

The Polynomial Algorithm of Finding the Shortest Path in a Divisible Multiple Graph

A. V. Smirnov¹

DOI: [10.18255/1818-1015-2022-4-372-387](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2022-4-372-387)

¹P. G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia.

MSC2020: 05C38, 05C65

Research article

Full text in Russian

Received August 23, 2022

After revision November 7, 2022

Accepted November 9, 2022

In this paper, we study undirected multiple graphs of any natural multiplicity $k > 1$. There are edges of three types: ordinary edges, multiple edges and multi-edges. Each edge of the last two types is a union of k linked edges, which connect 2 or $(k + 1)$ vertices, correspondingly. The linked edges should be used simultaneously. If a vertex is incident to a multiple edge, it can be also incident to other multiple edges and it can be the common end of k linked edges of some multi-edge. If a vertex is the common end of some multi-edge, it cannot be the common end of another multi-edge.

Divisible multiple graphs are characterized by a possibility to divide the graph into k parts, which are adjusted on the linked edges and which have no common edges. Each part is an ordinary graph. As for an ordinary graph, we can define the integer function of the length of an edge for a multiple graph and set the problem of the shortest path joining two vertices. Any multiple path is a union of k ordinary paths, which are adjusted on the linked edges of all multiple and multi-edges. In the article, we show that the problem of the shortest path is polynomial for a divisible multiple graph. The corresponding polynomial algorithm is formulated. Also we suggest the modification of the algorithm for the case of an arbitrary multiple graph. This modification has an exponential complexity in the parameter k .

Keywords: multiple graph; divisible graph; multiple path; shortest path; reachability set; polynomial algorithm

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Alexander Valeryevich Smirnov | orcid.org/0000-0002-0980-2507. E-mail: alexander_sm@mail.ru
correspondence author | PhD, Associate Professor, Department of Theoretical Computer Science.

Funding: This work was supported by P.G. Demidov Yaroslavl State University Project № VIP-016.

For citation: A. V. Smirnov, "The Polynomial Algorithm of Finding the Shortest Path in a Divisible Multiple Graph", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 29, no. 4, pp. 372-387, 2022.

Полиномиальный алгоритм поиска кратчайшего пути в делимом кратном графе

А. В. Смирнов¹

DOI: [10.18255/1818-1015-2022-4-372-387](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2022-4-372-387)

¹Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, д. 14, г. Ярославль, 150003 Россия.

УДК 519.17

Научная статья

Полный текст на русском языке

Получена 23 августа 2022 г.

После доработки 7 ноября 2022 г.

Принята к публикации 9 ноября 2022 г.

В статье рассматриваются неориентированные кратные графы произвольной натуральной кратности $k > 1$. Кратный граф содержит ребра трех типов: обычные, кратные и мультиребра. Ребра последних двух типов представляют собой объединение k связанных ребер, которые соединяют 2 или $(k + 1)$ вершину соответственно. Связанные ребра могут использоваться только согласованно. Если вершина инцидентна кратному ребру, то она может быть инцидентна другим кратным ребрам, а также она может быть общим концом k связанных ребер мультиребра. Если вершина является общим концом мультиребра, то она не может быть общим концом никакого другого мультиребра.

Делимые кратные графы характеризуются возможностью выделения k частей, согласованных на связанных ребрах и не содержащих общих ребер. Каждая часть представляет собой обычный граф. Как и для обычного графа, для кратного графа можно ввести целочисленную функцию длины ребра и поставить задачу о кратчайшем пути между двумя вершинами. Кратный путь является объединением k обычных путей, согласованных на связанных ребрах кратных и мультиребер. В статье показано, что задача о кратчайшем пути в делимом кратном графе является полиномиальной. Сформулирован соответствующий полиномиальный алгоритм. Также предложена модификация алгоритма для случая произвольного кратного графа. Эта модификация имеет экспоненциальную по параметру k трудоемкость.

Ключевые слова: кратный граф; делимый граф; кратный путь; кратчайший путь; множество достижимости; полиномиальный алгоритм

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Александр Валерьевич Смирнов | orcid.org/0000-0002-0980-2507. E-mail: alexander_sm@mail.ru
автор для корреспонденции | канд. физ.-мат. наук, доцент, кафедра теоретической информатики.

Финансирование: Работа выполнена в рамках инициативной НИР ЯрГУ им. П. Г. Демидова № VIP-016.

Для цитирования: A. V. Smirnov, "The Polynomial Algorithm of Finding the Shortest Path in a Divisible Multiple Graph", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 29, no. 4, pp. 372-387, 2022.

Введение

В данной статье мы рассмотрим задачу о *кратчайшем пути* в кратном графе. Кратные графы содержат три типа ребер (обычные, кратные и мультиребра) и являются обобщением обычных графов – по сути, обычный граф имеет кратность $k = 1$. Определения кратного графа кратности $k > 1$ и делимого кратного графа были сформулированы в статье [1]. Там же была поставлена задача о кратчайшем кратном пути между двумя вершинами, дано определение связности кратного графа, получены полиномиальные алгоритмы ее проверки. В отличие от обычного графа, в связном кратном графе путь между двумя вершинами существует не всегда, и в работе [1] рассмотрен критерий существования кратного пути между двумя вершинами. Проверить условие критерия для любых двух вершин можно с помощью быстрых полиномиальных алгоритмов.

Среди других известных обобщений графов наиболее близкими нам концепциями являются мультиграфы, гиперграфы (см., например, [2, 3]), а также метаграфы (см. [4, 5]). Действительно, как и в мультиграфах, в кратных графах допускается наличие нескольких ребер между парой вершин (набор таких ребер мы будем в дальнейшем называть *кратным ребром*), однако в случае кратного графа количество таких ребер должно быть строго равным k . В кратных графах присутствуют *мультиребра*, соединяющие между собой $(k + 1)$ вершину. Но в отличие от гиперребер гиперграфа, мультиребро представляется в виде k связанных ребер, имеющих один общий конец, причем все эти k ребер должны использоваться согласованно. По сути, понятие мультиребра близко понятию ребра между вершиной и метавершиной в метаграфе. При этом в метаграфе, напомним, метапуть между двумя метавершинами фактически моделирует причинно-следственные связи в некоторой предметной области. Однако в кратном графе используется принципиально иной подход к определению пути: *кратный путь* должен состоять ровно из k обычных путей, проходящих по обычным ребрам, а также по связанным ребрам кратных и мультиребер; при этом пути должны быть согласованы (одинаковы) на кратных и мультиребрах. Поэтому кратный граф нельзя считать частным случаем метаграфа.

Отметим также, что частным случаем кратного графа является кратная сеть (см. [6, 7]). Задача о наибольшем потоке в кратной сети обобщает классическую задачу (см. [8]) и имеет ряд приложений в сфере экономики, управления, финансов. В частности, кратные сети и потоки используются для поиска решения NP-трудной задачи целочисленного сбалансирования трех- и четырехмерной матрицы (см., например, [9, 10]).

В работе [1] предложен экспоненциальный алгоритм нахождения кратного пути. В данной статье мы обоснуем полиномиальность данной задачи в случае делимого кратного графа и построим алгоритм, который будет решать ее за полиномиальное время. Делимые кратные графы характеризуются возможностью выделения k частей, согласованных на связанных ребрах и не содержащих общих ребер.

Затем мы рассмотрим модификацию алгоритма для случая произвольного графа. Во многих случаях модифицированный алгоритм будет работать достаточно быстро, однако в общем случае его трудоемкость будет экспоненциальной по параметру k (кратность графа).

1. Кратные графы и деревья: необходимые определения. Постановка задачи о кратчайшем кратном пути

Напомним несколько определений, связанных с кратными графами и путями, которые ранее были сформулированы в статьях [1, 11].

Определение 1. Кратный граф G произвольной натуральной кратности $k > 1$ – это граф, вершины которого могут соединяться ребрами одного из 3 видов:

1. Обычное ребро e^0 ; множество обычных ребер обозначим через E^0 .

2. Кратное ребро e^k между двумя вершинами, которое состоит из k одинаковых связанных ребер; связанные ребра кратного ребра могут использоваться только согласованно; множество кратных ребер обозначим через E^k .
3. Связанное ребро e между двумя вершинами, имеющее один общий конец с другим $(k - 1)$ ребром (у любых двух из k связанных ребер только один конец является общим); множество связанных общей вершиной ребер будем называть мультиребром e^m ; связанные ребра мультиребра могут использоваться только согласованно; множество мультиребер обозначим через E^m .

Если вершина инцидентна какому-либо кратному ребру, то она может быть инцидентна другим кратным ребрам, а также она может быть общим концом какого-либо мультиребра.

Если вершина является общим концом какого-либо мультиребра, то она не может быть общим концом никакого другого мультиребра.

Если вершина является отдельным концом мультиребра или инцидентна обычному ребру, то она не может быть общим концом мультиребра и не может быть инцидентна кратному ребру.

Множества вершин и ребер графа G обозначим через V и E соответственно. Заметим, что $E = E^o \cup E^k \cup E^m$.

В данной статье рассматриваются только неориентированные кратные графы.

Рис. 1 и 2 иллюстрируют определение 1. В левой части рис. 1 кратное ребро представлено в виде объединения k одинаковых ребер между двумя вершинами, что показано штрихами. Равенство (или согласованность) связанных ребер предполагает, что все характеристики этих ребер (например, длина) одинаковы, и эти ребра могут использоваться только одновременно. Так, если осуществляется проход в определенном направлении по одному из связанных ребер, то одновременно с этим все остальные ребра проходятся в том же самом направлении. Кратное ребро может включаться в какие-либо новые структуры только целиком. В дальнейшем мы будем обозначать кратные ребра жирными линиями, как в правой части рис. 1.

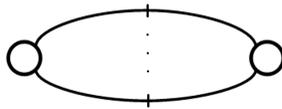


Fig. 1. Multiple edge



Рис. 1. Кратное ребро

В левой части рис. 2 мультиребро $\{x_0, \{x_1, \dots, x_k\}\}$ представлено в виде объединения k одинаковых ребер, связывающих общую вершину x_0 с k разными вершинами x_1, \dots, x_k . Как и на рис. 1, равенство ребер показано штрихами. Согласованность связанных ребер имеет тот же смысл, что и для кратных ребер. В дальнейшем мультиребра мы будем изображать при помощи расщепляющихся на k частей линий, как в правой части рис. 2.

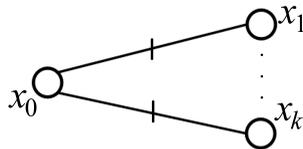


Fig. 2. Multi-edge

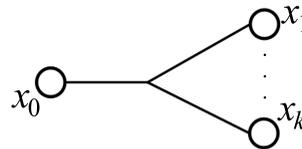


Рис. 2. Мультиребро

Определение 2. Обычной вершиной назовем вершину, которая инцидентна обычному ребру или является отдельным концом мультиребра.

Кратной вершиной назовем вершину, которая инцидентна кратному ребру или является общим концом мультиребра.

Из определения 1 следует, что множества обычных и кратных вершин не пересекаются. При этом кратная вершина может быть соединена с обычными только посредством мультиребра.

Определение 3. Делимым кратным графом назовем такой граф, в котором между двумя концами одного мультиребра не существует пути, проходящего только по обычным ребрам.

При удалении всех мультиребер делимый граф распадется на n компонент связности (связность здесь понимается в том же смысле, что и для обычных графов), каждая из которых содержит только кратные ребра либо только обычные ребра. При этом связанные ребра каждого мультиребра можно пронумеровать от 1 до k таким образом, что каждой компоненте связности, содержащей только обычные ребра, будут инцидентны связанные ребра мультиребер с одинаковыми номерами.

Определение 4. Частью G_i ($i \in \overline{1, k}$) делимого графа $G(V, E)$ назовем подграф, содержащий связанные ребра с номером i всех кратных и мультиребер, а также компоненты связности, состоящие из обычных ребер и инцидентные i -ым связанным ребрам всех мультиребер.

Каждая часть G_i является обычным графом. При этом возможность выделения частей G_i является особенностью делимых графов. В общем случае получить части G_i не удастся.

Пример 1. Рассмотрим кратный граф G кратности 2 со следующими множествами обычных, кратных и мультиребер:

$$E^k = \{ \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\}, \{x_4, x_5\}, \{x_{13}, x_{14}\}, \{x_{13}, x_{15}\}, \{x_{14}, x_{15}\} \};$$

$$E^m = \{ \{x_2, \{x_7, x_{10}\}\}, \{x_3, \{x_6, x_9\}\}, \{x_4, \{x_6, x_9\}\}, \{x_5, \{x_8, x_9\}\}, \{x_{13}, \{x_8, x_{10}\}\} \};$$

$$E^o = \{ \{x_6, x_7\}, \{x_6, x_8\}, \{x_7, x_8\}, \{x_9, x_{10}\}, \{x_9, x_{11}\}, \{x_9, x_{12}\}, \{x_{10}, x_{12}\}, \{x_{11}, x_{12}\} \}.$$

Этот граф представлен на рис. 3. Для лучшей читаемости рисунка на нем подписаны только номера вершин без указания буквы “x”.

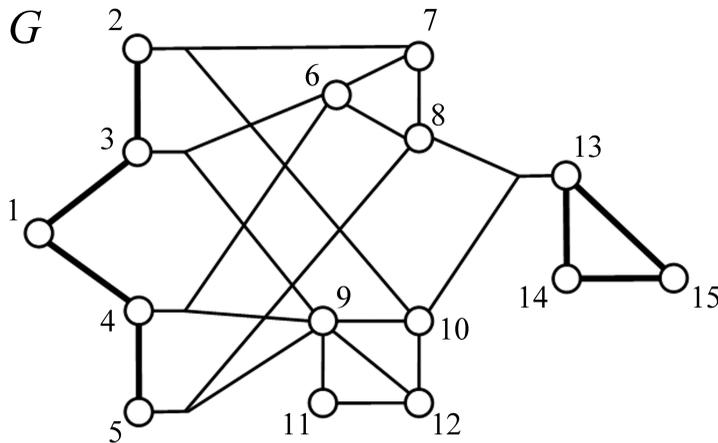


Fig. 3. Divisible graph of multiplicity 2

Рис. 3. Делимый граф кратности 2

Граф G является делимым. Части G_1 и G_2 этого графа показаны на рис. 4, связанные ребра всех кратных и мультиребер изображены пунктирными линиями.

Заметим, что граф перестанет быть делимым, если добавить в него обычное ребро между любой парой вершин из множеств $\{x_6, x_7, x_8\}$ и $\{x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\}$.

Определим теперь путь в кратном графе.

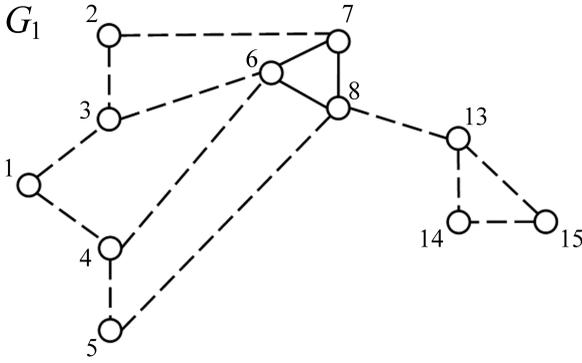


Fig. 4. Partition of a divisible graph

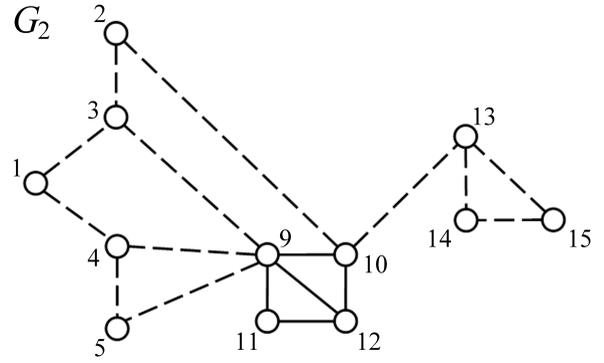


Рис. 4. Части делимого графа

Определение 5. $S(x, y) = \cup_{i=1}^k S^i(x, y)$ является кратным путем из вершины x в вершину y в графе $G(V, E)$, если выполнены следующие условия:

1. $S^i(x, y) = (\{x, v_1^i\}, \{v_1^i, v_2^i\}, \dots, \{v_{l_i-1}^i, v_{l_i}^i\}, \{v_{l_i}^i, y\})$, где $l_i \geq 0$, – последовательность ребер, представляющая собой обычный (некратный) путь из x в y , где каждое ребро $\{a, b\}$ является либо обычным ребром в графе $G(V, E)$, либо i -ым связанным ребром кратного или мультиребра. Значения l_i и l_j ($i \neq j$) не согласовываются и могут быть как равными, так и различными. Если в путь $S(x, y)$ не входит ни одного кратного или мультиребра, то $S^2(x, y) = S^3(x, y) = \dots = S^k(x, y) = \emptyset$.
2. Любая обычная вершина может встретиться в $S^i(x, y)$ несколько раз, то есть $S^i(x, y)$ может содержать циклы.
3. Никакая кратная вершина не может встретиться в $S^i(x, y)$ дважды.
4. Любое обычное ребро может встречаться в $S^i(x, y)$ несколько раз, причем направления, в которых оно проходится в разных вхождениях, могут не совпадать.
5. Обычное ребро, входящее в $S^i(x, y)$, может также входить в любой $S^j(x, y)$, $j \neq i$.
6. Все пути $S^i(x, y)$ согласованы (одинаковы) на общей части. Это условие означает, что если связанное ребро какого-то кратного или мультиребра входит в некоторый путь $S^i(x, y)$, то остальные связанные ребра должны входить во все $S^j(x, y)$, $j \neq i$ (по одному связанному ребру в каждый $S^j(x, y)$). При этом порядок вхождения всех кратных и мультиребер во все $S^i(x, y)$ одинаков.

Фактически это значит, что если e_1 и e_2 – это два ребра пути $S(x, y)$, каждое из которых либо кратное, либо мультиребро, и в проекции $S^i(x, y)$ связанное ребро из e_1 проходится раньше связанного ребра из e_2 , то во всех остальных проекциях $S^j(x, y)$ связанные ребра из e_2 могут проходиться только после связанных ребер из e_1 .

7. Если $S(x, y)$ содержит мультиребро $\{x_0, \{x_1, \dots, x_k\}\}$, проходимое в направлении от общего конца, то он не может содержать никакого другого мультиребра $\{y_0, \{x_1, \dots, x_k\}\}$, проходимого в том же направлении. Аналогичное условие должно выполняться и в случае движения к общему концу.

Определение 6. Кратный путь $S(x, y)$ является кратным циклом, если $x = y$ и $S(x, y) \neq \emptyset$.

Пример 2. Проиллюстрируем определение кратного пути. Для этого рассмотрим граф, показанный на рис. 3, и построим в нем кратный путь $S(x_1, x_{15})$ из вершины x_1 в вершину x_{15} , состоящий из двух обычных путей:

$$S^1(x_1, x_{15}) = (\{x_1, x_4\}, \{x_4, x_5\}, \{x_5, x_8\}, \{x_8, x_7\}, \{x_7, x_2\}, \\ \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_6\}, \{x_6, x_7\}, \{x_7, x_8\}, \{x_8, x_{13}\}, \{x_{13}, x_{15}\});$$

$$S^2(x_1, x_{15}) = (\{x_1, x_4\}, \{x_4, x_5\}, \{x_5, x_9\}, \underline{\{x_9, x_{12}\}}, \underline{\{x_{12}, x_{10}\}}, \{x_{10}, x_2\}, \\ \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_9\}, \underline{\{x_9, x_{12}\}}, \underline{\{x_{12}, x_{10}\}}, \{x_{10}, x_{13}\}, \{x_{13}, x_{15}\}).$$

Связанные ребра кратных и мультиребер отмечены подчеркиванием. Двойным подчеркиванием в пути $S^1(x_1, x_{15})$ отмечено обычное ребро $\{x_7, x_8\}$, которое в этом пути проходится дважды, но в противоположных направлениях. Соответственно, в пути $S^2(x_1, x_{15})$ двойным подчеркиванием отмечены обычные ребра $\{x_9, x_{12}\}$ и $\{x_{12}, x_{10}\}$, которые также проходятся дважды, но в одном и том же направлении. Таким образом, в пути $S^1(x_1, x_{15})$ содержится обычный цикл $(x_7, x_2, x_3, x_6, x_7)$, а в пути $S^2(x_1, x_{15})$ содержится обычный цикл $(x_9, x_{12}, x_{10}, x_2, x_3, x_9)$, однако кратный путь $S(x_1, x_{15})$ не содержит в себе кратных циклов, как и должно быть. Полученный кратный путь $S(x_1, x_{15})$ показан на рис. 5.

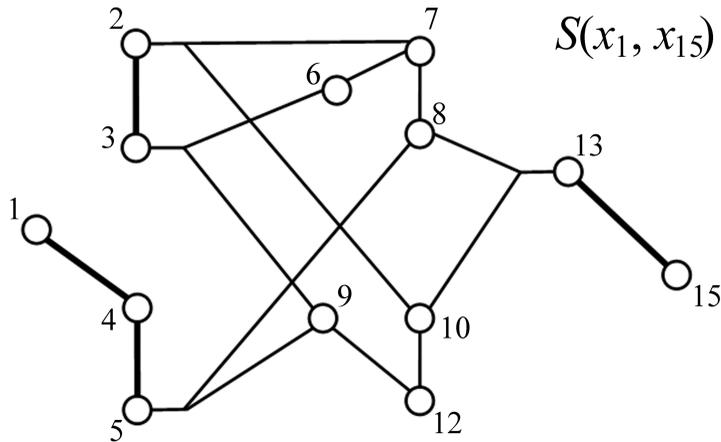


Fig. 5. Multiple path in the multiple graph

Рис. 5. Кратный путь в делимом графе

Отметим, что при замене в кратном пути $S(x_1, x_{15})$ последовательности ребер $(\{x_4, x_5\}, \{x_5, \{x_8, x_9\}\}, \{x_8, x_7\})$ на последовательность $(\{x_4, \{x_6, x_9\}\}, \{x_6, x_7\})$ мы снова получим два обычных пути, согласованных на связанных ребрах. Однако объединение этих обычных путей не даст кратного пути, поскольку будет нарушено условие 7 из определения 5. Действительно, здесь будет два мультиребра $\{x_3, \{x_6, x_9\}\}$ и $\{x_4, \{x_6, x_9\}\}$ с одинаковым набором обычных вершин – концов мультиребра, и оба мультиребра будут проходиться в направлении от кратной вершины.

Определение 7. Кратный граф $G(V, E)$ является связным, если одновременно выполнены два условия:

1. Кратный путь $S(x, y)$ существует для любых двух кратных вершин $x \in V, y \in V$.
2. Невозможно выделить такой подграф $G' \subset G$, который будет содержать только обычные ребра, и при этом подграфы G' и $G \setminus G'$ не будут соединены ни одним ребром (обычным ребром или связанным ребром мультиребра).

В отличие от обычных графов, связность кратного графа не предполагает наличие кратных путей из каждой вершины в каждую. Фактически в связном кратном графе между каждой парой вершин должен существовать обычный (некратный) путь, использующий связанные ребра кратных и мультиребер несогласованно, а кратные пути обязательно должны существовать только для пар кратных вершин.

Для делимого кратного графа определение связности может быть переписано в более простой форме, что обусловлено структурой графа.

Определение 8. Делимый кратный граф $G(V, E)$ является связным, если одновременно выполнены два условия:

1. Кратный путь $S(x, y)$ существует для любых двух кратных вершин $x \in V, y \in V$.
2. Каждая из частей G_i является связным (некратным) графом.

Определение 9. Целочисленная функция $l(e)$, определенная для всех ребер $e \in E$, является длиной (весом) ребра в кратном графе $G(V, E)$, если выполнено следующее:

1. $l(e) > 0$ для любого ребра e .
2. Если e является кратным или мультиребром, то $l(e_1) = l(e_2) = \dots = l(e_k)$ и $l(e) = k \cdot l(e_1)$, где e_1, \dots, e_k – это связанные ребра данного ребра e .

Тогда длина кратного пути $S(x, y)$ будет определяться по формуле

$$l(S(x, y)) = \sum_{i=1}^k l(S^i(x, y)) = \sum_{i=1}^k \sum_{e_j \in S^i(x, y)} l(e_j),$$

при этом может оказаться $e_j = e_p$ ($j \neq p$), то есть в сумме учитывается каждое повторное вхождение обычного ребра в $S^i(x, y)$.

Задача 1 (кратчайший кратный путь). В кратном графе $G(V, E)$ требуется найти кратчайший путь из вершины x в вершину y , то есть такой путь $S_{\min}(x, y)$, что для любого пути $S(x, y)$ выполнено

$$l(S_{\min}(x, y)) \leq l(S(x, y)).$$

2. Алгоритм нахождения кратчайшего кратного пути в делимом графе

При построении алгоритма мы будем использовать множества достижимости по обычным и кратным ребрам (см. [1]). Напомним соответствующие определения.

Определение 10. Множеством достижимости по кратным ребрам для некоторой кратной вершины x назовем множество R_x^k всех вершин y таких, что существует путь из x в y , проходящий только по кратным ребрам.

Определение 11. Множеством достижимости по обычным ребрам для некоторой обычной вершины x назовем множество R_x^o всех вершин y таких, что существует путь из x в y , проходящий только по обычным ребрам.

Очевидно, что $x \in R_x^k, x \in R_x^o$. Если $y \in R_x^k$, то $R_y^k = R_x^k$. Если $y \in R_x^o$, то $R_y^o = R_x^o$.

Определение 12. Множества достижимости R_x^k и R_y^k являются смежными, если для произвольных вершин $a \in R_x^k, b \in R_y^k$ существует соединяющий их кратный путь $S(a, b)$.

Сформулируем теперь алгоритм решения задачи 1 для делимого кратного графа. На отдельных шагах этого алгоритма для нахождения минимальных участков пути, содержащих только обычные ребра, мы будем использовать известный алгоритм Дейкстры (см. [12]).

Пусть имеется взвешенный делимый кратный граф $G(V, E)$ кратности k . Требуется найти кратчайший кратный путь $S_{\min}(x, y)$ между двумя выбранными вершинами x и y . Через e_a^m будем обозначать мультиребро, инцидентное кратной вершине a . В алгоритме мы будем использовать следующие структуры данных:

- множества достижимости R_a^k и R_b^o ;
- множества индексов I_a , ассоциированные с каждым мультиребром e_a^m ;

- $G^{ord}(V^{ord}, E^{ord})$ – обычный граф, минимальному пути $S_{\min}^{ord}(x, y)$ в котором будет соответствовать кратчайший кратный путь $S_{\min}(x, y)$ той же длины в исходном графе;
- $S_{mo}(a, b)$ – кратный путь между двумя кратными вершинами, состоящий из мультиребер e_a^m и e_b^m , а также из минимальных обычных путей между соответствующими парами обычных вершин – концов этих мультиребер.

Алгоритм 1 (кратчайший кратный путь в делимом графе).

1. Найдем все множества достижимости по кратным и обычным ребрам R_a^k и R_b^o с помощью полиномиальных алгоритмов 1, 2 из статьи [1]. Пронумеруем все найденные множества R_b^o в произвольном порядке от 1 до t и обозначим их через R_1, \dots, R_t .

2. Проверим выполнение критерия существования кратного пути между вершинами x и y (теорема 3 из статьи [1]). Напомним, что это можно сделать за полиномиальное время, проверяя смежность соответствующих множеств достижимости по кратным ребрам (алгоритм 3 той же статьи). Если критерий не выполнен, выходим из алгоритма.

3. Если x и y – обычные вершины, то $y \in R_x^o$ и кратчайший кратный путь $S_{\min}(x, y)$ проходит только по обычным ребрам, инцидентным вершинам из R_x^o (следует из теоремы 3 из статьи [1]). Находим этот путь с помощью алгоритма Дейкстры и выходим из алгоритма 1. Иначе переходим на шаг 4.

4. Для каждого мультиребра $e_a^m = \{a, \{a_1, \dots, a_k\}\}$ сформируем множество индексов $I_a = \{i_1, \dots, i_k\}$ таким образом, что каждый i_p равен номеру множества достижимости, в которое попадает a_p : $a_p \in R_{i_p}$. Поскольку граф G – делимый, $i_p \neq i_q$, если $p \neq q$. Далее для удобства будем считать, что вершины a_1, \dots, a_k мультиребра e_a^m пронумерованы в порядке возрастания значений i_p (если это не так, их можно быстро перенумеровать).

5. Будем строить обычный граф $G^{ord}(V^{ord}, E^{ord})$ следующим образом.

5.1. Для каждой кратной вершины $v \in V$ создадим обычную вершину v и поместим ее в V^{ord} .

5.2. Для каждого кратного ребра $\{u, v\} \in E$ создадим соответствующее обычное ребро $\{u, v\}$ той же длины и поместим его в E^{ord} .

5.3. Для каждой кратной вершины a , инцидентной мультиребру e_a^m , создадим дополнительную обычную вершину a' и поместим ее в V^{ord} . Создадим также обычное ребро $\{a, a'\}$ длины 1 и поместим его в E^{ord} .

5.4. Рассмотрим все пары мультиребер из E^m . Для каждой такой пары $\{e_a^m, e_b^m\}$ ($e_a^m = \{a, \{a_1, \dots, a_k\}\}$, $e_b^m = \{b, \{b_1, \dots, b_k\}\}$) проверим равенство $I_a = I_b$. Если оно выполнено, с помощью алгоритма Дейкстры найдем кратчайшие обычные пути $S_{\min}(a_p, b_p)$ ($p \in \overline{1, k}$), каждый из которых будет проходить только по вершинам из соответствующего множества R_{i_p} (какие-то из этих путей могут иметь длину 0, если $a_p = b_p$). Сформируем и запомним кратный путь

$$S_{mo}(a, b) = e_a^m \cup S_{\min}(a_1, b_1) \cup \dots \cup S_{\min}(a_k, b_k) \cup e_b^m,$$

который будет кратчайшим кратным путем без кратных ребер между вершинами a и b . Добавим в E^{ord} обычное ребро $\{a', b'\}$ длины $l(\{a', b'\}) = l(S_{mo}(a, b)) - 2$.

6. Найдем кратчайший путь $S_{\min}^{ord}(x, y)$ в графе $G^{ord}(V^{ord}, E^{ord})$ с помощью алгоритма Дейкстры.

7. Построим теперь искомый кратчайший кратный путь $S_{\min}(x, y)$ в графе $G(V, E)$. Для этого будем последовательно просматривать ребра пути $S_{\min}^{ord}(x, y)$ и в зависимости от типа ребер выполнять одно из следующих действий.

7.1. Если в путь $S_{\min}^{ord}(x, y)$ входит ребро $\{u, v\}$, где обе вершины без штриха, то включаем в кратный путь $S_{\min}(x, y)$ соответствующее кратное ребро $\{u, v\}$.

7.2. Если в путь $S_{\min}^{ord}(x, y)$ входит цепь вида $\{\{a, a'\}, \{a', b'\}, \{b', b\}\}$, то включаем в кратный путь $S_{\min}(x, y)$ найденный на шаге 5.4 кратный путь $S_{mo}(a, b)$ (если на шаге 5.4 был найден путь $S_{mo}(b, a)$, то путь $S_{mo}(a, b)$ получается из него простым обращением).

Алгоритм 1, очевидно, является полиномиальным, при этом наибольшую трудоемкость имеет шаг 5.4. В худшем случае на этом шаге придется $\frac{k}{2} \cdot (|E^m|^2 - |E^m|)$ раз применить полиномиальный алгоритм Дейкстры (поиск k кратчайших путей для каждой пары мультиребер). При этом, если нужно в одном графе найти кратчайшие кратные пути между различными парами вершин, для этого будет использоваться один и тот же граф $G^{ord}(V^{ord}, E^{ord})$, повторно выполнять шаг 5 не требуется.

Отметим также, что поиск множеств R_a^m на шаге 1 и проверка критерия на шаге 2 позволяют существенно сократить вычисления в том случае, если пути не существует. Однако, если известно, что x и y – кратные вершины, а граф связан, то данную проверку можно не проводить.

Шаг 3 обусловлен свойствами делимых графов. Если граф не будет делимым, этот шаг нужно будет пропустить, и тогда потребуются дополнительные действия на шагах 5 и 7.

Наконец, заметим, что вершины a' создаются на шаге 5.3 для того, чтобы по ребрам пути $S_{min}^{ord}(x, y)$ можно было однозначно определить, какой переход надо осуществить в исходном графе G между двумя кратными вершинами a и b : по единственному кратному ребру $\{a, b\}$ или же по кратному пути $S_{mo}(a, b)$, содержащему мультиребра e_a^m и e_b^m .

Пример 3. Продемонстрируем работу алгоритма 1. Для этого рассмотрим граф кратности 2, показанный на рис. 6. Как и ранее, на рисунке подписаны только номера вершин без буквы “х”. На ребрах шрифтом Courier New отмечены длины.

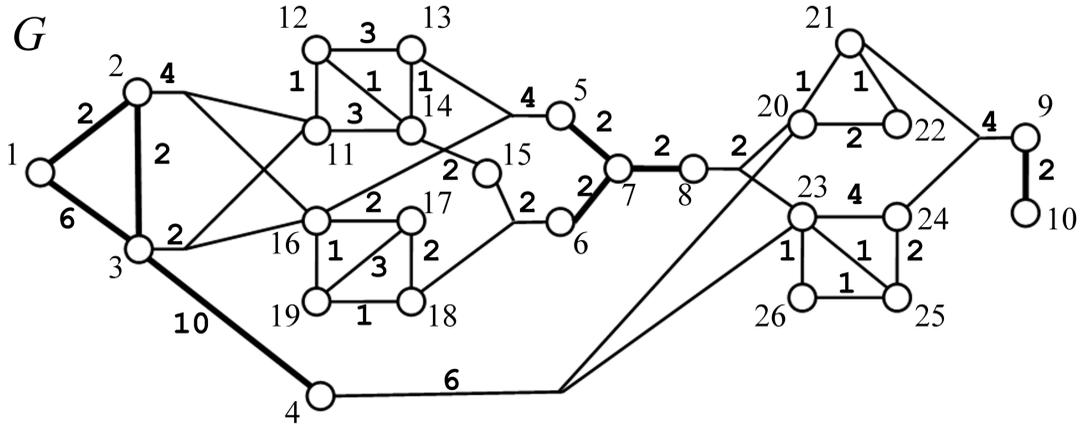


Fig. 6. Weighted divisible graph of multiplicity 2

Рис. 6. Взвешенный делимый граф кратности 2

Будем искать кратчайший кратный путь $S_{min}(x_1, x_{10})$. Вершины x_1 и x_{10} кратные и граф $G(V, E)$ связан, поэтому такой путь существует. Сначала определим и пронумеруем множества достижимости по обычным ребрам:

$$R_1 = R_{x_{11}}^o = \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}\}, \quad R_2 = R_{x_{16}}^o = \{x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}\},$$

$$R_3 = R_{x_{20}}^o = \{x_{20}, x_{21}, x_{22}\}, \quad R_4 = R_{x_{23}}^o = \{x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{26}\}.$$

Множества индексов I_a для мультиребер тогда определяются так:

$$I_{x_2} = \{1, 2\}, \quad I_{x_3} = \{1, 2\}, \quad I_{x_4} = \{3, 4\}, \quad I_{x_5} = \{1, 2\}, \quad I_{x_6} = \{1, 2\}, \quad I_{x_8} = \{3, 4\}, \quad I_{x_9} = \{3, 4\}.$$

Построим теперь кратные пути $S_{mo}(a, b)$ для подходящих пар мультиребер:

$$S_{mo}(x_2, x_3) = e_{x_2}^m \cup \emptyset \cup \emptyset \cup e_{x_3}^m, \quad l(S_{mo}(x_2, x_3)) = 6;$$

$$S_{mo}(x_2, x_5) = e_{x_2}^m \cup (\{x_{11}, x_{12}\}, \{x_{12}, x_{14}\}, \{x_{14}, x_{13}\}) \cup \emptyset \cup e_{x_5}^m, \quad l(S_{mo}(x_2, x_5)) = 11;$$

$$S_{mo}(x_2, x_6) = e_{x_2}^m \cup (\{x_{11}, x_{12}\}, \{x_{12}, x_{14}\}, \{x_{14}, x_{15}\}) \cup (\{x_{16}, x_{19}\}, \{x_{19}, x_{18}\}) \cup e_{x_6}^m, \quad l(S_{mo}(x_2, x_6)) = 12;$$

$$S_{mo}(x_3, x_5) = e_{x_3}^m \cup (\{x_{11}, x_{12}\}, \{x_{12}, x_{14}\}, \{x_{14}, x_{13}\}) \cup \emptyset \cup e_{x_5}^m, \quad l(S_{mo}(x_3, x_5)) = 9;$$

$$S_{mo}(x_3, x_6) = e_{x_3}^m \cup (\{x_{11}, x_{12}\}, \{x_{12}, x_{14}\}, \{x_{14}, x_{15}\}) \cup (\{x_{16}, x_{19}\}, \{x_{19}, x_{18}\}) \cup e_{x_6}^m, \quad l(S_{mo}(x_3, x_6)) = 10;$$

$$S_{mo}(x_5, x_6) = e_{x_5}^m \cup (\{x_{13}, x_{14}\}, \{x_{14}, x_{15}\}) \cup (\{x_{16}, x_{19}\}, \{x_{19}, x_{18}\}) \cup e_{x_6}^m, \quad l(S_{mo}(x_5, x_6)) = 11;$$

$$S_{mo}(x_4, x_8) = e_{x_4}^m \cup \emptyset \cup \emptyset \cup e_{x_8}^m, \quad l(S_{mo}(x_4, x_8)) = 8;$$

$$S_{mo}(x_4, x_9) = e_{x_4}^m \cup (\{x_{20}, x_{21}\}) \cup (\{x_{23}, x_{25}\}, \{x_{25}, x_{24}\}) \cup e_{x_9}^m, \quad l(S_{mo}(x_4, x_9)) = 14;$$

$$S_{mo}(x_8, x_9) = e_{x_8}^m \cup (\{x_{20}, x_{21}\}) \cup (\{x_{23}, x_{25}\}, \{x_{25}, x_{24}\}) \cup e_{x_9}^m, \quad l(S_{mo}(x_8, x_9)) = 10.$$

Применив шаг 5 алгоритма 1, получим обычный граф $G^{ord}(V^{ord}, E^{ord})$, показанный на рис. 7. Вершины кратчайшего пути $S_{min}^{ord}(x_1, x_{10})$ (шаг 6) показаны серым. Его длина $l(S_{min}^{ord}(x_1, x_{10})) = 29$.

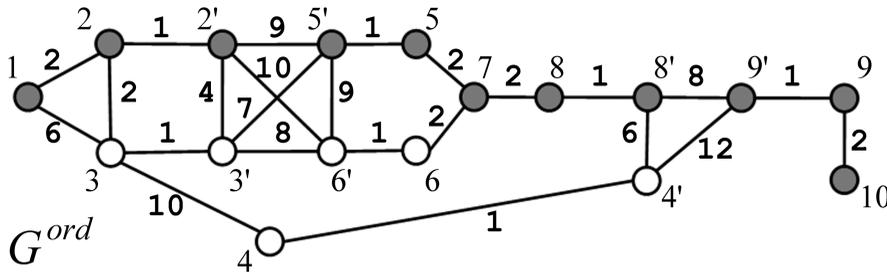


Fig. 7. Ordinary graph G^{ord} and the shortest path

Рис. 7. Обычный граф G^{ord} и кратчайший путь

Применяя шаг 7, получим искомый кратчайший кратный путь $S_{min}(x_1, x_{10})$ (рис. 8):

$$S_{min}(x_1, x_{10}) = (\{x_1, x_2\}, S_{mo}(x_2, x_5), \{x_5, x_7\}, \{x_7, x_8\}, S_{mo}(x_8, x_9), \{x_9, x_{10}\}),$$

$$l(S_{min}(x_1, x_{10})) = l(S_{min}^{ord}(x_1, x_{10})) = 29.$$

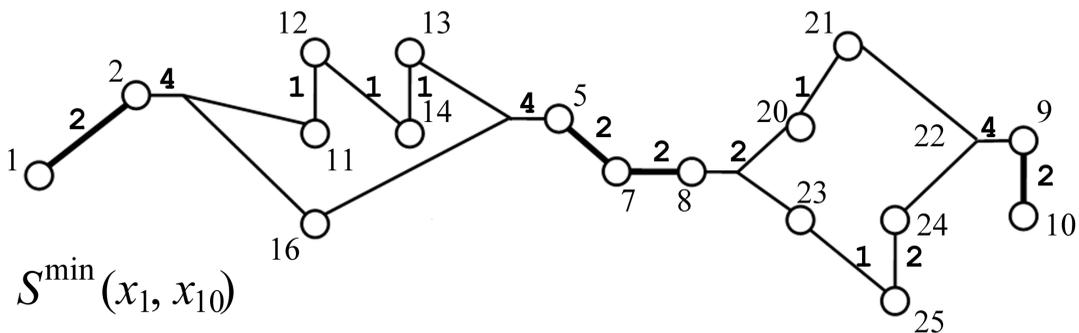


Fig. 8. The shortest path in the multiple graph G

Рис. 8. Кратчайший путь в кратном графе G

Отметим, что, заменив в пути $S_{min}(x_1, x_{10})$ мультиребро e_2^m на последовательность из кратного ребра $\{x_2, x_3\}$ и мультиребра e_3^m , мы снова получим кратчайший кратный путь от x_1 до x_{10} .

3. Обоснование полиномиальности задачи для делимого графа

Теорема 1. Пусть в делимом кратном графе $G(V, E)$ существует путь между вершинами x и y . Тогда кратчайший кратный путь $S_{\min}(x, y)$ между этими вершинами может быть найден за полиномиальное время с помощью алгоритма 1.

Доказательство. Если x и y – обычные вершины, утверждение теоремы очевидно.

Пусть x и y – кратные вершины. Применим полиномиальный алгоритм 1 и получим кратчайший путь $S_{\min}^{ord}(x, y)$ в графе $G^{ord}(V^{ord}, E^{ord})$. Покажем, что путь $S_{\min}^{ord}(x, y)$ всегда будет соответствовать кратчайшему кратному пути $S_{\min}(x, y)$ в исходном графе. Справедливы следующие утверждения.

1. Любому кратному пути $S(x, y)$ соответствует обычный путь $S^{ord}(x, y)$, если в кратном пути все части, не содержащие кратных ребер, можно представить в виде объединения путей $S_{mo}(a, b)$ (следует из правил построения графа $G^{ord}(V^{ord}, E^{ord})$).
2. В любом минимальном кратном пути все части, не содержащие кратных ребер, можно представить в виде объединения путей $S_{mo}(a, b)$ (иначе длину пути можно уменьшить, заменив цепи из обычных ребер на более короткие).
3. Следовательно, любому минимальному кратному пути в графе $G(V, E)$ соответствует обычный путь в графе $G^{ord}(V^{ord}, E^{ord})$.

Однако обратное неверно: не всякому обычному пути в графе $G^{ord}(V^{ord}, E^{ord})$ соответствует кратный путь в графе $G(V, E)$. Такими путями являются те, в которых встречается два и более ребра вида $\{a', b'\}$ подряд (невозможно установить соответствие с обычными и мультиребрами в графе $G(V, E)$), либо те, в которых два и более ребра вида $\{a, a'\}$ приводят к нарушению условия 7 из определения 5 при переходе к кратному пути (два и более мультиребра с одинаковым набором обычных вершин проходятся в одинаковом направлении).

Покажем, что для любого минимального пути $S_{\min}^{ord}(x, y)$ в графе $G^{ord}(V^{ord}, E^{ord})$ ни одна из отмеченных двух аномалий не возникает.

Сначала предположим, что в путь $S_{\min}^{ord}(x, y)$ входит цепь $P^{ord} = (\{a', b'\}, \{b', c'\})$.

Вершины a, a', b, b', c, c' графа $S_{\min}^{ord}(x, y)$ порождены мультиребрами $e_a^m = \{a, \{a_1, \dots, a_k\}\}$, $e_b^m = \{b, \{b_1, \dots, b_k\}\}$, $e_c^m = \{c, \{c_1, \dots, c_k\}\}$ кратного графа $G(V, E)$ в результате действий шага 5 алгоритма 1. Поэтому длина цепи P^{ord} может быть выражена так:

$$l(P^{ord}) = l(S_{mo}(a, b)) - 2 + l(S_{mo}(b, c)) - 2,$$

$$l(P^{ord}) = l(e_a^m) + l(S_{\min}(a_1, b_1)) + \dots + l(S_{\min}(a_k, b_k)) + l(e_b^m) - 2 + l(e_b^m) + l(S_{\min}(b_1, c_1)) + \dots + l(S_{\min}(b_k, c_k)) + l(e_c^m) - 2,$$

$$l(P^{ord}) = l(e_a^m) + l(e_c^m) + l(S'(a_1, c_1)) + \dots + l(S'(a_k, c_k)) + 2l(e_b^m) - 4,$$

где $S'(a_i, c_i)$ ($i \in \overline{1, k}$) – это какой-то, не обязательно минимальный, путь между вершинами a_i и c_i в графе $G(V, E)$, проходящий только по обычным ребрам.

При этом ребра вида $\{a', b'\}$ образованы для всех мультиребер с совпадающими множествами индексов $I_a = I_b$. Это значит, что если в графе $G^{ord}(V^{ord}, E^{ord})$ есть ребра $\{a', b'\}$ и $\{b', c'\}$, то в нем обязательно есть и ребро $\{a', c'\}$. Его длина выражается так:

$$l(\{a', c'\}) = l(S_{mo}(a, c)) - 2 = l(e_a^m) + l(e_c^m) + l(S_{\min}(a_1, c_1)) + \dots + l(S_{\min}(a_k, c_k)) - 2.$$

Заметим, что $l(S'(a_i, c_i)) \geq l(S_{\min}(a_i, c_i))$ ($i \in \overline{1, k}$). Кроме того, $l(e_b^m) \geq 2$ и $2l(e_b^m) - 2 > 0$. Отсюда получаем, что

$$l(P^{ord}) > l(\{a', c'\}),$$

а значит, замена цепи $P^{ord} = (\{a', b'\}, \{b', c'\})$ на ребро $\{a', c'\}$ в пути $S_{\min}^{ord}(x, y)$ приведет к пути меньшей длины. Следовательно, $S_{\min}^{ord}(x, y)$ не является кратчайшим. Полученное противоречие доказывает отсутствие аномалии первого вида в кратчайшем пути $S_{\min}^{ord}(x, y)$ в графе $G^{ord}(V^{ord}, E^{ord})$.

Теперь предположим, что в минимальный путь $S_{\min}^{ord}(x, y)$ в графе $G^{ord}(V^{ord}, E^{ord})$ вошли два ребра $\{a, a'\}$, $\{b, b'\}$, соответствующие мультиребрам $e_a^m = \{a, \{x_1, \dots, x_k\}\}$, $e_b^m = \{b, \{x_1, \dots, x_k\}\}$ с одинаковым набором обычных вершин, и эти два ребра проходятся в одном направлении. Для определенности будем считать, что это направление от кратной вершины (обратная ситуация обосновывается аналогично).

Наличие в пути $S_{\min}^{ord}(x, y)$ ребер $\{a, a'\}$, $\{b, b'\}$, проходимых в направлении к вершине со штрихом, влечет обязательное наличие в этом пути цепей $(\{a, a'\}, \{a', c'\}, \{c', c\})$ и $(\{b, b'\}, \{b', d'\}, \{d', d\})$, а также цепи $S^{ord}(c, b)$, соединяющей вершины c и b . Таким образом, цепь

$$P^{ord} = (\{a, a'\}, \{a', c'\}, \{c', c\}) \cup S^{ord}(c, b) \cup (\{b, b'\}, \{b', d'\}, \{d', d\}) \subseteq S_{\min}^{ord}(x, y).$$

Заметим, что вершины c, c', d, d' в графе $G^{ord}(V^{ord}, E^{ord})$ порождены соответствующими мультиребрами e_c^m и e_d^m исходного графа. Наличие ребер $\{a', c'\}$ и $\{b', d'\}$ в E^{ord} говорит о том, что $I_c = I_d = I_a = I_b$. Следовательно, вершины a', b', c', d' попарно смежны и цепь

$$P_0^{ord} = (\{a, a'\}, \{a', d'\}, \{d', d\}) \subset G^{ord}(V^{ord}, E^{ord}).$$

Оценим длину цепей P^{ord} и P_0^{ord} . Будем обозначать через L_{ac} суммарную длину кратчайших обычных путей в кратном графе $G(V, E)$ между обычными вершинами – концами мультиребер e_a^m и e_c^m (L_{ad} и L_{bd} определяются аналогичным образом). Мультиребра e_a^m и e_b^m имеют одинаковый набор обычных вершин, поэтому $L_{ad} = L_{bd}$. Тогда длины цепей P^{ord} и P_0^{ord} выражаются так:

$$l(P^{ord}) = l(S_{mo}(a, c)) + l(S^{ord}(c, b)) + l(S_{mo}(b, d)) = l(e_a^m) + L_{ac} + l(e_c^m) + l(S^{ord}(c, b)) + l(e_b^m) + L_{bd} + l(e_d^m),$$

$$l(P_0^{ord}) = l(S_{mo}(a, d)) = l(e_a^m) + L_{ad} + l(e_d^m) = l(e_a^m) + L_{bd} + l(e_d^m).$$

Таким образом,

$$l(P^{ord}) = l(P_0^{ord}) + L_{ac} + l(e_c^m) + l(S^{ord}(c, b)) + l(e_b^m) > l(P_0^{ord}).$$

Заменяя в пути $S_{\min}^{ord}(x, y)$ цепь P^{ord} на цепь P_0^{ord} , мы получим путь меньшей длины. Соответственно, путь $S_{\min}^{ord}(x, y)$ не является кратчайшим. Полученное противоречие доказывает отсутствие аномалии второго вида в кратчайшем пути $S_{\min}^{ord}(x, y)$ в графе $G^{ord}(V^{ord}, E^{ord})$.

Следовательно, любому кратчайшему пути $S_{\min}^{ord}(x, y)$ в графе $G^{ord}(V^{ord}, E^{ord})$ соответствует краткий путь в исходном делимом графе $G(V, E)$, для которого соблюдены все условия из определения 5 (условия 1–6 обеспечиваются правилами построения графа $G^{ord}(V^{ord}, E^{ord})$, а выполнение условия 7 обосновано выше). Из свойств, определенных в начале доказательства, следует, что указанный краткий путь будет кратчайшим.

Теорема доказана.

4. Модификация алгоритма для произвольного кратного графа

Алгоритм 1 сформулирован для делимых кратных графов, однако он может быть легко трансформирован для случая произвольного кратного графа.

Пусть имеется произвольный взвешенный кратный граф $G(V, E)$ кратности k . Требуется найти кратчайший кратный путь $S_{\min}(x, y)$ между двумя выбранными вершинами x и y .

Алгоритм 2 (кратчайший путь в произвольном кратном графе).

1. Найдем все множества достижимости по кратным и обычным ребрам R_a^k и R_b^o с помощью полиномиальных алгоритмов 1, 2 из статьи [1]. Пронумеруем все найденные множества R_b^o в произвольном порядке от 1 до t и обозначим их через R_1, \dots, R_t .

2. Проверим выполнение критерия существования кратного пути между вершинами x и y (теорема 3 и полиномиальный алгоритм 3 из статьи [1]). Если критерий не выполнен, выходим из алгоритма.

3. Для каждого мультиребра $e_a^m = \{a, \{a_1, \dots, a_k\}\}$ сформируем мультимножество индексов $I_a = \{i_1, \dots, i_k\}$ таким образом, что каждый i_p равен номеру множества достижимости, в которое попадает a_p : $a_p \in R_{i_p}$. Если граф G не является делимым, хотя бы для одного мультиребра обязательно найдутся индексы $p \neq q$ такие, что $i_p = i_q$. Далее для удобства будем считать, что вершины a_1, \dots, a_k мультиребра e_a^m пронумерованы в порядке возрастания значений i_p (если это не так, их можно быстро перенумеровать).

4. Будем строить обычный граф $G^{ord}(V^{ord}, E^{ord})$ следующим образом.

4.1. Для каждой кратной вершины $v \in V$ создадим обычную вершину v и поместим ее в V^{ord} .

4.2. Для каждого кратного ребра $\{u, v\} \in E$ создадим соответствующее обычное ребро $\{u, v\}$ той же длины и поместим его в E^{ord} .

4.3. Для каждой кратной вершины a , инцидентной мультиребру e_a^m , создадим дополнительную обычную вершину a' и поместим ее в V^{ord} . Создадим также обычное ребро $\{a, a'\}$ длины 1 и поместим его в E^{ord} .

4.4. Рассмотрим все пары мультиребер из E^m . Для каждой такой пары $\{e_a^m, e_b^m\}$ ($e_a^m = \{a, \{a_1, \dots, a_k\}\}$, $e_b^m = \{b, \{b_1, \dots, b_k\}\}$) проверим равенство $I_a = I_b$. Если оно выполнено, будем поочередно рассматривать все подмножества I_a^j совпадающих индексов из I_a .

Если подмножество I_a^j содержит только один элемент i_p ($I_a^j = \{i_p\}$), с помощью алгоритма Дейкстры найдем кратчайший обычный путь $S_{\min}(a_p, b_p)$, проходящий только по вершинам из R_{i_p} . Обозначим $c_p = b_p$.

Если подмножество I_a^j содержит q одинаковых элементов ($I_a^j = \{i_p, i_{p+1}, \dots, i_{p+q-1}\}$, $i_r = i_s$ для всех $r \in \overline{p, p+q-1}$, $s \in \overline{p, p+q-1}$), найдем с помощью алгоритма Дейкстры q^2 кратчайших обычных путей $S_{\min}(a_r, b_s)$ ($r \in \overline{p, p+q-1}$, $s \in \overline{p, p+q-1}$), проходящих только по вершинам из R_{i_p} . Выберем среди них q путей, попарно непересекающихся в начальных и конечных вершинах и имеющих при этом минимальную суммарную длину (соответствует выбору одного из $q!$ множеств путей). Упорядочим выбранные пути по возрастанию номера начальной вершины, конечные вершины обозначим через c_r ($r \in \overline{p, p+q-1}$).

Просмотрев все подмножества, сформируем и запомним кратный путь

$$S_{mo}(a, b) = e_a^m \cup S_{\min}(a_1, c_1) \cup \dots \cup S_{\min}(a_k, c_k) \cup e_b^m,$$

который будет кратчайшим кратным путем без кратных ребер между вершинами a и b . Добавим в E^{ord} обычное ребро $\{a', b'\}$ длины $l(\{a', b'\}) = l(S_{mo}(a, b)) - 2$.

4.5. Если x – обычная вершина, скопируем ее в V^{ord} . Далее рассмотрим все мультиребра $e_a^m = \{a, \{a_1, \dots, a_k\}\}$ с $I_a = \{p, \dots, p\}$, где $R_p = R_x^o$. Для каждого такого мультиребра с помощью алгоритма Дейкстры найдем кратчайшие пути $S_{\min}(x, a_r)$ ($r \in \overline{1, k}$), проходящие только по вершинам из R_x^o . сформируем и запомним кратный путь

$$S_{mo}(x, a) = S_{\min}(x, a_1) \cup \dots \cup S_{\min}(x, a_k) \cup e_a^m,$$

который будет кратчайшим кратным путем без кратных ребер между вершинами x и a . Добавим в E^{ord} обычное ребро $\{x, a'\}$ длины $l(\{x, a'\}) = l(S_{mo}(x, a)) - 2$.

4.6. Если y – обычная вершина, скопируем ее в V^{ord} . Далее рассмотрим все мультиребра $e_a^m = \{a, \{a_1, \dots, a_k\}\}$ с $I_a = \{p, \dots, p\}$, где $R_p = R_y^o$. Для каждого такого мультиребра с помощью алгоритма Дейкстры найдем кратчайшие пути $S_{\min}(a_r, y)$ ($r \in \overline{1, k}$), проходящие только по вершинам из R_y^o . сформируем и запомним кратный путь

$$S_{mo}(a, y) = e_a^m \cup S_{\min}(a_1, y) \cup \dots \cup S_{\min}(a_k, y),$$

который будет кратчайшим кратным путем без кратных ребер между вершинами a и y . Добавим в E^{ord} обычное ребро $\{a', y\}$ длины $l(\{a', y\}) = l(S_{mo}(a, y)) - 2$.

4.7. Если обе вершины x и y обычные и $y \in R_x^o$, с помощью алгоритма Дейкстры найдем кратчайший путь $S'_{min}(x, y)$, проходящий только по вершинам из R_x^o , и запомним его. Добавим в E^{ord} обычное ребро $\{x, y\}$ длины $l(S'_{min}(x, y))$.

5. Найдем кратчайший путь $S_{min}^{ord}(x, y)$ в графе $G^{ord}(V^{ord}, E^{ord})$ с помощью алгоритма Дейкстры.

6. Построим теперь искомый кратчайший кратный путь $S_{min}(x, y)$ в графе $G(V, E)$. Для этого будем последовательно просматривать ребра пути $S_{min}^{ord}(x, y)$ и в зависимости от типа ребер выполнять одно из следующих действий.

6.1. Если в путь $S_{min}^{ord}(x, y)$ входит ребро $\{u, v\}$, где обе вершины без штриха, то включаем в кратный путь $S_{min}(x, y)$ соответствующее кратное ребро $\{u, v\}$.

6.2. Если в путь $S_{min}^{ord}(x, y)$ входит цепь вида $(\{a, a'\}, \{a', b'\}, \{b', b\})$, то включаем в кратный путь $S_{min}(x, y)$ найденный на шаге 4.4 кратный путь $S_{mo}(a, b)$ (если на шаге 4.4 был найден путь $S_{mo}(b, a)$, то путь $S_{mo}(a, b)$ получается из него простым обращением).

6.3. Если в путь входит цепь вида $(\{x, a'\}, \{a', a\})$, то включаем в кратный путь $S_{min}(x, y)$ найденный на шаге 4.5 кратный путь $S_{mo}(x, a)$.

6.4. Если в путь входит цепь вида $(\{a, a'\}, \{a', y\})$, то включаем в кратный путь $S_{min}(x, y)$ найденный на шаге 4.6 кратный путь $S_{mo}(a, y)$.

6.5. Если путь $S_{min}^{ord}(x, y)$ состоит из единственного ребра $\{x, y\}$ и x, y – обычные вершины в $G(V, E)$, то $S_{min}(x, y) = S'_{min}(x, y)$ ($S'_{min}(x, y)$ найден на шаге 4.7).

Применимость алгоритма 2 для задачи 1 в случае произвольного кратного графа обосновывается так же, как в теореме 1 обосновывалась применимость алгоритма 1 для задачи 1 в случае делимого кратного графа. В доказательстве нужно сделать лишь незначительные изменения, учитывающие ситуации, когда x или y – обычная вершина.

Отметим, что в большинстве случаев алгоритм 2 будет достаточно быстрым, однако в общем случае он экспоненциален по параметру k (кратность графа). Действительно, на шаге 4.4 для каждого подмножества I_a^k происходит перебор $q!$ вариантов выбора путей, где q может принимать значение от 1 до k . В худшем случае придется перебрать $\frac{k!}{2} \cdot (|E^m|^2 - |E^m|)$ вариантов. Этот случай реализуется, если все обычные вершины находятся в одном множестве достижимости R_1 .

Однако для графов небольшой кратности алгоритм 2 будет выполняться за приемлемое время даже в указанном худшем случае. Кроме того, в случае когда нужно найти несколько кратчайших путей в одном и том же графе, шаг 4.4 повторно выполнять не нужно: если ищутся пути между различными парами кратных вершин, можно для этого использовать один и тот же граф $G^{ord}(V^{ord}, E^{ord})$; если же начало или конец очередного пути – обычная вершина, потребуется лишь небольшая перестройка графа, выполняемая за полиномиальное время (добавление вершин с помощью шагов 4.5–4.7 алгоритма либо же их удаление, если обычные вершины были концами предыдущего найденного пути).

References

- [1] A. V. Smirnov, “The Shortest Path Problem for a Multiple Graph”, *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 52, no. 7, pp. 625–633, 2018. doi: [10.3103/S0146411618070234](https://doi.org/10.3103/S0146411618070234).
- [2] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein, *Introduction to Algorithms*, 3rd. The MIT Press, McGraw-Hill Book Company, 2009.
- [3] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*. North-Holland Publishing Company, 1973.
- [4] A. Basu and R. W. Blanning, “Metagraphs in workflow support systems”, *Decision Support Systems*, vol. 25, no. 3, pp. 199–208, 1999. doi: [10.1016/S0167-9236\(99\)00006-8](https://doi.org/10.1016/S0167-9236(99)00006-8).

- [5] A. Basu and R. W. Blanning, *Metagraphs and Their Applications*, ser. Integrated Series in Information Systems. Springer US, 2007, vol. 15.
- [6] V. S. Rublev and A. V. Smirnov, “Flows in Multiple Networks”, *Yaroslavy Pedagogichesky Vestnik*, vol. 3, no. 2, pp. 60–68, 2011.
- [7] A. V. Smirnov, “The Problem of Finding the Maximum Multiple Flow in the Divisible Network and its Special Cases”, *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 50, no. 7, pp. 527–535, 2016. DOI: [10.3103/S0146411616070191](https://doi.org/10.3103/S0146411616070191).
- [8] L. R. Ford and D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*. Princeton University Press, 1962.
- [9] V. S. Roublev and A. V. Smirnov, “The Problem of Integer-Valued Balancing of a Three-Dimensional Matrix and Algorithms of Its Solution”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 17, no. 2, pp. 72–98, 2010.
- [10] A. V. Smirnov, “Network Model for the Problem of Integer Balancing of a Four-Dimensional Matrix”, *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 51, no. 7, pp. 558–566, 2017. DOI: [10.3103/S0146411617070185](https://doi.org/10.3103/S0146411617070185).
- [11] A. V. Smirnov, “Spanning tree of a multiple graph”, *Journal of Combinatorial Optimization*, vol. 43, no. 4, pp. 850–869, 2022. DOI: [10.1007/s10878-021-00810-5](https://doi.org/10.1007/s10878-021-00810-5).
- [12] E. W. Dijkstra, “A Note on Two Problems in Connexion with Graphs”, *Numerische Mathematik*, vol. 1, no. 1, pp. 269–271, 1959. DOI: [10.1007/BF01386390](https://doi.org/10.1007/BF01386390).