

## Remarks on the Reachability Graphs of Petri Nets

Y. A. Belov<sup>1</sup>DOI: [10.18255/1818-1015-2022-4-366-371](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2022-4-366-371)<sup>1</sup>P. G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia.

MSC2020: 68Q85

Research article

Full text in Russian

Received October 7, 2022

After revision November 28, 2022

Accepted November 30, 2022

The question is considered – which graphs are isomorphic to the reachability graphs of Petri nets. Reachability graphs, or sets of achievable states, represent sets of all possible different network states resulting from a given initial state  $s_0$  by a finite chain of permissible transitions. They have a natural structure of an oriented graph with a dedicated initial state, all other states of which are reachable from the initial one, taking into account orientation. At the same time, if the network transitions are marked, the reachability graphs also receive the corresponding marks of all arcs. At the same time, the concept of isomorphism of marked graphs arises, but this publication deals only with issues for networks without markings. Even for this simpler case, some questions remain open. The paper proves that any finite directed graph is modeled by a suitable Petri net, that is, it is isomorphic to the reachability graph of the network. For infinite graphs, examples of non-modeled graphs are given.

**Keywords:** Petri nets; network reachability graph; network coverage graph; graph isomorphism

### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Yuriy Anatol'yevich Belov | [orcid.org/0000-0002-4221-6470](https://orcid.org/0000-0002-4221-6470). E-mail: [belov45@yandex.ru](mailto:belov45@yandex.ru)  
correspondence author | PhD in Mathematics.

**Funding:** This work was supported by P. G. Demidov Yaroslavl State University Project № VIP-016.

**For citation:** Y. A. Belov, “Remarks on the Reachability Graphs of Petri Nets”, *Modeling and analysis of information systems*, vol. 29, no. 4, pp. 366-371, 2022.

## Замечания о графах достижимости сетей Петри

Ю. А. Белов<sup>1</sup>

DOI: [10.18255/1818-1015-2022-4-366-371](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2022-4-366-371)

<sup>1</sup>Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, д. 14, г. Ярославль, 150003 Россия.

УДК 681.3

Получена 7 октября 2022 г.

Научная статья

После доработки 28 ноября 2022 г.

Полный текст на русском языке

Принята к публикации 30 ноября 2022 г.

Рассматривается вопрос – какие графы изоморфны графам достижимости сетей Петри. Графы достижимости, или множества достижимых состояний, представляют множества всевозможных различных состояний сети, получающихся из данного начального состояния  $s_0$  конечной цепочкой допустимых переходов. Они имеют естественную структуру ориентированного графа с выделенным начальным состоянием, все другие состояния которого достижимы из начального с учётом ориентации. При этом, если переходы сети снабжены пометками, графы достижимости также получают соответствующие пометки всех дуг. При этом возникает понятие изоморфизма размеченных графов, но в данной публикации рассматриваются лишь вопросы для сетей без разметок. Даже для этого более простого случая некоторые вопросы остаются открытыми.

В заметке доказывается, что любой конечный ориентированный граф моделируется подходящей сетью Петри, то есть он изоморфен графу достижимости сети. Для бесконечных графов приводятся примеры не моделируемых графов. Ставятся некоторые открытые вопросы по теме.

**Ключевые слова:** сети Петри; граф достижимости сети; граф покрытия сети; изоморфизм графов

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

|                                                     |                                                                                                                                                                                          |
|-----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Юрий Анатольевич Белов<br>автор для корреспонденции | <a href="https://orcid.org/0000-0002-4221-6470">orcid.org/0000-0002-4221-6470</a> . E-mail: <a href="mailto:belov45@yandex.ru">belov45@yandex.ru</a><br>доцент, кандидат физ.-мат. наук. |
|-----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Финансирование:** Работа выполнена в рамках инициативной НИР ЯрГУ им. П. Г. Демидова № VIP-016.

**Для цитирования:** Y. A. Belov, “Remarks on the Reachability Graphs of Petri Nets”, *Modeling and analysis of information systems*, vol. 29, no. 4, pp. 366-371, 2022.

## Введение

Для анализа функционирования распределённых систем часто используется аппарат сетей Петри см. [1–3]. При этом теоретическое рассмотрение свойств сети обычно приводит к необходимости изучения так называемого дерева или графа достижимости данной сети. Свойства соответствующего графа достижимости, конечно, однозначно определяются исходной сетью. Однако вопросы, связанные, например, с тем, какие свойства сети обеспечивают наличие определённых свойств графа достижимости, чаще всего не имеют удовлетворительных ответов.

Данная заметка как раз касается этих задач.

### 1. Основные понятия

**Определения.** Сеть Петри  $D(P, T)$  есть двудольный ориентированный граф со взвешенными дугами [2]. Вершины доли  $P$  называются позициями, вершины доли  $T$  – переходами,  $P \cap T = \emptyset$ . Размерность сети есть  $|P| = d$ . Множество дуг – это  $F \subset (P \times T) \cup (T \times P)$ .  $w : F \rightarrow N = \{0, 1, 2, \dots\}$  – весовая функция, определяющая кратность дуг. Если кратность дуги равна нулю, то считаем, что соответствующая дуга отсутствует. Остальные дуги, т. е. дуги с положительными кратностями, образуют для каждого перехода  $t$  множество входных дуг:  $(p, t) \in (P \times T)$  и соответственно, множество выходных дуг  $(t, p) \in (T \times P)$  с соответствующими весами. Вектор  $in(t) = (w(p, t) | p \in P)$  кратностей входящих дуг называется вектором ресурсов, потребляемых данным переходом  $t$ , вектор  $out(t) = (w(t, p) | p \in P)$  – вектором производимых ресурсов. Вектор  $\delta(t_i) = out(t_i) - in(t_i)$  называется вектором сдвига данного перехода  $t_i$ .

Состоянием сети  $D$  называется целочисленный неотрицательный вектор  $s = (p_1, p_2, \dots, p_d)$ , задающий количество абстрактных неименованных фишек, располагаемых в каждой позиции, то есть одно из отображений  $P \rightarrow N$ .

### 2. Моделируемые графы

Переход  $t_i$  называется активным (допустимым) в данном состоянии  $s$ , если выполняется неравенство  $s \geq in(t_i)$  при покомпонентном сравнении [4]. Другими словами, количество имеющихся фишек в текущем состоянии сети не менее количества потребляемых ресурсов данного перехода (для каждой позиции). Каждый переход, активный в данном состоянии, может привести к изменению состояния, как говорят, может «сработать». Изменение состояния сети происходит по правилу:  $s' = s - in(t_i) + out(t_i) = s + \delta(t_i)$ , что часто обозначается следующим образом:  $s \xrightarrow{t_i} s'$ . Таким образом, активные переходы могут перераспределять ресурсы (фишки) по позициям. Если в данном состоянии допустимы (активны) несколько переходов, то сеть может перейти в любое из допустимых состояний. Рассматривая всевозможные конечные цепочки допустимых переходов, начинающиеся из состояния  $s_0$ , получаем множество  $Re(s_0)$  всевозможных состояний, достижимых из данного начального состояния  $s_0$ .

Хотя данное множество может быть и бесконечным, оно имеет естественную структуру ориентированного графа с выделенным начальным состоянием.

При этом все вершины достижимы из начальной с учётом ориентации, и все вершины можно считать помеченными неотрицательными векторами, указывающими текущее «распределение ресурсов по позициям».

Можно считать, что такой конечный граф является подграфом некоторого полного ориентированного графа порядка  $d$  без петель и параллельных дуг с выделенной вершиной. При этом полустепень захода и полустепень исхода каждой вершины равна  $d - 1$ . Возникает естественный вопрос: какие графы изоморфны, как ориентированные графы, графам  $Re(s_0)$  достижимости подходящих сетей Петри. Такие графы будем называть моделируемыми.

Можно проверить, что конечный полный ориентированный граф, отмеченный ранее, является моделируемым. При этом он моделируется даже неизоморфными сетями, например, сетями различных размерностей. Вообще, для конечных графов многое ясно.

Однако графы  $Re(s_0)$  могут быть и бесконечными, и здесь на основные вопросы пока нет приемлемых ответов.

### 3. Результаты

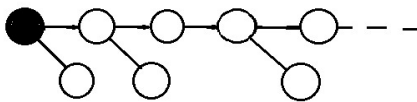
**Теорема 1.** *Всякий конечный ориентированный граф  $G$  порядка  $d$  без петель и параллельных дуг моделируется некоторой сетью Петри порядка  $d$ , то есть изоморфен как ориентированный граф графу достижимости  $Re(s_0)$  некоторой подходящей сети Петри. При этом сеть может быть выбрана даже автоматной [2] с одной циркулирующей фишкой.*

*Доказательство.* Пусть имеется вершинная разметка исходного графа, то есть просто произвольная нумерация вершин. Для доказательства первого утверждения сопоставим каждой вершине 0-1-вектор размерности  $d$  с одной единицей на месте номера вершины и остальными нулями. Далее определяются переходы, потребляемыми ресурсами которых становятся одна фишка и производимыми ресурсами – также одна фишка. Например, первой вершине соответствует вектор  $(1, 0, \dots, 0)$ , третьей вершине – вектор  $(0, 0, 1, \dots, 0)$ . Тогда переход  $t_{13}$  из первой вершины в третью определится так:  $\delta(t_{13}) = (-1, 0, 1, \dots, 0)$ . Таким образом получится некоторая автоматная сеть Петри с начальным состоянием  $(1, 0, \dots, 0)$ . Можно проверить, что граф достижимых состояний данной сети изоморфен исходному заданному ориентированному графу.  $\square$

В связи с первым предложением можно рассматривать вопросы моделируемости различных классов графов различными типами сетей Петри. Кроме того, интересно указать минимум размерности сети, моделирующей данный граф. Здесь можно увидеть некоторый аналог алгоритма минимизации диаграммы, реализующей данный формальный регулярный язык [5].

**Теорема 2.** *Для любого  $k > 1$  существует не моделируемое ориентированное бесконечное счётное выходящее корневое дерево [6], в котором вершин  $k$ -го уровня имеется ровно одна или две.*

*Доказательство.* Рассмотрим сначала бесконечную возрастающую цепь из начальной вершины  $s_0$ .



**Fig. 1.** Non-modeled graph with a limited number of vertices of all levels

**Рис. 1.** Не моделируемый граф с ограниченным количеством вершин всех уровней

Далее, к соответствующим вершинам цепи присоединяем по одной дуге и одной концевой вершине, назовём это «отросток». Присоединяем отросток к первой вершине, затем к третьей вершине

цепи, далее к шестой, потом к десятой и т. д., увеличивая на каждом шаге построения расстояние между отростками, примерно, как указано на рис. 1.

Полученное дерево не моделируемо. Предположим противное. Пусть дерево моделируется сетью размерности  $d$ . Тогда каждой вершине цепи будет соответствовать неотрицательный целочисленный вектор длины  $d$ , описывающий текущее состояние сети.

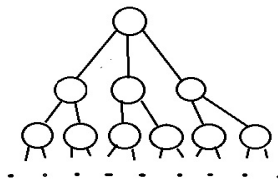
Из любой бесконечной последовательности неотрицательных целочисленных векторов можно выделить бесконечную строго возрастающую подпоследовательность [2, 4]. Отметим ещё свойство монотонности активности: если некоторый переход сети активен в данном состоянии, то он останется активным и в любом состоянии большем, чем данное [4]. Рассмотрим теперь хотя бы первую вершину возрастающей подпоследовательности. На некотором расстоянии от неё, например, через  $q$  шагов, имеется отросток. Через какое-то фиксированное расстояние  $m$  от этой вершины имеется следующий элемент возрастающей подпоследовательности. Он строго больше, чем первый элемент, поэтому все переходы, активные в первом случае, остаются активными и сейчас. Все последующие элементы наследуют это свойство активности, поэтому через  $q$  шагов от второго элемента снова будет находиться отросток. Таким образом, как угодно далеко вдоль цепи будут находиться отрезки фиксированной длины  $m$ , содержащие два отростка, что противоречит строению дерева.  $\square$

По поводу второго предложения можно ещё отметить, что построить не моделируемый бесконечный граф можно проще, используя ограничение на скорость роста количества вершин данного уровня в любом моделируемом графе.

Способ построения не моделируемого графа, опирающийся на эти соображения, автор узнал от В. А. Башкина, за что ему искренне благодарен.

Действительно, в таком графе количество вершин данного уровня (см. [6]) может быть не более, чем степенным, что довольно просто доказать. Это следует из того, что в любом графе достижимости, т. е. моделируемом, каждое достижимое состояние определяется только множеством переходов, приводящих к этому состоянию, и не зависит от порядка выполнения данных переходов. Поэтому привести пример соответствующего не моделируемого графа, нарушающего данное условие нетрудно – например, свободное однородное (бесконечное) дерево степени 3 (см. рис 2).

Но в предложении 2 приводится, возможно, более интересный пример, в котором количество вершин данного уровня вообще не растёт, оно всегда равно 1 или 2, однако граф, в данном случае даже дерево, не моделируем. Это означает, что ограничение на рост не является достаточным условием моделируемости. Никаких достаточных условий или критериев моделируемости, видимо, пока нет, во всяком случае, автору об этом ничего неизвестно.



**Fig. 2.** An example of a non-modeled graph with too many vertices of the current level

**Рис. 2.** Пример не моделируемого графа со слишком большим количеством вершин текущего уровня

## Заключение

Другой интересный вопрос, как представляется, указать также условия, при которых две сети Петри имеют изоморфные графы достижимости.

В случае конечных графов достижимости вопрос решается положительно с использованием конструкции дерева (или графа) покрытия [6], а для бесконечных графов достижимости позитивных результатов, видимо, нет. Граф покрытия всегда конечен, его можно считать некоторой аппроксимацией (точного) графа достижимости и этот граф совпадает с графом достижимости в конечном случае.

Ясно только, что для данного достижимого графа можно построить бесконечную серию сетей, размерности которых уходят в бесконечность, но все сети серии имеют графы, изоморфные данному.

Другими словами, уточняя основной вопрос, если для двух сетей графы покрытия изоморфны, при каких дополнительных условиях будут изоморфны и графы достижимости, видимо, является открытым.

## References

- [1] W. Reisig, *Petri Nets. An Introduction*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [2] V. E. Kotov, *Petri Nets*, in Russian. Moscow, Nauka, 1984.
- [3] M. Diaz, *Petri Nets: Fundamental Models, Verification and Applications*. J. Wiley, Inc. USA, 2009.
- [4] H.-C. Yen, "Introduction to Petri Net Theory", *Recent Advances in Formal Languages and Applications*, vol. 25, pp. 343–373, 2006.
- [5] E. V. Kuzmin and V. A. Sokolov, *Automata Counter Machines*, in Russian. P.G. Demidov Yaroslavl State University, 2012.
- [6] V. A. Evstigneev and V. N. Kasianov, *Teoria Grafov. Algoritmy obrabotki dereview*, in Russian. Nauka, Novosibirsk, 1984.