Модел. и анализ информ. систем. Т. **20**, № **5** (2013) 90–105

УДК 517.5

Точные неравенства типа Джексона–Стечкина и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве L_2

Лангаршоев М. Р.

Таджикский национальный университет
Республика Таджикистан, 734035, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17

e-mail: mukhtor77@mail.ru

получена 28 мая 2013

Ключевые слова: наилучшее приближение, обобщенный модуль непрерывности, экстремальная характеристика, n-поперечники

Получены некоторые точные неравенства между наилучшими приближениями периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами и обобщенными модулями непрерывности m-го порядка Ω_m в пространстве $L_2[0, 2\pi]$. Подобные усредненные характеристики гладкости функций в ходе исследования важных вопросов конструктивной теории функций рассматривались ранее в работах К.В. Руновского, Э.А. Стороженко, В.Г. Кротова, П. Освальда и многих других. Для некоторых классов функций, определяемых указанными модулями непрерывности, r-тые производные которых мажорируются функциями, удовлетворяющими определенным ограничениям, получены точные значения бернштейновского, гельфандовского, колмогоровского, линейного и проекционного n-поперечника. Приведен пример мажоранты, для которой все сформулированные в статье требования выполнены.

1. Основные понятия и обозначения

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N}\cup\{0\}$; $\mathbb{R}_+$ – множество положительных чисел вещественной оси. Пусть $L_2 \equiv L_2[0, 2\pi]$ – пространство измеримых по Лебегу 2π-периодических функций, у которых норма

$$\|f\| = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty,$$

а через $L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+; L_2^0 \equiv L_2)$ обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производные $f^{(r)} \in L_2$. Символом

$$E_{n-1}(f) := E(f, \mathcal{F}_{2n-1})_{L_2} = \inf\Big\{\|f - T_{n-1}\|_2 : T_{n-1}(x) \in \mathcal{F}_{2n-1}\Big\}$$

обозначим наилучшее приближение функции $f \in L_2$ подпространством $\mathcal{F}_{2n-1}$ тригонометрических полиномов порядка $n-1$ в пространстве L_2. Хорошо известно, что

$$E_{n-1}(f) = \Big\|f - S_{n-1}(f)\Big\|_2 = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\right\}^{1/2},$$

где $\rho_k^2 = a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $k \geq n$, $a_k(f)$, $b_k(f)$ – косинус- и синус-коэффициенты Фурье формального разложения $f(x)$ в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right), \tag{1.1}$$

а $S_{n-1}(f)$ – частная сумма порядка $n-1$ ряда (1.1). Равенством

$$\omega_m(f,t) := \sup\Big\{\|\Delta_h^m(f)\| : |h| \leq t\Big\} =$$

$$= \sup\left\{\left\|\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}f(\cdot + jh)\right\| : \ |h| \leq t\right\} \tag{1.2}$$

определим модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$.

При решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций $f \in L_2$ обычно используют различные модификации классического определения модуля непрерывности (1.2) (см., например, [1] – [9] и приведенную там литературу). Указанные модификации, как отмечается в [17], в большинство случаях связаны со специфическими условиями исследуемых задач и позволяют раскрыть их содержательную сущность. Во многих случаях, как правило, оператор сдвига $T_h f(x) = f(x+h)$ заменяют различными усредняющими операторами. Например, в работах [10], [11] для оценки наилучших приближений 2π-периодических функций из L_2, наряду с (1.2), используют следующую усредненную характеристику гладкости

$$\Omega_m(f,t)_p = \left\{\frac{1}{t^m}\int\limits_0^t\cdots\int\limits_0^t\left\|\Delta_{\overline{h}}^m(f)\right\|_{L_p}^p dh_1\cdots dh_m\right\}^{1/p}, \ 0 < p \leq \infty, \tag{1.3}$$

где $t > 0$; $\overline{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_m)$; $\Delta_{\overline{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \Delta_{h_2}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$. Напомним, что в ходе решения ряда задач аппроксимации функций в метрическом пространстве $L_p(0 < p < 1)$ усредненная характеристика гладкости функции, подобная (1.3), рассматривалась в [12] и [13]. Аналогичным образом в [14], исходя из функции Стеклова

$$S_h(f,x) = \frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} f(t)dt, \ f \in L_2, \ h > 0,$$

введены в рассмотрение усредняющие операторы

$$S_{h,i}(f) \overset{def}{=} S_h(S_{h,i-1}(f)), \ i \in \mathbb{N}, \ S_{h,0}(f) \equiv f,$$

полагая при этом в качестве разности первого порядка

$$\widetilde{\Delta}_h^1(f,x) \stackrel{def}{=} S_h(f,x) - f(x) = (S_h - \mathbb{I})(f,x),$$

а разности m-го порядка равными

$$\widetilde{\Delta}_h^m(f,x) \stackrel{def}{=} \widetilde{\Delta}_h^1(\widetilde{\Delta}_h^{m-1}(f),x) = (S_h - \mathbb{I})^m(f,x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}S_{h,i}(f,x),$$

где $m = 2, 3, \ldots$ и $\mathbb{I}$ – единичный оператор в пространстве L_2. При этом равенством

$$\widetilde{\Omega}_m(f,t) \stackrel{def}{=} \sup\left\{\|\widetilde{\Delta}_h^m(f)\| : \, 0 < h \le t\right\}$$

определяют специальный модуль непрерывности m-го порядка.

Среди экстремальных задач теории аппроксимации функций одной из наиболее важных является задача вычисления точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина

$$E_{n-1}(f) \le \chi\, n^{-r} U_m\left(f^{(r)}, t/n\right); \, r \in \mathbb{Z}_+, \, t > 0,$$

где U_m – некоторая характеристика гладкости функций $f \in L_2^{(r)}$, например ω_m, Ω_m или $\widetilde{\Omega}_m$, χ – некоторая константа, не зависящая ни от f, ни от n, но зависящая от m и r. В случае $U_m = \omega_m$ эту задачу в разное время исследовали Н.И. Черных [1], В.И. Бердышев [2], Л.В. Тайков [3], А.А. Лигун [4], В.И. Иванов, О.И. Смирнов [5], С.Б. Вакарчук [6], М.Ш. Шабозов [7] и другие; в случае $U_m = \Omega_m$ – С.Б. Вакарчук [10], М.Ш. Шабозов, С.Б. Вакарчук, В.И. Забутная [11], в случае $U_m = \widetilde{\Omega}_m$ – В.А. Абилов, Ф.В. Абилова [14], М.Ш. Шабозов [15], М.Ш. Шабозов, Г.А. Юсупов [16], С.Б. Вакарчук, В.И. Забутная [17].

В работе [1] Н.И. Черных отметил, что для характеристики величины $E_{n-1}(f)$ более естественным является не джексоновский функционал $\omega_m\left(f^{(r)}, h\right)$, $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < h \le \pi/n$, а усредненный с весом $\varphi(t) > 0$, $0 < t \le h$ функционал

$$\Phi_{m,n}\left(f^{(r)}, h\right) = \left\{\int_0^h \omega_m^2\left(f^{(r)}, t\right)\varphi(t)dt \Big/ \int_0^h \varphi(t)dt\right\}^{1/2}.$$

Учитывая эти соображения, А.А. Лигун [4] ввел в рассмотрение следующую экстремальную характеристику:

$$K_{n,r}(\omega_m; \varphi, h) = \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \ne const}} \frac{E_{n-1}^2(f)}{\int_0^h \omega_m^2\left(f^{(r)}, t\right)\varphi(t)dt},$$

где $m,n\in\mathbb{N},\quad r\in\mathbb{Z}_+,\quad 0<h\le\pi/n\quad \varphi(t)\ge 0$ – суммируемая на $[0,h]$ функция. Он показал, что

$$\left\{B^{r,m}_{n,h}(\varphi)\right\}^{-1}\le K_{n,r}(\omega_m;\varphi,h)\le\left\{\inf_{n\le k<\infty}B^{r,m}_{k,h}(\varphi)\right\}^{-1},$$

где

$$B^{r,m}_{k,h}(\varphi):=2^m k^{2r}\int\limits_0^h(1-\cos kt)^m\varphi(t)dt,\ k\ge n.$$

2. Точная константа в неравенстве типа Джексона – Стечкина

С целью обобщения результатов [4] для различных характеристик гладкости U_m вводим в рассмотрение величины

$$K_{n,r,p}(U_m;\varphi,h)=\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\ne const}}\frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h U_m^p\left(f^{(r)},t\right)\varphi(t)dt\right)^{1/p}},\tag{2.1}$$

где $m,n\in\mathbb{N},\quad r\in\mathbb{Z}_+,\quad 0<p\le 2,\quad 0<h\le\pi/n\quad \varphi(t)\ge 0$ – суммируемая на отрезке $[0,h]$ не эквивалентная нулю функция.

Величина (2.1) для $U_m=\omega_m$ изучалась в [8], для $U_m=\widetilde{\Omega}_m$ в [15], [16], а для $U_m=\Omega_m$ в [10,11]. В [11] доказано, что для $0<p\le 2$ справедливы неравенства

$$\left\{B^{r,m}_{n,h,p}(\varphi)\right\}^{-1}\le K_{n,r,p}(\Omega_m;\varphi,h)\le\left\{\inf_{n\le k<\infty}B^{r,m}_{k,h,p}(\varphi)\right\}^{-1},\tag{2.2}$$

где

$$B^{r,m}_{k,h,p}(\varphi):=2^{m/2}\left\{k^{rp}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin kt}{kt}\right)^{mp/2}\varphi(t)dt\right\}^{1/p},\ k\ge n.$$

В этой же работе были найдены необходимые и достаточные условия, для того чтобы выполнялось равенство $B^{r,m}_{n,h,p}(\varphi)=\inf\limits_{n\le k<\infty}B^{r,m}_{k,h,p}(\varphi)$. Мы продолжим исследование вышеуказанных авторов в этом направлении. Имеет место следующая

Теорема 2.1. *Пусть $m,n\in\mathbb{N},\quad 0<p\le 2,\quad r\in\mathbb{Z}_+,\quad 0<h\le 3\pi/4n,\quad \varphi$ – неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,h]$ не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место следующее равенство:*

$$K_{n,r,p}(\Omega_m;\varphi,h)=\left\{B^{r,m}_{n,h,p}(\varphi)\right\}^{-1}.\tag{2.3}$$

Доказательство. Будем следовать схеме рассуждений [17], где доказано, что при любых $\nu,\alpha\in\mathbb{R}_+$ и $x\ge 1$ справедливо неравенство

$$x^\nu\left(1-\frac{\sin xy}{xy}\right)^\alpha\ge\left(1-\frac{\sin y}{y}\right)^\alpha.\tag{2.4}$$

При $x = k/n, \quad k, n \in \mathbb{N}, \quad k \geq n$ и $y = nt, \quad 0 < t \leq h, \quad \nu = rp, \quad \alpha = mp/2, m \in \mathbb{N}$ из неравенства (2.4) сразу получаем

$$k^{rp}\left(1 - \frac{\sin kt}{kt}\right)^{mp/2} \geq n^{rp}\left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2}. \tag{2.5}$$

Умножив обе части неравенства (2.5) на положительную функцию $\varphi(t)$, интегрируя полученное выражение по переменному t в пределах от 0 до h и возведя в степень $1/p$, для любого $k \geq n, \quad k, n \in \mathbb{N}$ запишем

$$B^{r,m}_{k,h,p}(\varphi) \geq B^{r,m}_{n,h,p}(\varphi). \tag{2.6}$$

Из неравенства (2.6) с учетом (2.2) получаем (2.3). Теорема 2.1 доказана. Из доказанной теоремы 2.1 вытекают такие следствия.

Следствие 2.1. *Пусть* $\varphi(t) = 1, m, n \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 < p \leq 2, \quad 0 < h \leq \pi/n$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq const}} \frac{2^{m/2} n^{r-1/p} E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^h \Omega_m^p\left(f^{(r)}, t\right) dt\right\}^{1/p}} = \left\{\int\limits_0^{nh}\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt\right\}^{-1/p}. \tag{2.7}$$

В частности, при $p = 2/m, m \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+$ *из (2.7) следует, что*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq const}} \frac{2^{m/2} n^{r-m/2} E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^h \Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, t\right) dt\right\}^{m/2}} = \frac{1}{(nh - Si(nh))^{m/2}}, \tag{2.8}$$

где $Si(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ – *интегральный синус.* Отметим, что равенство (2.8) ранее получено в [15].

Следствие 2.2. *Пусть* $\varphi(t) = t, m, n, \in \mathbb{N}, \quad p = 2/m, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 < h \leq \pi/n$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq const}} \frac{2^m n^{r-m/2} E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^h t\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, t\right) dt\right\}^{m/2}} = \frac{1}{\left\{\left(\frac{nh}{2}\right)^2 - \sin^2\left(\frac{nh}{2}\right)\right\}^{m/2}}. \tag{2.9}$$

Следующее утверждение является, с одной стороны, обобщением теоремы 2.1, а с другой стороны – ее следствием.

Теорема 2.2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}, \quad 0 < p \leq 2, \quad 0 < h \leq \pi/n, \quad \varphi$ – *неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0, h]$ *не эквивалентная нулю функция. Тогда при любом*

$k=0,1,\ldots,r$, $r\in\mathbb{Z}_+$ *имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}}\frac{2^{m/2}n^kE_{n-1}\left(f^{(r-k)}\right)}{\left\{\int\limits_0^h\Omega_m^p\left(f^{(r)},t\right)\varphi(t)dt\right\}^{1/p}}=$$

$$=\left\{\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \qquad (2.10)$$

Доказательство. Очевидно, что если функция $f\in L_2^{(r)}$, то ее производные $f^{(r-k)}\in L_2$, $k=1,2,\ldots,r-1$. При доказательстве соотношения (2.10) воспользуемся схемой рассуждений, приведенной в [17]. Из (2.3) для произвольной $f\in L_2$ при $r=0$ имеем

$$E_{n-1}(f)\leq\frac{1}{2^{m/2}}\left\{\frac{\int\limits_0^h\Omega_m^p\left(f,t\right)\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2}\varphi(t)dt}\right\}^{1/p}. \qquad (2.11)$$

Заметив, что, согласно определению класса $L_2^{(r)}$, производная $f^{(r)}\in L_2$, потому и заменяя в (2.11) f на $f^{(r)}$, получаем

$$E_{n-1}\left(f^{(r)}\right)\leq\frac{1}{2^{m/2}}\left\{\frac{\int\limits_0^h\Omega_m^p\left(f^{(r)},t\right)\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2}\varphi(t)dt}\right\}^{1/p}. \qquad (2.12)$$

С другой стороны, из того же равенства (2.3) для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$ вытекает соотношение

$$E_{n-1}(f)\leq\frac{1}{2^{m/2}n^r}\left\{\frac{\int\limits_0^h\Omega_m^p\left(f^{(r)},t\right)\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2}\varphi(t)dt}\right\}^{1/p}. \qquad (2.13)$$

Известно [18, с. 122], что между наилучшими полиномиальными приближениями последовательных производных $f^{(r-k)}(k=0,1,\ldots r)$ произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$

имеет место неравенство типа Колмогорова

$$E_{n-1}\left(f^{(r-k)}\right) \le \left(E_{n-1}\left(f^{(r)}\right)\right)^{1-k/r} \cdot \left(E_{n-1}(f)\right)^{k/r}. \tag{2.14}$$

Воспользуясь неравенствами (2.12) и (2.13) из (2.14) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, получаем

$$\frac{2^{m/2} n^k E_{n-1}\left(f^{(r-k)}\right)}{\left\{\int\limits_0^h \Omega_m^p\left(f^{(r)}, t\right)\varphi(t)dt\right\}^{1/p}} \le \left\{\int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2} \varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \tag{2.15}$$

Для функции $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$, для которой легко вычислить, что

$$E_{n-1}\left(f_0^{(r-k)}\right) = n^{r-k},\ \Omega_m\left(f_0^{(r)}, t\right) = 2^{m/2} n^r \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{m/2},\ 0 < t \le \pi/n,$$

мы имеем:

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \ne const}} \frac{2^{m/2} n^k E_{n-1}\left(f^{(r-k)}\right)}{\left\{\int\limits_0^h \Omega_m^p\left(f^{(r)}, t\right)\varphi(t)dt\right\}^{1/p}} \ge$$

$$\ge \frac{2^{m/2} n^k E_{n-1}\left(f_0^{(r-k)}\right)}{\left\{\int\limits_0^h \Omega_m^p\left(f_0^{(r)}, t\right)\varphi(t)dt\right\}^{1/p}} = \left\{\int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2} \varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \tag{2.16}$$

Требуемое равенство (2.10) получаем из сравнения соотношения (2.15) и (2.16), чем и завершаем доказательство теоремы 2.2. Заметим, что теорема 2.1 вытекает из теоремы 2.2 при $k = r,\ f^{(0)} \equiv f$. Далее, для $m, n \in \mathbb{N},\ \ p = 2/m,\ \ r \in \mathbb{Z}_+,\ \ \varphi(t) \equiv 1$ из (2.10) следует, что

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \ne const}} \frac{2^{m/2} n^{k-1/p} E_{n-1}\left(f^{(r-k)}\right)}{\left\{\int\limits_0^h \Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, t\right)dt\right\}^{m/2}} = \frac{1}{(nh - Si(nh))^{m/2}} \tag{2.17}$$

а для $m, n \in \mathbb{N},\ \ p = 2/m,\ \ r \in \mathbb{Z}_+,\ \ \varphi(t) = t,\ \ 0 \le t \le h,\ \ 0 \le h \le \pi/n$ получаем

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \ne const}} \frac{2^{m/2} n^{k-1/p} E_{n-1}\left(f^{(r-k)}\right)}{\left\{\int\limits_0^h t\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, t\right)dt\right\}^{m/2}} = \frac{1}{\left\{\left(\frac{nh}{2}\right)^2 - \sin^2\left(\frac{nh}{2}\right)\right\}^{m/2}}. \tag{2.18}$$

Равенства (2.8) и (2.9) соответственно вытекают из соотношений (2.17) и (2.18) при $k = r$.

3. Точные значения поперечников классов периодических дифференцируемых функций

Для формулировки дальнейших результатов нам понадобятся некоторые определения и понятия.

Пусть S – единичный шар в L_2; $\mathfrak{N}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2; $\Lambda_n \subset L_2$ – n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n; $\mathcal{L} : L_2 \to \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства L_2 в Λ_n; $\mathcal{L}^{\perp} : L_2 \to \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования пространства L_2 на подпространства Λ_n.

Величины

$$b_n(\mathfrak{N}, L_2) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{N}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{N}, L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\|_2 :\ f \in \mathfrak{N} \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset L_2\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{N}, L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - g\|_2 :\ g \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{N}\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{N}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathcal{L}f\|_2 :\ f \in \mathfrak{N}\right\} :\ \mathcal{L}L_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$\pi_n(\mathfrak{N}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathcal{L}^{\perp}f\|_2 :\ f \in \mathfrak{N}\right\} : \mathcal{L}^{\perp}L_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\}$$

называют соответственно бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным и проекционным n-поперечниками.

Указанные n-поперечники связаны соотношениями [19], [20]:

$$b_n(\mathfrak{N}, L_2) \le d^n(\mathfrak{N}, L_2) \le d_n(\mathfrak{N}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{N}, L_2) = \pi_n(\mathfrak{N}, L_2). \tag{3.1}$$

Полагаем также

$$E_{n-1}(\mathfrak{N}) := \sup\left\{E_{n-1}(f) :\ f \in \mathfrak{N}\right\}.$$

Пусть $\Phi(t)$, $t \ge 0$ – произвольная непрерывная возрастающая функция, такая, что $\Phi(0) = 0$. Через $W_p^{(r)}(\Omega_m, \Phi)$, $m, r \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любых $h \in \mathbb{R}_+$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^p\left(f^{(r)}, t\right) dt \le \Phi^p(h).$$

Через $\widetilde{W}_p^{(r)}(\Omega_m; \Phi)$ обозначим аналогичный класс функций $f \in L_2^{(r)}$, при любых $h \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h t\Omega_m^p\left(f^{(r)}, t\right) dt \le \Phi^p(h).$$

Обозначим через t_* величину аргумента, при котором функция $(\sin t/t)$ на $\mathbb{R}_+$ принимает свое наименьшее значение. При этом t_* – минимальный положительный корень уравнения $t = \operatorname{tg} t$ $(4,49 < t_* < 4,51)$. Полагаем

$$\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_* := \left\{1 - \frac{\sin t}{t},\ \text{если } 0 < t \le t_*;\ 1 - \frac{\sin t_*}{t_*},\ \text{если } t_* \le t < \infty\right\}. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r \le p \le 2$ *и функция* Φ *при любых* $h \in \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)}\right)^p \ge \frac{\pi}{nh} \frac{\int\limits_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2} dt}{\int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt}. \tag{3.3}$$

Тогда справедливы равенства

$$\gamma_{2n}\left(W_p^{(r)}(\Omega_m, \Phi); L_2\right) = \gamma_{2n-1}\left(W_p^{(r)}(\Omega_m, \Phi); L_2\right) = E_{n-1}\left(W_p^{(r)}(\Omega_m, \Phi)\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{m/2}} \left\{\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt\right\}^{-1/p} n^{-r}\Phi(\pi/n),$$

где $\gamma_n(\cdot)$ *– любой из приведенных выше* n*-поперечников. При этом множество мажорант, удовлетворяющих условию (3.3), не пусто. Этому условию удовлетворяет, например, функция*

$$\Phi_*(t) := t^{\alpha/p}, \quad \alpha := \pi \cdot \left\{\int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt\right\}^{-1} - 1.$$

Из элементарного неравенства

$$1 - \frac{t}{\pi} < \frac{\sin t}{t} < 1 - \left(\frac{t}{\pi}\right)^2, \ 0 \le t \le \pi, \tag{3.4}$$

сразу получаем границы значений $\alpha :$ $mp/2 < \alpha \le mp$.

Теорема 3.2. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r \le p \le 2$ *и функция* Φ *при любых* $h \in \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)}\right)^p \ge \left(\frac{\pi}{nh}\right)^2 \frac{\int\limits_0^{nh} t\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2} dt}{\int\limits_0^{\pi} t\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt}. \tag{3.5}$$

Тогда справедливы равенства

$$\gamma_{2n-1}\left(\widetilde{W}_p^{(r)}(\Omega_m, \Phi); L_2\right) = \gamma_{2n}\left(\widetilde{W}_p^{(r)}(\Omega_m, \Phi); L_2\right) = E_{n-1}\left(\widetilde{W}_p^{(r)}(\Omega_m, \Phi)\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{m/2}} \left\{\frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^{\pi} t\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt\right\}^{-1/p} n^{-r}\Phi(\pi/n), \tag{3.6}$$

где $\gamma_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n-поперечников. Множество мажорант Φ, для которых выполняется условие (3.5), не пусто.

Отметим, что доказательство теорем 3.1 и 3.2 проводится по одной и той же схеме рассуждений, а потому, не умаляя общности, приводим

Доказательство теоремы 3.2. Полагая в неравенстве (2.13) $h = \pi/n, \quad \varphi(t) \equiv t$, для произвольной $f \in L_2^{(r)}$ запишем

$$E_{n-1}(f) \le \frac{1}{2^{m/2}n^r}\left\{\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi} t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p} \times$$

$$\times\left\{\frac{n^2}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/n} t\Omega_m^p\left(f^{(r)},t\right)dt\right\}^{1/p}. \tag{3.7}$$

Из (3.7), учитывая определение класса $\widetilde{W}_p^{(r)}(\Omega_m,\Phi)$ и соотношения (3.1), получаем оценку сверху для проекционного n-поперечника

$$\gamma_{2n}\left(\widetilde{W}_p^{(r)}(\Omega_m,\Phi);L_2\right) \le \gamma_{2n-1}\left(\widetilde{W}_p^{(r)}(\Omega_m,\Phi);L_2\right) \le$$

$$\le d_{2n-1}\left(\widetilde{W}_p^{(r)}(\Omega_m,\Phi);L_2\right) \le E_{n-1}\left(\widetilde{W}_p^{(r)}(\Omega_m,\Phi)\right) \le$$

$$\le \frac{1}{2^{m/2}}\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi} t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right)^{-1/p} n^{-r}\Phi(\pi/n). \tag{3.8}$$

Для получения оценки снизу рассматриваемых n-поперечников вводим в рассмотрение шар

$$S_{2n+1} \overset{def}{=} \left\{T_n \in \mathcal{F}_{2n+1} : \|T_n\| \le \frac{1}{2^{m/2}}\left[\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi} t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right]^{-1/p} n^{-r}\Phi(\pi/n)\right\}$$

и покажем, что $S_{2n+1} \subset \widetilde{W}_p^{(r)}(\Omega_m,\Phi)$. Воспользуемся неравенством [10]

$$\Omega_m^p\left(T_n^{(r)},t\right) \le 2^{mp/2}n^{rp}\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)_*^{mp/2}\|T_n\|^p. \tag{3.9}$$

Теперь для произвольного полинома $T_n \in S_{2n+1}$ с учетом неравенства (3.9) и условия (3.5) для любого $h \in \mathbb{R}_+$ получаем

$$\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h t\Omega_m^p\left(T_n^{(r)},t\right)dt \le 2^{mp/2}\cdot n^{rp}\|T_n\|^p\cdot\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h t\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)_*^{mp/2}dt \le$$

$$\le \left\{\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi} t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1}\Phi^p(\pi/n)\cdot\frac{1}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh} t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2}dt \le \Phi^p(h),$$

а это и значит, что $S_{2n+1} \subset \widetilde{W}_p^{(r)}(\Omega_m, \Phi)$. Отсюда, используя определение бернштейновского n-поперечника и учитывая (3.1), имеем

$$\gamma_{2n}\left(\widetilde{W}_p^{(r)}(\Omega_m, \Phi); L_2\right) \geq b_{2n}\left(\widetilde{W}_p^{(r)}(\Omega_m, \Phi); L_2\right) \geq b_{2n}(S_{2n+1}; L_2) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2^{m/2}}\left\{\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi} t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt\right\}^{-1/p} n^{-r}\Phi(\pi/n). \tag{3.10}$$

Равенство (3.6) получаем из сопоставления оценки сверху (3.8) и оценки снизу (3.10) вышеперечисленных n–поперечников.

Покажем, что функция $\Phi_0(t) = t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha := \frac{\pi^2}{\int\limits_0^{\pi} t\left(1-\dfrac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt} - 2, \tag{3.11}$$

удовлетворяет условию (3.5). Легко заметить, что число α удовлетворяет неравенства

$$mp/2 < \alpha < mp. \tag{3.12}$$

В самом деле, воспользуясь левой частью неравенства (3.4), имеем

$$\alpha > \frac{\pi^2}{\int\limits_0^{\pi} t\left(\dfrac{t}{\pi}\right)^{mp/2} dt} - 2 = mp/2.$$

Если же воспользоваться правой частью неравенства (3.4), то получаем

$$\alpha < \frac{\pi^2}{\int\limits_0^{\pi} t\left(\dfrac{t}{\pi}\right)^{mp} dt} - 2 = mp.$$

Подставляя функцию Φ_0 в соотношение (3.5), приходим к следующему неравенству:

$$\left(\frac{nh}{\pi}\right)^{\alpha+2} \geq \frac{\int\limits_0^{nh} t\left(1-\dfrac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2} dt}{\int\limits_0^{\pi} t\left(1-\dfrac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt}. \tag{3.13}$$

Полагая в (3.13) $u \stackrel{def}{=} nh$, где $u \in [0, \infty)$, имеем

$$u^{\alpha+2} \geq \frac{\pi^{\alpha+2} \int\limits_0^u t \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2} dt}{\int\limits_0^\pi t \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt}. \tag{3.14}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\psi(u) = u^{\alpha+2} - \frac{\pi^{\alpha+2} \int\limits_0^u t \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2} dt}{\int\limits_0^\pi t \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt},$$

которую с учетом равенства (3.11) запишем в виде

$$\psi(u) = u^{\alpha+2} - \pi^\alpha(\alpha+2) \int\limits_0^u t \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2} dt. \tag{3.15}$$

Очевидно, для доказательства (3.14) нам достаточно показать, что при всех $u \in [0, \infty)$ функция $\psi(u) \geq 0$. Будем отдельно рассматривать три случая:
а) $0 \leq u \leq \pi$; б) $\pi \leq u < t_*$; в) $t_* \leq u < \infty$.

Пусть сначала $0 \leq u \leq \pi$. В этом случае, используя неравенство $1 - \dfrac{\sin t}{t} \leq \dfrac{t^2}{6}$, $0 \leq t \leq \pi$, из (3.15) получаем

$$\psi(u) \geq u^{\alpha+2} \left(1 - \frac{\pi^\alpha(\alpha+2)u^{mp-\alpha}}{(mp+1)(\sqrt{6})^{mp}}\right). \tag{3.16}$$

Из неравенств (3.12) и (3.16) сразу следует, что при $u \to 0+$ функция $\psi(u)$ принимает положительные значения и стремится к нулю. Покажем, что на интервале $(0, \pi)$ функция ψ сохраняет знак. Предположим, что это не так. Тогда существует $\xi \in [0, \pi]$, при переходе аргумента u через которую функция ψ меняет знак. Так как $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$, то в силу хорошо известной теоремы Ролля производная первого порядка

$$\psi^{'}(u) = \pi^\alpha(\alpha+2)u \left\{ \left(\frac{u}{\pi}\right)^\alpha - \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} \right\} := \pi^\alpha(\alpha+2)u\psi_*(u)$$

должна иметь на $(0, \pi)$ не менее двух различных нулей. Функция $\psi_*(u) = \left(\dfrac{u}{\pi}\right)^\alpha - \left(1 - \dfrac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}$ подробно исследована в работе [17]. Там же показано, что эта функция в случаях а) и б) не меняет знак, и так как функция $\pi^\alpha(\alpha+2)u$ в этих случаях монотонно возрастает и положительная, то функция $\psi'(u)$ в указанных случаях сохраняет знак, и неравенство (3.14) для этих случаев выполняется.

Приступая к рассмотрению случая в), функцию $\psi(u)$ с учетом определения функции (3.2) представим в виде

$$\psi(u) = u^{\alpha+2} - \pi^{\alpha+2} -$$

$$-\pi^{\alpha}(\alpha+2)\left\{\int_{\pi}^{t_*} t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} + t_*\left(1-\frac{\sin t_*}{t_*}\right)^{mp/2}(u-t_*)\right\}. \tag{3.17}$$

Из (3.17) сразу получаем

$$\psi'(u) = \pi^{\alpha}(\alpha+2)\left\{\frac{u}{t_*}\left(\frac{u}{\pi}\right)^{\alpha} - \left(1-\frac{\sin t_*}{t_*}\right)^{mp/2}\right\}. \tag{3.18}$$

По условию $\alpha > mp/2$, а потому

$$\psi'(t_*) = \pi^{\alpha}(\alpha+2)\left\{\left(\frac{t_*}{\pi}\right)^{\alpha} - \left(1-\frac{\sin t_*}{t_*}\right)^{mp/2}\right\} > 0. \tag{3.19}$$

Из (3.18) и (3.19) следует, что производная $\psi'(u)$ на множество значений $t_* \le u < \infty$ является положительной, монотонно возрастающей функцией, и так как $\psi(t_*) \ge 0$, то функция ψ неотрицательна на указанном множестве и неравенство (3.14) имеет место.

Список литературы

1. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Математические заметки. 1967. Т. 2, №5. С. 513–522. (English transl.: Chernykh N.I. Best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials in L_2 // Mathtmatical notes. 1967. V. 2, №5. P. 803–808.)

2. Бердышев В.И. О теореме Джексона в L_p // Труды МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 3–16. (Berdyshev V.I. O teoreme Dzheksona v L_p // Trudy MIAN SSSR. 1967. T. 88. S. 3–16. [in Russian].)

3. Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Математические заметки. 1976. Т. 20, №3. С. 433–438. (English transl.: Taikov L.V. Inequalities containing best approximations and the modulus of continuity of functions in L_2 // Mathematical notes. 1976. V. 20, №3. P. 797–800.)

4. Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Математические заметки. 1978. Т. 24, №6. С. 785–792. (English transl.: Ligun A.A. Some inequalities between best approximations and moduli of continuity in an L_2 space // Mathematical notes. 1978. V. 24, №6. P. 917–921.)

5. Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. Тула: ТулГУ, 1995. 192 с. (Ivanov V.I., Smirnov O.I. Konstanty Dzheksona i konstanty Yunga v prostranstvakh L_p. Tula: TulGU, 1995. 192 s. [in Russian].)

6. Вакарчук С.Б. Неравенство типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Математические заметки. 2006. Т. 80. №1. С. 11–18. (English transl.: Vakarchuk S.B. Jackson-type inequalities and widths of function classes in L_2 // Mathematical notes. 2006. V. 80, №1–2. P. 11–18.)

7. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Математические заметки. 2010. Т. 87, №4. С. 616–623. (English transl.: Shabozov M.Sh. Widths of classes of periodic differentiable functions in the space $L_2[0, 2\pi]$ // Mathematical notes. 2010. V. 87, №3–4. P. 575–581.)

8. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Математические заметки. 2011. Т. 90, №5. С. 764–775. (English transl.: Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Best polynomial approximations in L_2 of classes of 2π-periodic functions and exact values of their widths // Mathematical notes. 2011. V. 90, №5–6. P. 748–757.)

9. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematica. 2012. V. 38. P. 147–159.

10. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Математические заметки. 2005. Т. 78, №5. С. 792–796. (English transl.: Vakarchuk S.B. Exact Constants in Jackson-type Inequalities and Exact Values of Widths // Mathematical notes. 2005. V. 78, №5–6. P. 735–739.)

11. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точные неравенства типа Джексона для 2π-периодических функций в пространстве L_2 и поперечники некоторых функциональных классов // ДАН респ. Тадж. 2011. Т. 54, №1. С. 5–12. (Shabozov M.Sh., Vakarchuk S.B., Zabutnaya V.I. Tochnye neravenstva tipa Dzheksona dlya 2π-periodicheskikh funktsiy v prostranstve L_2 i poperechniki nekotorykh funktsional'nykh klassov // DAN resp. Tadzh. 2011. T. 54, №1. S. 5–12. [in Russian].)

12. Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Математический сборник. 1975. Т. 98. №140. С. 395–415. (Storozhenko E.A., Krotov V.G., Osval'd P. Pryamye i obratnye teoremy tipa Dzheksona v prostranstvakh $L_p, 0 < p < 1$ // Matematicheskiy sbornik. 1975. T. 98, №140. S. 395–415. [in Russian].)

13. Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Математический сборник. 1994. Т. 185, №8. С. 81–102. (Runovskiy K.V. O priblizhenii semeystvami lineynykh polinomial'nykh operatorov v prostranstvakh $L_p, 0 < p < 1$ // Matematicheskiy sbornik. 1994. T. 185, №8. S. 81–102. [in Russian].)

14. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Математические заметки. 2004. Т. 76, №6. С. 803–811. (English transl.: Abilov V.A., Abilova F.V. Problems in the Approximation of 2π-Periodic Functions by Fourier Sums in the Space $L_2(2\pi)$ // Mathematical notes. 2004. V. 76, №5–6. P. 749–757.)

15. Шабозов М.Ш. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения n-поперечников некоторых классов функций из L_2 // Известия АН Респ. Таджикистан, отд. физ-мат., хим., геол. и техн. наук. 2010. №4(141). С. 7–24. (Shabozov M.Sh. Tochnye konstanty v neravenstvakh tipa Dzheksona i tochnye znacheniya n-poperechnikov nekotorykh klassov funktsiy iz L_2 // Izv. AN Resp. Tadzhikistan, otd. fiz-mat., khim., geol. i tekhn. nauk. 2010. №4(141). S. 7–24. [in Russian].)

16. Шабозов М.Ш. Юсупов Г.А. Точные константы в неравенстве типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сибирский матем. журн. 2011. Т. 52, №6. С. 936–948. (Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Tochnye konstanty v neravenstve tipa Dzheksona i tochnye znacheniya poperechnikov nekotorykh klassov funktsiy v L_2 // Sibirskiy matem. zhurn. 2011. T.52, №6. S. 936–948. [in Russian].)

17. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точное неравенство типа Джексона – Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Математические заметки. 2012. Т. 92, №4. С. 497–514. (English transl.: Vakarchuk S.B., Zabutnaya V.I. Jackson-Stechkin type inequalities for special moduli of continuity and widths of function classes in the space L_2 // Mathematical notes. 2012, V. 92, №3–4. P. 458–472.)

18. Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г. Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка, 1982. 252 с. (Korneychuk N.P., Ligun A.A., Doronin V.G. Approksimatsiya s ogranicheniyami. Kiev: Naukova dumka, 1982. 252 s. [in Russian].)

19. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976. 325 с. (Tikhomirov V.M. Nekotorye voprosy teorii priblizheniy. M.: MGU, 1976. 325 s. [in Russian].)

20. Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. Berlin: Springer-Verlag, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985. 292 p.

The Exact Inequalities of Jackson–Stechkin Type and the Width Values for Some Classes of Functions in L_2 Space

Langarshoev M. R.

Tajik State National University,
Rudaki, 17, Dushanbe, 734035, Tajikistan

Keywords: best approximation, generalized modulus of continuity, extremal characteristics, n-widths.

In this paper, some exact inequalities between the best approximations of periodic differentiable functions with trigonometric polynomials and generalized moduli of the continuity Ω_m of m-th order in $L_2[0, 2\pi]$ space are found. Similar averaged characteristics of function smoothness in studying the important problems in the constructive theory of functions were considered by K.V. Runovskiy, E.A. Strogenko, V.G. Krotov, P. Osvald and many others. For some classes of functions defined by indicated moduli of continuity where the r-th derivatives are bounded by functions which satisfy certain constraints were obtained the exact values of Bernstein, Gelfand, Kolmogorov, linear and projection n-widths. Here is given an example of a majorant for which all the stated claims are fulfilled.

Сведения об авторе: Лангаршоев Мухтор Рамазонович,
Таджикский национальный университет,
кандидат физико-математических наук, доцент