Модел. и анализ информ. систем. Т. **20**, № **5** (2013) 78–89

УДК 519.3:62-50

Об одной задаче оптимального управления для нелинейного псевдогиперболического уравнения

Юлдашев Т. К.

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М. Ф. Решетнева 660014, Россия, Красноярск, пр-т "Красноярский рабочий", 31

e-mail: tursunbay@rambler.ru

получена 8 октября 2012

Ключевые слова: оптимальное управление, обобщенная разрешимость, интегральное тождество, приближенное решение, минимизация функционала

Изучаются вопросы приближенного решения одной задачи оптимального управления для нелинейного псевдогиперболического уравнения пятого порядка с начально-граничными условиями и общим видом критерия оптимальности. Использование метода разделения переменных в виде ряда Фурье сводит обобщенное решение начально-граничной задачи к счетной системе нелинейных интегральных уравнений. С помощью методов последовательных приближений и интегральных неравенств изучается однозначная разрешимость конечной системы нелинейных интегральных уравнений при фиксированных значениях управления, для которых выполняется заданное условие ограниченности. Оценивается допускаемая погрешность по состоянию «укороченного» обобщенного решения начально-граничной задачи. Далее доказывается, что последовательность управлений является минимизирующей последовательностью для искомой задачи.

1. Введение

Смешанные задачи в теории упругости возникают при расчете различных деталей машин и элементов конструкций, находящихся во взаимодействии, при расчете фундаментов и оснований сооружений [1], [2]. Смешанными задачами также являются многие задачи концентрации напряжений в окрестности всевозможных трещин, инородных включений, подкрепляющих стрингеров и накладок. Много смешанных задач и в гидродинамике. Это и нелинейные задачи теории крыла и глиссирования, теории струйных течений, теории качки корабля и удара тел о поверхность жидкости, фильтрации, теории взрыва, ряд задач гидроупругости.

Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков.

Современные методы решения задач управления в значительной степени основываются на концепции оптимальности, что определяет широкое применение методов и алгоритмов теории оптимизации при проектировании и совершенствовании систем управления [3], [4]. Многие задачи управления формулируются как конечномерные оптимизационные задачи. К таким задачам, в частности, относятся и задачи адаптивных систем управления. При приближенном решении задач оптимального управления системами с распределенными параметрами используется широкий спектр разных методов [5], [6].

Пусть управляемый процесс описывается квазилинейным псевдогиперболическим уравнением вида

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u(t,x)-\nu\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right)+\mu\frac{\partial^5 u(t,x)}{\partial t\,\partial x^4}+\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x^4}=P(t,x)+f\left(t,x,u(t,x)\right) \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$u(t,x)_{|t=0}=\varphi_1(x),\ \frac{\partial}{\partial t}u(t,x)_{|t=0}=\varphi_2(x) \quad (2)$$

$$u(t,x)_{|x=0}=u_{xx}(t,x)_{|x=0}=u(t,x)_{|x=l}=u_{xx}(t,x)_{|x=l}=0, \quad (3)$$

где $f\left(t,x,u\right)\in C\left(D\times R\right)$, $P(t,x)$ – управляющая функция, $\varphi_j(x)\in C^5(D_l)$, $\varphi_j(x)_{|x=0}=\varphi_j''(x)_{|x=0}=\varphi_j(x)_{|x=l}=\varphi_j''(x)_{|x=l}=0,\ j=1,2,\ D\equiv D_T\times D_l,\ D_T\equiv[0,T],\ D_l\equiv[0,l]$, $0<T<\infty$, $0<l<\infty$, $0<\nu$, μ – малые параметры.

При $\nu=\mu=0$ уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x^4}=P(t,x)+f\left(t,x,u(t,x)\right), \quad (4)$$

которое с нулевым управлением изучено Рэлеем при исследовании задачи о поперечных колебаниях стержней [7]. Рэлей для решения этой задачи использовал смешанные условия типа (2) и (3). Вопросы слабой разрешимости смешанной задачи (1) – (3) изучены в [8], а в работе [9] обоснована возможность строения аппроксимации решения этой задачи решением уравнения (4) при смешанных условиях (2) и (3).

В данной работе рассматриваются вопросы приближенного решения задачи оптимального управления для нелинейного псевдогиперболического уравнения пятого порядка. Здесь, как и в работах [10], [11], при фиксированном $P(t,x)$ используется метод разделения переменных, основанный на поиске решения смешанной задачи (1) – (3) в виде ряда Фурье

$$u(t,x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i(t)\,b_i(x),\ b_i(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_i x,\ \lambda_i=\frac{i\pi}{l},\ i=1,2,\ldots$$

Задача. *Найти такую управляющую функцию*

$$P^\star(t,x)\in\Omega\equiv\{P^\star:\left|P^\star(t,x)\right|\le M^\star,\ (t,x)\in D\}$$

и соответствующее ей состояние $u^\star(t,x)$ *смешанной задачи (1) – (3), что доставляют минимум функционалу*

$$J[P]=\int\limits_0^T g\big(t,x,u(t,x,\nu,\mu),P(t,x)\big)\,dt. \tag{5}$$

В множестве $\big\{a(t)=(a_i(t))|a_i(t)\in C(D_T),\ i=1,2,3,\dots\big\}$ с помощью нормы

$$\|a(t)\|_{B_2(T)}=\left[\sum_{i=1}^{\infty}\max_{t\in D_T}|a_i(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

вводится банахово пространство $B_2(T)$. Наряду с $B_2(T)$ рассматривается и банахово пространство $B_2^N(T)$ с нормой

$$\|a^N(t)\|_{B_2^N(T)}=\left[\sum_{i=1}^{N}\max_{t\in D_T}|a_i^N(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначается через $W_2^2(D)$ множество функций $\Phi(t,x)$ таких, что $\Phi(t,x)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(t,x)$ при фиксированном $t\in D_T$ принадлежат области определения оператора $\frac{\partial^4}{\partial x^4}$, имеют производные второго порядка по t, принадлежащие $L_2(D)$, и обращаются в нуль при $t\ge T-\delta$ ($0<\delta$ зависит от $\Phi(t,x)$).

Предполагается также, что $P(t,x)$ допускает разложение в ряд Фурье по собственным функциям $b_i(x)$. Функционал (5) преобразуем, т.е. функцию $g\big(t,x,u(t,x),P(t,x)\big)$ разложим в ряд Фурье. Тогда имеем

$$J[P_i]=\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_0^T\int\limits_0^l g\left(t,y,\sum_{j=1}^{\infty}a_j(t,\nu,\mu)\cdot b_j(y),\sum_{j=1}^{\infty}p_j(t)\cdot b_j(y)\right)\cdot b_j(y)dydt. \tag{6}$$

Определение. *Если функция* $u(t,x)\in C(D)$ *удовлетворяет следующему интегральному тождеству*

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l\Big\{u(t,y)\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t,y)-\nu\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial y^2}\Phi(t,y)-\mu\frac{\partial^5}{\partial t\partial y^4}\Phi(t,y)+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi(t,y)\right]-$$

$$-\Big[P(t,y)+f\big(t,y,u(t,y)\big)\Big]\Phi(t,y)\Big\}\,dydt=$$

$$=\int\limits_0^l\varphi_1(y)\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,y)-\nu\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial y^2}\Phi(t,y)+\mu\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi(t,y)\right]_{t=0}dy-$$

$$-\int_0^l \varphi_2(y)\left[\Phi(t,y)-\nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(t,y)\right]_{t=0} dy$$

для любого $\Phi(t,x)\in W_2^2(D)$, то она называется обобщенным решением смешанной задачи (1) – (3).

2. Сведение решения смешанной задачи к интегральному уравнению

Теорема 1. *Пусть $\lambda_i^4\mu^2-4\lambda_i^2\nu-4<0$. Тогда решение смешанной задачи (1) – (3) в области D представимо в виде*

$$u(t,x,\nu,\mu)=\sum_{i=1}^{\infty}\Big\{W_i(t,\nu,\mu)+\int_0^t\Big[p_i(s)+$$

$$+\int_0^l f\Big(s,y,\sum_{j=1}^{\infty}a_j(s,\nu,\mu)\cdot b_j(y)\Big)\cdot b_i(y)dy\Big]\cdot G_i(t,s,\nu,\mu)ds\Big\}\cdot b_i(x), \tag{7}$$

где функции $a_i(t,\nu,\mu)$ определяются как решение следующей счетной системы нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ):

$$a_i(t,\nu,\mu)=W_i(t,\nu,\mu)+$$

$$+\int_0^t\Big[p_i(s)+\int_0^l f\Big(s,y,\sum_{j=1}^{\infty}a_j(s,\nu,\mu)\cdot b_j(y)\Big)\cdot b_i(y)dy\Big]\cdot G_i(t,s,\nu,\mu)ds, \tag{8}$$

$$W_i(t,\nu,\mu)=\exp\Big\{-\frac{1}{2}\omega_{1i}(\nu,\mu)t\Big\}\times$$

$$\times\Big[\varphi_{1i}\cos\omega_{2i}(\nu,\mu)\frac{t}{2}+\frac{2}{\omega_{2i}(\nu,\mu)}\Big(\varphi_{2i}+\frac{\varphi_{1i}}{2}\omega_{1i}(\nu,\mu)\Big)\sin\omega_{2i}(\nu,\mu)\frac{t}{2}\Big],$$

$$G_i(t,s,\nu,\mu)=\frac{2\exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)\frac{t-s}{2}\Big\}\sin\omega_{2i}(\nu,\mu)\frac{t-s}{2}}{\omega_{0i}(\nu)\Big[\omega_{2i}(\nu,\mu)+\omega_{1i}(\nu,\mu)\sin\omega_{2i}(\nu,\mu)s\Big]},$$

$$\omega_{0i}(\nu)=1+\lambda_i^2\nu,\ \omega_{1i}(\nu,\mu)=\frac{\lambda_i^4\mu}{\omega_{0i}(\nu)},\ \omega_{2i}(\nu,\mu)=\frac{\lambda_i^2\sqrt{4\omega_{0i}(\nu)-\lambda_i^4\mu^2}}{\omega_{0i}(\nu)},$$

$$\varphi_{ki}=\int_0^l\varphi_k(y)\cdot b_i(y)\,dy,\ k=1,2.$$

Доказательство. Из определения обобщенного решения смешанной задачи (1) – (3) имеем

$$\int_0^t \int_0^l \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i(s) b_i(y) \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2}\Phi(s,y) - \nu \frac{\partial^4}{\partial s^2 \partial y^2}\Phi(s,y) - \mu \frac{\partial^5}{\partial s \partial y^4}\Phi(s,y) + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi(s,y) \right] -$$

$$- \big[P(s,y) + f\big(s,y,u(s,y)\big) \big] \Phi(s,y) \Big\} \, dy \, ds =$$

$$= \int_0^l \varphi_1(y) \left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,y) - \nu \frac{\partial^3}{\partial t \, \partial y^2}\Phi(t,y) + \mu \frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi(t,y) \right]_{t=0} dy -$$

$$- \int_0^l \varphi_2(y) \left[\Phi(t,y) - \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(t,y) \right]_{t=0} dy. \tag{9}$$

Так как $\Phi = \Phi_m(t,x) = h(t) \cdot b_m(x) \in W_2^2(D)$, где $h(t) \in C^2(D_T)$, то из (9) следует

$$\int_0^t \int_0^l \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i(s) b_i(y) \Big[h''(s) \cdot b_m(y) + \lambda_i^2 \nu h''(s) \cdot b_m(y) + \lambda_i^4 \mu h'(s) \cdot b_m(y) + \lambda_i^4 h(s) \cdot b_m(y) \Big] -$$

$$- \Big[P(s,y) + f\Big(s,y, \sum_{j=1}^{\infty} a_j(s) \cdot b_j(y)\Big) \Big] \cdot h(s) \Big\} dy ds = 0.$$

Учет в последнем равенстве того, что функции $b_i(x)$ полны и ортонормированы в $L_2(D_l)$, дает

$$\int_0^t \Big\{ a_i(s) \Big(h''(s) + \lambda_i^2 \nu h''(s) + \lambda_i^4 \mu h'(s) + \lambda_i^4 h(s) \Big) -$$

$$- \Big[p_i(s) + \int_0^l f\Big(s,y, \sum_{j=1}^{\infty} a_j(s) \cdot b_j(y)\Big) \cdot b_i(y) dy \Big] \cdot h(s) \Big\} ds = 0.$$

Отсюда, интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^T h(t) \cdot \Big\{ a_i''(t) + \lambda_i^2 \nu a_i''(t) + \lambda_i^4 \mu a_i'(t) + \lambda_i^4 a_i(t) -$$

$$- \Big[p_i(t) + \int_0^l f\Big(t,y, \sum_{j=1}^{\infty} a_j(t) \cdot b_j(y)\Big) \cdot b_i(y) dy \Big] \Big\} dt = 0. \tag{10}$$

Так как $h(t)$ – любая функция, удовлетворяющая указанным выше условиям, то $a_i(t)$ имеет обобщенную производную второго порядка по t в смысле Соболева на отрезке D_T. Из (10) приходим к счетной системе нелинейных дифференциальных уравнений

$$a_i''(t) + \omega_{1i}(\nu,\mu)a_i'(t) + \omega_{1i}(\nu,1)a_i(t) =$$
$$= \frac{1}{\omega_{0i}(\nu)}\left[p_i(t) + \int_0^l f\Big(t,y,\sum_{j=1}^{\infty} a_j(t)\cdot b_j(y)\Big)\cdot b_i(y)dy\right]. \qquad (11)$$

Система (11) решается методом вариации произвольных постоянных и при этом используются начальные условия $a_i(0) = \varphi_{1i}$, $a_i'(0) = \varphi_{2i}$. Тогда из (11) придем к ССНИУ (8). Подставляя (8) в ряд Фурье, получим (7).

3. Приближенная разрешимость смешанной задачи

Рассмотрим укороченную систему интегральных уравнений

$$u^N(t,x,\nu,\mu) = \sum_{i=1}^{N}\Big\{W_i^N(t,\nu,\mu) + \int_0^t \Big[p_i^N(s) +$$
$$+ \int_0^l f\Big(s,y,\sum_{j=1}^{N} a_j^N(s,\nu,\mu)\cdot b_j^N(y)\Big)\cdot b_i^N(y)dy\Big]\cdot G_i^N(t,s,\nu,\mu)ds\Big\}\cdot b_i^N(x), \qquad (12)$$

где $a_i^N(t,\nu,\mu)$ определяются как решение следующей конечной системы нелинейных интегральных уравнений (КСНИУ):

$$a_i^N(t,\nu,\mu) = W_i^N(t,\nu,\mu) +$$
$$+ \int_0^t \Big[p_i^N(s) + \int_0^l f\Big(s,y,\sum_{j=1}^{N} a_j^N(s,\nu,\mu)\cdot b_{j^N}(y)\Big)\cdot b_i^N(y)dy\Big]\cdot G_i^N(t,s,\nu,\mu)ds, \qquad (13)$$

$$W_i^N(t,\nu,\mu) = \exp\Big\{-\frac{1}{2}\omega_{1i}^N(\nu,\mu)t\Big\}\times$$
$$\times\Big[\varphi_{1i}^N \cos\omega_{2i}^N(\nu,\mu)\frac{t}{2} + \frac{2}{\omega_{2i}^N(\nu,\mu)}\Big(\varphi_{2i}^N + \frac{\varphi_{1i}^N}{2}\omega_{1i}^N(\nu,\mu)\Big)\sin\omega_{2i}^N(\nu,\mu)\frac{t}{2}\Big],$$

$$G_i^N(t,s,\nu,\mu) = \frac{2\exp\left\{-\omega_{1i}^N(\nu,\mu)\frac{t-s}{2}\right\}\sin\omega_{2i}^N(\nu,\mu)\frac{t-s}{2}}{\omega_{0i}^N(\nu)\Big[\omega_{2i}^N(\nu,\mu) + \omega_{1i}^N(\nu,\mu)\sin\omega_{2i}^N(\nu,\mu)s\Big]},$$

$$\omega_{0i}^N(\nu) = 1 + \lambda_i^{2N}\nu,\ \omega_{1i}^N(\nu,\mu) = \frac{\lambda_i^{4N}\mu}{\omega_{0i}^N(\nu)},\ \omega_{2i}^N(\nu,\mu) = \frac{\lambda_i^{2N}\sqrt{4\omega_{0i}^N(\nu) - \lambda_i^{4N}\mu^2}}{\omega_{0i}^N(\nu)},$$

а начальные данные φ_{1i}^N, φ_{2i}^N подбираются из (2) так, что суммы

$$\varphi_1^N(x) = \sum_{i=1}^{N}\varphi_{1i}^N\cdot b_i^N(x),\ \varphi_2^N(x) = \sum_{i=1}^{N}\varphi_{2i}^N\cdot b_i^N(x)$$

аппроксимируют при $N \to \infty$ функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \in L_2(D_l)$.

Для произвольной непрерывной функции $\tau(x)$, $x \in D_l$ примем норму

$$\left\|\tau(x)\right\|_{L_2(D_l)} \equiv \left(\int\limits_0^l |\tau(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются следующие условия:*

1. $\lambda_i^{4N}\mu^2 - 4\lambda_i^{2N}\nu - 4 < 0$;
2. $\int\limits_0^T \left\|f\left(t,x,u^N\right)\right\|_{L_2(D_l)} dt \leq \Delta < \infty$,
3. $f\big(t,x,u^N\big) \in Lip\Big\{L(t,x)_{|\,u^N}\Big\}$, $0 < \int\limits_0^t \left\|L(t,x)\right\|_{L_2(D_l)} ds < \infty$;
4. $\left\|W_i^N(t)\right\|_{B_2^N(T)} < \infty$.

Тогда при фиксированных значениях управления $P(t,x)$ укороченная система интегральных уравнений (12) имеет единственное решение в области D.

Доказательство. Используем метод последовательных приближений. Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$a_i^{N\,0}(t,\nu,\mu) = W_i^N(t,\nu,\mu) + \int\limits_0^t p_i^N(s) G_i^N(t,s,\nu,\mu)ds,$$

$$a_i^{N\,k+1}(t,\nu,\mu) = W_i^N(t,\nu,\mu) + \int\limits_0^t \Big[P_i^N(s)+$$

$$+\int\limits_0^l f\Big(s,y,\sum_{j=1}^N a_j^{N\,k}(s,\nu,\mu)\cdot b_j^N(y)\Big)\cdot b_i^N(y)dy\Big]\cdot G_i^N(t,s,\nu,\mu)ds,\ k=0,1,2,\ldots \quad (14)$$

В силу условий теоремы, из (14) по индукции получаем следующие оценки:

$$\left\|a^{N\,1}(t,\nu,\mu) - a^{N\,0}(t,\nu,\mu)\right\|_{B_2^N(T)} \leq$$

$$\leq \int\limits_0^t \left[\sum_{i=1}^N \left|\int\limits_0^l f\Big(s,y,\sum_{j=1}^N a_j^{N\,0}(s,\nu,\mu)\cdot b_j^N(y)\Big)\cdot b_i^N(y)dy\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^N \left|G_i^N(t,s,\nu,\mu)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} ds \leq M_1 M_2 \sqrt{l}\Delta, \quad (15)$$

$$\left\|a^{N\,k+1}(t,\nu,\mu) - a^{N\,k}(t,\nu,\mu)\right\|_{B_2^N(T)} \leq M_1^{k+1} M_2^{2k+1} l^{\frac{k+1}{2}} \Delta \frac{\left[\int\limits_0^t \left\|L(s,x)\right\|_{L_2(D_l)} ds\right]^k}{k!}, \quad (16)$$

где $M_1 = \left\|G^N(t,s,\nu,\mu)\right\|_{B_2^N(T)}$, $M_2 = \left\|b(x)\right\|_{B_2^N(l)}$.

Существование решения КСНИУ (13) следует из справедливости оценок(15) и (16), так как при $k \to \infty$ последовательность функций $\{a^{N\,k}(t,\nu,\mu)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно по t к функции $a^N(t,\nu,\mu) \in B_2^N(T)$. Предположим, что КСНИУ (13) имеет два решения: $a^N(t,\nu,\mu) \in B_2^N(T)$ и $\vartheta^N(t,\nu,\mu) \in B_2^N(T)$. Тогда для их разности справедлива оценка

$$\left\|a^N(t,\nu,\mu) - \vartheta^N(t,\nu,\mu)\right\|_{B_2^N(T)} \leq M_1 M_2^2 \sqrt{l} \times$$

$$\times \int_0^t \left\|L(s,x)\right\|_{L_2(D_l)} \left\|a^N(s,\nu,\mu) - \vartheta^N(s,\nu,\mu)\right\|_{B_2^N(T)} ds. \tag{17}$$

Применение неравенства Гронуолла-Беллмана к оценке (17) дает $\left\|a^N(t,\nu,\mu) - \vartheta^N(t,\nu,\mu)\right\|_{B_2^N(T)} \equiv 0$ для всех $t \in D_T$. Отсюда следует единственность решения КСНИУ (13) в пространстве $B_2^N(T)$. Подставляя КСНИУ (13) в формулу $u^N(t,x,\nu,\mu) = \sum_{i=1}^N a_i^N(t,\nu,\mu) \cdot b_i^N(x)$, получаем (12). Если $a^N(t,\nu,\mu) \in B_2^N(T)$, то справедлива оценка

$$\left|u^N(t,x,\nu,\mu)\right| \leq \sum_{i=1}^N \left|a_i^N(t,\nu,\mu)\right| \cdot \left|b_i^N(x)\right| \leq M_2 \left\|a^N(t,\nu,\mu)\right\|_{B_2^N(T)} < \infty.$$

4. Оптимизация управления и сходимость по функционалу

Таким образом, мы пришли к следующей задаче: *найти управляющую функцию $P^N(t,x)$, которая вместе с функцией (12) минимизирует функционал*

$$J[p_i^N] = \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_0^l g\left(t, y, \sum_{j=1}^N a_j^N(t,\nu,\mu) \cdot b_j^N(y), \sum_{j=1}^{\infty} p_j^N(t) \cdot b_j^N(y)\right) \cdot b_j^N(y)\, dydt. \tag{18}$$

Пусть $P^\star(t,x)$ – оптимальное решение поставленной нами задачи. Рассмотрим последовательность оптимального управления $\left\{P^{N\star}(t,x)\right\}_{N=1}^{\infty}$. Тогда для этого оптимального управления справедлива оценка

$$\left|P^\star(t,x) - P^{N\star}(t,x)\right| \leq q_N(t), \tag{19}$$

где

$$\lim_{N\to\infty} q_N(t) = 0. \tag{20}$$

Теорема 3. *Пусть*:

1. *Выполняются условия теоремы* 2;
2. $g(t,x,u,\vartheta) \in C(D \times R^2) \cap Lip\left\{L_1(t)_{|u}; L_2(t)_{|\vartheta}\right\}$, *где* $0 < \int\limits_0^T L_i(t)dt < \infty$, $i = 1, 2$;
3. $\left\|W(t,\nu,\mu)\right\|_{B_2(T)} < \infty$.

Тогда справедливо следующее соотношение

$$\lim_{N\to\infty}\left|J\big[P_i^\star\big]-J\big[P_i^{N\star}\big]\right|=0. \tag{21}$$

Доказательство. Оценим допускаемую погрешность по состоянию $u^\star(t,x,\nu,\mu)$, то есть величину

$$\Big|u^\star(t,x,\nu,\mu)-u^{N\star}(t,x,\nu,\mu)\Big|\leq V_N,$$

где

$$V_N=\int\limits_0^l\left|\Big(\varphi_1(y)-\sum_{i=1}^N\varphi_{1i}^N b_i^N(y)\Big)\right|\times$$

$$\times\left|\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,y)-\nu\frac{\partial^3}{\partial t\partial y^2}\Phi(t,y)+\mu\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}\right|dy+$$

$$+\int\limits_0^l\left|\Big(\varphi_2(y)-\sum_{i=1}^N\varphi_{2i}^N b_i^N(y)\Big)\cdot\Big[\Phi(t,y)-\nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}\right|dy+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left|\Phi(t,y)\Big[P^\star(t,y)-\sum_{i=1}^N\int\limits_0^l P^{N\star}(t,z)\cdot b_i^N(z)dz\Big]\cdot b_i^N(y)\right|dydt+\int\limits_0^T\int\limits_0^l\Big|\Phi(t,y)\times$$

$$\times\Big[f\Big(t,y,\sum_{j=1}^\infty a_j^\star(t,\nu,\mu)\cdot b_j(y)\Big)-f\Big(t,z,\sum_{j=1}^N a_j^{N\star}(t,\nu,\mu)\cdot b_j^N(z)\Big)\cdot b_i^N(z)dz\Big]\times$$

$$\times b_i^N(y)\Big|dydt. \tag{22}$$

Если $a^{N\star}(t,\nu,\mu)\in B_2^N(T)$ является решением КСНИУ (13), то покажем, что $\lim_{N\to\infty}V_N=0$. Действительно, так как $a^{N\star}(t,\nu,\mu)\in B_2^N(T)$, то из равенства

$$\lim_{N\to\infty}u^{N\star}(t,x,\nu,\mu)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^N a_i^{N\star}(t,\nu,\mu)\cdot b_i^N(x)=u^\star(t,x,\nu,\mu)$$

в силу условий теоремы следует, что

$$\lim_{N\to\infty}f\big(t,x,u^{N\star}(t,x,\nu,\mu)\big)=f\big(t,x,u^\star(t,x,\nu,\mu)\big) \tag{23}$$

в смысле метрики $L_2(D)$.

Тогда первые два интеграла в (22) стремятся к нулю при $N\to\infty$. Сходимость последних двух разностей в (22) при $N\to\infty$ следует из (19), (20) и (23). Следовательно,

$$\lim_{N\to\infty}V_N=0. \tag{24}$$

В силу условий теоремы, из (6) и (18) имеем

$$\left|J\big[P_i^\star\big]-J\big[P_i^{N\star}\big]\right|\leq\int\limits_0^T\Big[L_1(t)\Big|u^\star(t,x,\nu,\mu)-u^{N\star}(t,x,\nu,\mu)\Big|+$$

$$+L_2(t)\Big|P^{\star}(t,x)-P^{N\star}(t,x)\Big|\Big]dt \leq \int\limits_0^T L_1(t)V_N(t)dt + \int\limits_0^T L_2(t)q_N(t)dt. \qquad (25)$$

С учетом (20) и (24) переход к пределу в (25) при $N \to \infty$ дает (21).

5. Заключение

Аналитическое решение нелинейных задач оптимального управления очень сложно. На практике широко используются различные приближенные методы построения программного и синтезирующего оптимального управления. В работе предлагается методика приближенного решения одной нелинейной задачи оптимального управления для псевдогиперболического уравнения пятого порядка со смешанными условиями. При этом используются последовательности функций (12), (13) и последовательность функционала (18).

Список литературы

1. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с. (Aleksandrov V. M., Kovalenko E. V. Zadachi mehaniki sploshnyh sred so smeshannymi granichnymi usloviyami. Moskva: Nauka, 1986 [in Russian].)

2. Алгазин С. Д., Кийко И. А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 248 с. (Algazin S. D., Kiyko I. A. Flatter plastin i obolochek. Moskva: Nauka, 2006 [in Russian].)

3. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с. (Evtushenko Yu. G. Metody resheniya ekstremalnyh zadach i ih primenenie v sistemah optimizatsii. Moskva: Nauka, 1982 [in Russian].)

4. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с. (Fedorenko R. P. Priblijyonnoe reshenie zadach optimalnogo upravleniya. Moskva: Nauka, 1978 [in Russian].)

5. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с. (Butkovski A. G. Teoriya optimalnogo upravleniya sistemami s raspredelyonnymi parametrami. Moskva: Nauka, 1965 [in Russian].)

6. Рапопорт Э. Я. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М.: Высшая школа, 2009. 680 с. (Rapoport E. Ya. Optimalnoe upravlenie sistemami s raspredelyonnymi parametrami. Moskva: Vysshaya shkola, 2009 [in Russian].)

7. Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей). Теория звуков: В двух томах. М.: Изд-во технико-теоретич. лит., 1955. 504 с. (J. W. Strutt Lord Rayleigh. Theory of Sound. 2nd ed. Vol. I, II. London: MacMillan, 1896.)

8. Юлдашев Т. К. О слабой разрешимости смешанной задачи для нелинейного псевдогиперболического уравнения // Журн. Средневолжского мат. общ-ва.

2012. **14**. №4. С. 91–94. (Yuldashev T. K. O slaboy razreshimosti smeshannoy zadachi dlya nelineynogo psevdogiperbolicheskogo uravneniya // Jurnal Srednevoljskogo matematicheskogo obshchestva. 2012. V. 14. No 4. P. 91–94 [in Russian].)

9. Юлдашев Т. К. Об устойчивости по малым параметрам решения смешанной задачи для нелинейного псевдогиперболического уравнения // Журн. Средневолжского мат. общ-ва. 2013. **15**. №1. С. 134–142. (Yuldashev T. K. Ob ustiychivosti po malym parametram resheniya smeshannoy zadachi dlya nelineynogo psevdogiperbolicheskogo uravneniya // Jurnal Srednevoljskogo matematicheskogo obshchestva. 2013. V. 15. No 1. P. 134–142 [in Russian].)

10. Юлдашев Т. К. Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения, содержащего куб параболического оператора // Вестник Сиб. гос. аэрокосм. ун-та. 2011. **35**. №2. С. 96–100. (Yuldashev T. K. Smeshannaya zadacha dlya nelineynogo integro-differentsialnogo uravneniya, soderjashchego kub parabolicheskogo operatora // Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta. 2011. No 2. P. 96–100 [in Russian].)

11. Юлдашев Т. К. О разрешимости смешанной задачи для нелинейного псевдогиперболического уравнения пятого порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. **51**. №9. С. 1703–1711. (English transl.: Yuldashev T. K. Mixed value problem for nonlinear differential equation of fourth order with small parameter on the parabolic operator // Comput. Math. and Math. Physics. 2011. V. 51. No 9. P. 1596–1604.)

On a Problem of Optimal Control for a Nonlinear Pseudohyperbolic Equation

Yuldashev T. K.

Siberian State Aerospace University
31, Krasnoyarsky Rabochy Av., 660014 Krasnoyarsk, Russia

Keywords: optimal control, generalized solvability, integral identity, approximate solution, functional minimization

In this article, it is considered some questions of approximation solving of an optimal control problem for nonlinear partial pseudohyperbolic differential equations of the fifth order with initial-boundary value conditions and general view of the optimality criterion. Using the method of separation of variables in the form of a Fourier series reduces the generalized solution of the initial-boundary value problem to a countable system of nonlinear integral equations. By the aid of the methods of successive approximations and integral inequalities it is studied the one-value solvability of a finite system of nonlinear integral equations for the fixed values of the control, which are bounded by the given positive constant. It is estimated the permissible error with respect to a state of a "shorter" generalized solution of the initial-boundary value problem. Further, it is proved that the control sequence is a minimizing sequence for the considered problem.

Сведения об авторе:
Юлдашев Турсун Камалдинович,
Сибирский государственный аэрокосмический университет
им. академика М. Ф. Решетнева,
канд. физ.-мат. наук, доцент