразована к следующему виду:

$$y_3' = \Big[\tau^{-1/2} A_1(\tau) + \tau^{-1} A_2(\tau)\Big] y_3(\tau) + R_3\big(\tau, (y_3)_\tau\big). \tag{61}$$

Здесь

$$A_2(\tau) = -A_1(\tau) \int\limits_{\tau-h}^{\tau} A_1(s) ds + B_1,$$

матрицы $A_1(\tau)$ и B_1 определяются формулами (60), $(y_3)_\tau(\theta)$ — элемент пространства $C_{3(h+\delta)}$, $R_3\big(\tau, (y_3)_\tau\big)$ — линейный ограниченный оператор из класса $\mathcal{L}_1^{3(h+\delta)}[\tau_*, \infty)$.

В системе (61) при достаточно больших значения τ осуществим усредняющую замену вида

$$y_3 = \Big[I + \tau^{-1/2} Y_1(\tau) + \tau^{-1} Y_2(\tau)\Big] y_4(\tau),$$

где элементами матриц $Y_1(\tau)$ и $Y_2(\tau)$ являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением. В результате этой замены приходим к системе

$$y_4' = \Big[\tau^{-1/2}A_1 + \tau^{-1}A_2\Big]y_4(\tau) + R_4\big(\tau,(y_3)_\tau\big), \tag{62}$$

в которой постоянные матрицы A_1 и A_2 вычисляются по формулам (15), (16). Несложно проверить, что

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = -\frac{a^2}{24}\mathrm{i}\begin{pmatrix} 3e^{-\mathrm{i}h} - e^{-3\mathrm{i}h} & -3e^{\mathrm{i}h} \\ 3e^{-\mathrm{i}h} & -3e^{\mathrm{i}h} + e^{3\mathrm{i}h}\end{pmatrix} - \mathrm{i}\alpha\,\mathrm{diag}(1,-1).$$

Таким образом, если матрица A_2 диагонализируема, то асимптотика решений системы (62) может быть построена с помощью теоремы 2. Если же матрица A_2 подобна жордановой клетке, то система (62) все равно может быть приведена к $\mathcal{L}$-диагональному виду по аналогии с тем, как это сделано в работе [8]. Нас в дальнейшем будем интересовать лишь вопрос о поиске тех значений параметров a, α и h, при которых система (62) (а следовательно, и уравнение (1), (4)) имеет неограниченные решения.

Собственные числа матрицы A_2 определяются как корни характеристического многочлена

$$\mu^2 - \mathrm{tr}\,A_2\,\mu + \det A_2 = 0. \tag{63}$$

Здесь

$$\mathrm{tr}\,A_2 = -\frac{a^2}{3}\sin^3 h, \qquad \det A_2 = \alpha^2 + \frac{7a^4}{24^2} + \frac{a^2\alpha}{2}\cos h - \frac{a^4}{48}\cos^2 h - \frac{a^2\alpha}{3}\cos^3 h.$$

Система (62) имеет неограниченные решения в том и только в том случае, когда уравнение (63) имеет корень с положительной вещественной частью или два нулевых корня (в этом случае матрица A_2 подобна жордановой клетке). Следовательно, система (62) имеет неограниченные решения лишь в следующих случаях: $\mathrm{tr}\,A_2 > 0$, $\det A_2 < 0$ или $\mathrm{tr}\,A_2 = \det A_2 = 0$. Поскольку величины $\mathrm{tr}\,A_2$ и $\det A_2$ являются 2π-периодическими функциями переменной h, ограничимся рассмотрением задачи о параметрическом резонансе в уравнении (1), (4) лишь в интервале $h \in [0, 2\pi)$.

Легко видеть, что

$$\mathrm{tr}\,A_2 > 0 \quad \sim \quad h \in \big(\pi, 2\pi\big). \tag{64}$$

Отсюда заключаем, что при значениях запаздывания, принадлежащих интервалу (64), неограниченные колебания в уравнении (1), (4) существуют при любых значениях параметров α и $a \neq 0$, т.е. вся плоскость (a,α), за исключением прямой $a = 0$, является областью неустойчивости решений. Для исследования случая $\det A_2 < 0$ удобно рассмотреть величину $\det A_2$ как функцию переменной α. Нетрудно проверить, что

$$\det A_2 < 0 \quad \sim \quad \alpha_1(h) < \alpha < \alpha_2(h), \tag{65}$$

где

$$\alpha_{1,2}(h) = -\frac{a^2}{12}\big(3 - 2\cos^2 h\big)\cos h \mp \frac{a^2}{24}\sqrt{9 - 16\sin^6 h}. \tag{66}$$

Заметим также, что интервал (65) не вырождается в пустое множество, только если

$$9 - 16\sin^6 h > 0 \quad \sim \quad |\sin h| < \sqrt[3]{\frac{3}{4}}. \tag{67}$$

Назовем «шириной» области резонанса величину

$$d(h) = \alpha_2(h) - \alpha_1(h) = \frac{a^2}{12}\sqrt{9 - 16\sin^6 h}, \tag{68}$$

рассматриваемую как функцию переменной h. Из (68) следует, что

$$\max_{h\in[0,\pi]} d(h) = d(0) = d(\pi) = \frac{a^2}{4}.$$

Поскольку в точках $h = \pi k$ $(k = 0, 1)$ след матрицы A_2 равен нулю, то перейдем к анализу ситуации, когда $\operatorname{tr} A_2 = 0$ и $\det A_2 \le 0$. Этот случай реализуется только в точках $h = \pi k$ $(k = 0, 1)$. Замечая, что $\det A_2 = 0$ лишь тогда, когда $\alpha = \alpha_1$ или $\alpha = \alpha_2$, заключаем, что зона резонанса при $h = \pi k$ задается неравенствами

$$\frac{\big(2(-1)^{k+1} - 3\big)a^2}{24} \le \alpha \le \frac{\big(2(-1)^{k+1} + 3\big)a^2}{24}, \qquad k = 0, 1. \tag{69}$$

Отсюда следует, что «ширина» зоны резонанса в промежутке $h \in [0, \pi]$, действительно, максимальна в точках $h = \pi k$ $(k = 0, 1)$, а сама зона резонанса при этих значениях запаздывания задается неравенствами (69).

Из формул (64) и (67) следует, что уравнение (1), (4) имеет неограниченные решения при некоторых a и α только при тех значениях запаздывания, для которых

$$\sin h < \sqrt[3]{\frac{3}{4}}. \tag{70}$$

Сопоставляя (70) с неравенством (42), заключаем, что неустойчивость решений уравнения (1), (4) в сравнении с уравнением (1), (3), где $\lambda = 1$, реализуется для более широкого множества значений запаздывания h.

На рис. 1 при некоторых значениях запаздывания h изображены зоны параметрического резонанса для уравнения (1), (4), определяемые неравенствами (65), (66) и (69).

5. Заключение

В завершение этой работы выделим основные полученные в ней результаты.

Во-первых, нами установлено, что в отличие от адиабатического осциллятора (1), (2) с $h = 0$ при введении фактора запаздывания возможно усиление (гашение) колебаний даже в тех случаях, когда функция $q(t)$ стремится к нулю монотонно.

Во-вторых, обнаружено, что в уравнении (1), (3) неограниченный рост, а также убывание к нулю амплитуды колебаний возможны при любой частоте $\lambda \ne 0, \pm 2$ внешнего воздействия $q(t)$.

В-третьих, нами показано, что в уравнении (1), (3) при $\rho \le 1/2$ увеличение величины запаздывания h может привести к существенному увеличению скорости роста (убывания) амплитуды колебаний. Кроме того, такого же результата можно добиться при некотором фиксированном (подходящим образом) значении величины h, если «растянуть» воздействие во времени, т.е. перейти от функции $q(t)$ вида (3) к функции $q(\varepsilon t)$, где $0 < \varepsilon \ll 1$. Последнее невозможно в уравнении (1), (3) с $h = 0$.

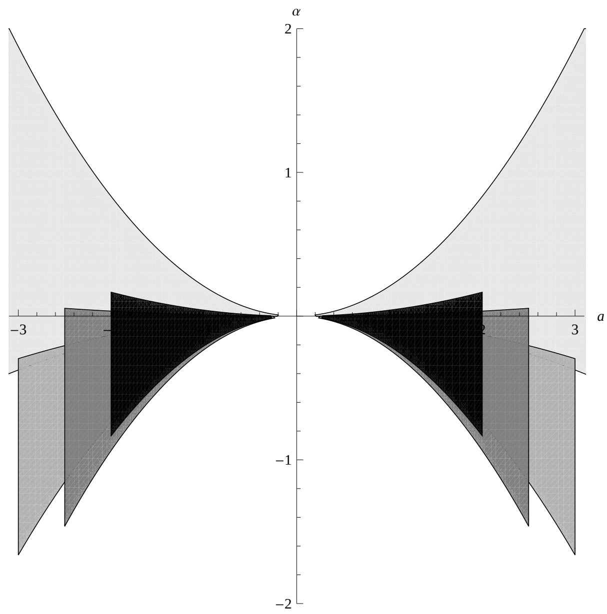

Рис. 1. Зоны неустойчивости (параметрического резонанса) для уравнения (1), (4) при значениях запаздывания $h = 0$; 0.6; 1; π (от темных тонов к более светлым соответственно)

Наконец, мы установили, что в уравнении (1), (4) в промежутке $h \in [0, \pi]$ своей максимальной «ширины» зона параметрического резонанса достигает в точках $h = \pi k$ $(k = 0, 1)$, а сама область резонанса описывается неравенствами (69). При значении запаздывания $h \in (\pi, 2\pi)$ вся плоскость переменных (a, α), за исключением прямой $a = 0$, является зоной параметрического резонанса для уравнения (1), (4). На промежутках вида $h \in [2\pi n, (2n + 2)\pi]$, $n \in \mathbb{N}$, указанные свойства зоны резонанса повторяются по отношению к величине запаздывания $h - 2\pi n$.

Список литературы

1. *Беллман Р.* Теория устойчивости дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954. 216 с. (*Bellman R.* Stability theory of differential equations. New York: McGraw-Hill, 1953.)

2. *Бурд В.Ш., Каракулин В.А.* Асимптотическое интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами // Математические заметки. 1998. Т. 64, №5. С. 658–666. (English transl.: *Burd V.Sh., Karakulin V.A.* On the asymptotic integration of systems of linear differential equations with oscillatory decreasing coefficients // Math. Notes. 1998. V. 64, No. 5. P. 571–578.)

3. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с. (*Demidovich B.P.* Lekcii po matematicheskoy teorii ustoychivosti. Moskva: Nauka, 1967. 472 p. [in Russian])

4. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958. 475 с. (*Coddington E.A., Levinson N.* Theory of Ordinary Differential Equations. New York: McGraw-Hill, 1955.)

5. *Майоров В.В.* Исследование устойчивости решений одного линейного дифференциального уравнения с последействием, встречающегося в приложениях // Вестник Ярославского университета. Исследования по устойчивости и теории колебаний. 1973. Вып. 5. С. 86–93. (*Mayorov V.V.* Issledovanie ustoychivosti resheniy odnogo lineynogo differentsial'nogo uravneniya s posledeystviem, vstrechayushchegosya v prilozheniyah // Vestnik Yaroslavskogo universiteta. Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy. 1973. Issue 5. P. 86–93 [in Russian])

6. *Нестеров П.Н.* Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, №6. С. 731–742. (English transl.: *Nesterov P.N.* Averaging method in the asymptotic integration problem for systems with oscillatory-decreasing coefficients // Differ. Equ. 2007. V. 43, No. 6. P. 745–756.)

7. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. (*Hale J.K.* Theory of functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1977.)

8. *Burd V., Nesterov P.* Parametric resonance in adiabatic oscillators // Results Math. 2010. Vol. 58, No. 1-2. P. 1–15.

9. *Cassel J.S., Hou Z.* Asymptotically diagonal linear differential equations with retardation // J. Lond. Math. Soc. 1993. Vol. 47. P. 473–483.

10. *Eastham M.S.P.* The asymptotic solution of linear differential systems. London Math. Soc. Monographs. Oxford: Clarendon Press, 1989.

11. *Harris W.A. Jr., Lutz D.A.* On the asymptotic integration of linear differential systems // J. Math. Anal. Appl. 1974. Vol. 48, №1. P. 1–16.

12. *Harris W.A. Jr., Lutz D.A.* A Unified Theory of Asymptotic Integration // J. Math. Anal. Appl. 1977. Vol. 57, №3. P. 571–586.

13. Nesterov P. Asymptotic integration of functional differential systems with oscillatory decreasing coefficients // Monatsh. Math. 2013. Vol. 171, No. 2. P. 217–240.

14. *Wintner A.* The adiabatic linear oscillator // Amer. J. Math. 1946. V. 68. P. 385–397.

15. *Wintner A.* Asymptotic integration of the adiabatic oscillator // Amer. J. Math. 1946. V. 69. P. 251–272.

Features of Oscillations in Adiabatic Oscillators with Delay

Nesterov P.N., Agafonchikov E.N.

P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: adiabatic oscillator, delay differential equation, resonance, method of averaging, asymptotics.

In this paper, we describe the features of oscillations in adiabatic oscillators when the delay is introduced into the equation. We give a short description of the method of asymptotic integration of one class of linear delay differential systems in the neighborhood of infinity. This method is based on the idea of transforming the initial system in order to reduce it to the system that is close in some sense to the system of ordinary differential equations. When applying this method, we need to extend the phase space of the initial system. The averaging changes of variables are also used to simplify the procedure of constructing the asymptotic formulas. Finally, we apply the functional differential analog of the Levinson theorem. We use this method to get the asymptotic formulas for adiabatic oscillators with delay under a monotonely and also oscillatory tending to zero perturbations. In conclusion, we study the transformation of the parametric resonance zone of one adiabatic oscillator when the delay is varied.

Сведения об авторах:
Нестеров Павел Николаевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд. физ.-мат. наук, доцент
Агафончиков Евгений Николаевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
аспирант