

# On Computational Constructions in Function Spaces

A. N. Morozov<sup>1</sup>

DOI: [10.18255/1818-1015-2023-1-28-38](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2023-1-28-38)

<sup>1</sup>P. G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia.

MSC2020: 41A35, 41A45, 65D25

Research article

Full text in Russian

Received February 6, 2023

After revision February 27, 2023

Accepted March 1, 2023

Numerical study of various processes leads to the need for clarification (extensions) of the limits of applicability of computational constructs and modeling tools. In this article, we study the differentiability in the space of Lebesgue integrable functions and the consistency of this concept with fundamental computational constructions such as Taylor expansion and finite differences is considered. The function  $f$  from  $L_1[a; b]$  is called  $(k, L)$ -differentiable at the point  $x_0$  from  $(a; b)$ , if there exists an algebraic polynomial  $P$ , of degree no higher than  $k$ , such that the integral over the segment from  $x_0$  then  $x_0 + h$  for  $f - P$  there is  $o(h^{k+1})$ . Formulas are found for calculating coefficients of such  $P$ , representing the limit of the ratio of integral modifications of finite differences  $\Delta_h^m(f, x)$  to  $h^m$ ,  $m = 1, \dots, k$ . It turns out that if  $f \in W_1^l[a; b]$ , and  $f^{(l)}$  is  $(k, L)$ -differentiable at the point  $x_0$ , then  $f$  is approximated by a Taylor polynomial up to  $o((x-x_0)^{l+k})$ , and the expansion coefficients can be found in the above way. To study functions from  $L_1$  on a set, a discrete "global" construction of a difference expression is used: based on the quotient  $\Delta_h^m(f, \cdot)$  and  $h^m$  the sequence is built  $\{\Lambda_n^m[f]\}$  of piecewise constant functions subordinate to partitions half-interval  $[a; b]$  into  $n$  equal parts. It is shown that for a  $(k, L)$ -differentiable at the point  $x_0$  function  $f$  the sequence  $\{\Lambda_n^m[f]\}$ ,  $m = 1, \dots, k$ , converge as  $n \rightarrow \infty$  at this point to the coefficients of the polynomial approximating the function at it. Using  $\{\Lambda_n^k[f]\}$  the following theorem is established: " $f$  from  $L_1[a; b]$  belongs to  $C^k[a; b] \iff f$  is uniformly  $(k, L)$ -differentiable on  $[a; b]$ ". A special place is occupied by the study of constructions corresponding to the case  $m=0$ . We consider them in  $L_1[Q_0]$ , where  $Q_0$  is a cube in the space  $\mathbb{R}^d$ . Given a function  $f \in L_1$  and a partition  $\tau_n$  of a semi-closed cube  $Q_0$  on  $n^d$  equal semi-closed cubes we construct a piecewise constant function  $\Theta_n[f]$ , defined as the integral average  $f$  on each cube  $Q \in \tau_n$ . This computational construction leads to the following theoretical facts: 1)  $f$  from  $L_1$  belongs to  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $\iff \{\Theta_n[f]\}$  converges in  $L_p$ ; the boundedness of  $\{\Theta_n[f]\} \iff f \in L_\infty$ ; 2) sequences  $\{\Theta_n[\cdot]\}$  define on the equivalence classes the operator-projector  $\Theta$  in the space  $L_1$ ; 3) for the function  $f \in L_\infty$  we get  $\Theta[f] \in B$ , where  $B$  is the space of bounded functions, and  $\Theta[f]$  is the function  $\Theta[f](x)$ , extended on a set of measure zero and the equality  $\|\Theta[f]\|_B = \|f\|_\infty$ . Thus, in the family of spaces  $L_p$  one can replace  $L_\infty[Q_0]$  with  $B[Q_0]$ .

**Keywords:** Difference Expressions; Integral Averaging; Continuity Operator; the Taylor Polynomial; Numerical Finding of Derivatives on a Computer

## INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anatoly Nikolaevich Morozov | [orcid.org/0000-0001-9940-159X](https://orcid.org/0000-0001-9940-159X). E-mail: [moroz@uniyar.ac.ru](mailto:moroz@uniyar.ac.ru)  
correspondence author | PhD.

**Funding:** The work was carried out within the framework of the initiative research work of the YarGU. P. G. Demidov No. VIP-016.

**For citation:** A. N. Morozov, "On Computational Constructions in Function Spaces", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 30, no. 1, pp. 28-38, 2023.

## О вычислительных конструкциях в функциональных пространствах

А. Н. Морозов<sup>1</sup>DOI: [10.18255/1818-1015-2023-1-28-38](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2023-1-28-38)<sup>1</sup>Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, д. 14, г. Ярославль, 150003 Россия.

УДК 519.65

Научная статья

Полный текст на русском языке

Получена 6 февраля 2023 г.

После доработки 27 февраля 2023 г.

Принята к публикации 1 марта 2023 г.

Численное исследование различных процессов приводит к необходимости уточнения (расширения) границ применимости вычислительных конструкций и инструментов моделирования. В настоящей статье изучается дифференцируемость в пространстве интегрируемых по Лебегу функций и рассматривается согласованность этого понятия с основополагающими вычислительными построениями такими, как разложение Тейлора и конечные разности. Функцию  $f$  из  $L_1[a; b]$  назовём  $(k, L)$ -дифференцируемой в точке  $x_0$  из  $(a; b)$ , если существует алгебраический многочлен  $P$ , степени не выше  $k$ , такой, что интеграл по отрезку от  $x_0$  до  $x_0 + h$  для  $f - P$  есть  $o(h^{k+1})$ .

Найдены формулы для вычисления коэффициентов такого  $P$ , представляющие собой предел отношения интегральных модификаций конечных разностей  $\Delta_h^m(f, x)$  к  $h^m$ ,  $m = 1, \dots, k$ . Получается, что если  $f \in W_1^l[a; b]$ , и  $f^{(l)}$  является  $(k, L)$ -дифференцируемой в точке  $x_0$ , то  $f$  приближается тейлоровским многочленом с точностью  $o((x - x_0)^{l+k})$ , а коэффициенты разложения могут быть найдены указанным выше способом. Для исследования функций из  $L_1$  на множестве применяется дискретная «глобальная» конструкция разностного выражения: на основе частного  $\Delta_h^m(f, \cdot)$  и  $h^m$  строится последовательность  $\{\Lambda_n^m[f]\}$  кусочно-постоянных функций, подчинённых разбиениям полуинтервала  $[a; b]$  на  $n$  равных частей. Показано, что для  $(k, L)$ -дифференцируемой в точке  $x_0$  функции  $f$  последовательности  $\{\Lambda_n^m[f]\}$ ,  $m = 1, \dots, k$ , сходятся при  $n \rightarrow \infty$  в этой точке к коэффициентам приближающего в ней функцию многочлена. С помощью  $\{\Lambda_n^k[f]\}$  устанавливается теорема: « $f$  из  $L_1[a; b]$  принадлежит  $C^k[a; b] \iff f$  равномерно  $(k, L)$ -дифференцируема на  $[a; b]$ ». Отдельное место занимает изучение построений, соответствующих случаю  $m = 0$ . Их рассматриваем в  $L_1[Q_0]$ , где  $Q_0$  – куб в пространстве  $\mathbb{R}^d$ . По заданной функции  $f \in L_1$  и разбиению  $\tau_n$  полузамкнутого куба  $Q_0$  на  $n^d$  равных полузамкнутых кубов построим кусочно-постоянную функцию  $\Theta_n[f]$ , определяемую как интегральное среднее  $f$  на каждом кубе  $Q \in \tau_n$ . Данная вычислительная конструкция приводит к следующим теоретическим фактам: 1)  $f$  из  $L_1$  принадлежит  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $\iff \{\Theta_n[f]\}$  сходится в  $L_p$ ; ограниченность  $\{\Theta_n[f]\} \iff f \in L_\infty$ ; 2) последовательности  $\{\Theta_n[\cdot]\}$  определяют на классах эквивалентности оператор-проектор  $\Theta$  в пространстве  $L_1$ ; 3) для функции  $f \in L_\infty$  получаем  $\overline{\Theta[f]} \in B$ , где  $B$  – это пространство ограниченных функций, а  $\overline{\Theta[f]}$  – доопределённая на множестве меры ноль функция  $\Theta[f](x)$ , и выполняется равенство  $\|\overline{\Theta[f]}\|_B = \|f\|_\infty$ . Таким образом, в семействе пространств  $L_p$  можно заменить  $L_\infty[Q_0]$  на  $B[Q_0]$ .

**Ключевые слова:** разностные выражения; интегральные усреднения; оператор непрерывности; многочлен Тейлора; численное нахождение производных

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Анатолий Николаевич Морозов  
автор для корреспонденции

[orcid.org/0000-0001-9940-159X](https://orcid.org/0000-0001-9940-159X). E-mail: [moroz@uniyar.ac.ru](mailto:moroz@uniyar.ac.ru)  
канд. физ.-мат. наук, доцент.

**Финансирование:** Работа выполнена в рамках инициативной НИР ЯрГУ им. П. Г. Демидова № VIP-016.

**Для цитирования:** A. N. Morozov, “On Computational Constructions in Function Spaces”, *Modeling and analysis of information systems*, vol. 30, no. 1, pp. 28–38, 2023.

## О вычислительных свойствах $(k, L)$ -дифференцируемости

Как обычно,  $L_p[I]$  обозначает пространство действительных измеримых функций, интегрируемых в степени  $p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) по Лебегу на отрезке  $I = [a; b]$ ,

$$\|f\|_{L_p[I]} = \left( \int_I |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}};$$

при  $p = \infty$  в этой части рассматривается  $B[I]$  – пространство измеримых ограниченных на отрезке  $I$  функций, –

$$\|f\|_{B[I]} = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Введём для краткости записи семейство пространств

$$X_p[I] = \begin{cases} L_p[I] & \text{при } p < \infty, \\ B[I] & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Когда неясность исключена, сокращаем обозначения до  $X_p$  и  $\|f\|_p$ . Длину  $I$  обозначаем  $|I|$ .

Также используются  $C^k = C^k[I]$  – пространство  $k$  раз непрерывно дифференцируемых на отрезке  $I$  функций – и ( $1 \leq p < \infty$ )

$$W_p^k = W_p^k[I] = \left\{ f : f^{(k-1)} \text{ абсолютно непрерывна на отрезке } I, f^{(k)} \in L_p[I] \right\}$$

с нормами  $\|f\|_p + \|f^{(k)}\|_p$ .

Численное исследование различных процессов приводит к необходимости уточнения (расширения) границ применимости вычислительных конструкций и инструментов моделирования. Эффективность такого подхода была продемонстрирована, например, в работе А. П. Кальдерона и А. Зигмунда ([1]), где были даны приложения обобщённого локального понятия производной к изучению локальных свойств решений дифференциальных уравнений ( $1 \leq p \leq \infty$ ). В одномерном случае их формулировка приводит к следующему определению.

**Определение 1.** Функция  $f \in X_p[I]$  называется  $(k, p)$ -дифференцируемой в точке  $x_0 \in I$ , если существует алгебраический многочлен  $P$  степени не больше  $k$ , для которого выполняется

$$\|f - P\|_{X_p[J_{x_0, h}]} = o(h^{k+\frac{1}{p}}) \text{ при } h \rightarrow 0, \text{ где } J_{x_0, h} = [x_0 - h; x_0 + h] \cap I.$$

Легко убедиться, что такой многочлен может быть только один, его часто называют тейлоровским. При  $k=1$ ,  $p=\infty$  данное определение совпадает с классическим определением дифференцируемости. В статье автора [2] показано, что для  $k=1$ ,  $p=1$  определение остаётся содержательным, если уменьшить требования к взаимоотношению функции и приближающего её многочлена. Для произвольного  $k \in \mathbb{N}$  формулировка приобретает следующий вид.

**Определение 2.** Функцию  $f \in L_1[I]$  назовём  $(k, L)$ -дифференцируемой в точке  $x_0 \in I$ , если существует алгебраический многочлен  $P$  степени не больше  $k$ , для которого выполняется

$$\int_{J_{x_0, h}} (f - P)(x) dx = o(h^{k+1}) \text{ при } h \rightarrow 0, \text{ где } J_{x_0, h} = [x_0 - h; x_0 + h] \cap I.$$

Покажем единственность многочлена из Определения 2. Его удобно записать в виде  $P(x) = c_0 + c_1 \cdot (x - x_0) + \dots + c_k \cdot (x - x_0)^k$ .

Рассмотрим для  $h > 0$  и  $x \in [a; b - h]$  «одностороннюю» функцию Стеклова:  $S_h(f, x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$ .

Далее, для  $x \in [a; b - (k+1) \cdot h]$  положим (см. [3])

$$\Delta_h^k(f, x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \cdot S_h(f, x + jh). \quad (1)$$

Отметим, если  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , то

$$S_h(f, x) = \frac{\Delta_h^1(F, x)}{h}, \quad \text{а} \quad \Delta_h^m(f, x) = \Delta_h^m\left(\frac{1}{h} \Delta_h^1(F), x\right) = \frac{1}{h} \Delta_h^{m+1}(F, x),$$

где

$$\Delta_h^m(F, x) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} \cdot F(x+jh), \quad m \in \mathbb{N},$$

– обычная  $m$ -я разность функции  $F$  в точке  $x$ .

Для  $h < 0$  в формуле (1) рассматриваются значения  $x \in [a+(k+1) \cdot h; b]$ .

**Предложение 1.** Если  $f \in L_1[a; b]$ ,  $a < x_0 < b$  и

$$\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - c_0 - c_1 \cdot (x-x_0) - \dots - c_k \cdot (x-x_0)^k) dx = o(h^{k+1}) \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

то

$$i) \quad c_0 = \lim_{h \rightarrow 0} S_h(f, x_0);$$

$$ii) \quad c_m = \frac{1}{m!} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^m(f, x_0)}{h^m}, \quad m = 1, \dots, k.$$

При  $x_0 = a$  или  $x_0 = b$  рассматриваются соответствующие односторонние пределы.

*Доказательство.* Из условия сразу получается, что

$$\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - c_0) dx = o(h) \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

откуда следует пункт i).

Пусть  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , тогда

$$F(x) = F(x_0) + c_0 \cdot (x-x_0) + \dots + \frac{c_m}{m+1} \cdot (x-x_0)^{m+1} + o((x-x_0)^{m+1})$$

и

$$\frac{\Delta_h^m(f, x_0)}{h^m} = \frac{\Delta_h^{m+1}(F, x_0)}{h^{m+1}}, \quad m = 1, \dots, k.$$

Для конечных разностей хорошо известно соотношение (см., например, [4], с.159, или [5], с.54):

$$\Delta_h^{m+1}(u^j, x) = (m+1)! \cdot h^{m+1} \cdot \delta_{j, m+1}, \quad j = 0, 1, \dots, m+1,$$

где  $\delta_{j,i}$  – символ Кронекера. Также имеет место простая оценка: если  $g \in B[I]$ , то

$$\|\Delta_h^{m+1}(g)\|_B \stackrel{\text{def}}{=} \|\Delta_h^{m+1}(g, \cdot)\|_{B[a; b-(m+1)h]} \leq 2^{m+1} \cdot \|g\|_B.$$

Получаем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^m(f, x_0)}{h^m} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m! \cdot c_m \cdot h^{m+1} + \Delta_h^{m+1}(o((x-x_0)^{m+1}), x_0)}{h^{m+1}} = m! \cdot c_m.$$

□

**Пример 1.** Пусть  $k > 2$  и  $f_k$  для определённости – чётная функция, задаваемая при  $x \geq 0$  формулой

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{j,k}(x),$$

где

$$\chi_{j,k}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in I_{j,k} = \left[ \frac{1}{2^j} - \frac{1}{2^{kj}}; \frac{1}{2^j} \right], \\ 0, & \text{если } x \notin I_{j,k}. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{1}{2^{k-1}} \cdot |h|^k \leq \left| \int_0^h f_k(x) dx \right| \leq \frac{2^{2k}}{2^{k-1}} \cdot |h|^k \quad \text{при } |h| \leq \frac{1}{2},$$

т. е.  $f_k$  является  $(k-2, L)$ -дифференцируемой в нуле.

**Доказательство.** Достаточно для положительных  $h$  рассмотреть оценку сверху. Если число  $m \in \mathbb{N}$  таково, что  $\frac{1}{2^{m+1}} < h \leq \frac{1}{2^m}$ , то

$$\int_0^h f_k(x) dx \leq \sum_{j=m}^{\infty} \frac{1}{2^{kj}} = \frac{2^{2k}}{2^k - 1} \cdot \left( \frac{1}{2^{m+1}} \right)^k.$$

□

Из чего вытекает утверждение.

Данный пример указывает на связь  $(k, L)$ -дифференцируемости с фрактальными свойствами, следующий факт объединяет это понятие с классической теорией разложений Тейлора.

**Предложение 2.** Пусть  $f \in W_1^l[I]$  такова, что функция  $f^{(l)}$  является  $(k, L)$ -дифференцируемой в точке  $x_0 \in I$ , тогда справедливо разложение

$$f(x) = f(x_0) + a_1 \cdot (x - x_0) + \dots + a_{l+k} \cdot (x - x_0)^{l+k} + o((x - x_0)^{l+k}),$$

коэффициенты которого могут быть найдены по формулам

$$a_m = \frac{1}{m!} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^m(f, x_0)}{h^m} = \frac{1}{m!} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^m(f, x_0)}{h^m}, \quad m = 1, \dots, l + k.$$

В конечных точках отрезка  $I$  подразумеваются односторонние разложения и пределы.

**Доказательство.** По условию выполняется

$$\int_{x_0}^x (f^{(l)}(t) - c_0 - c_1 \cdot (t - x_0) - \dots - c_k \cdot (t - x_0)^k) dt = o((x - x_0)^{k+1}) \quad \text{при } x \rightarrow x_0,$$

Это равносильно тому, что

$$f^{(l-1)}(x) = f^{(l-1)}(x_0) + c_0 \cdot (x - x_0) + \dots + \frac{c_k}{k+1} \cdot (x - x_0)^{k+1} + o((x - x_0)^{k+1}).$$

Проинтегрировав данное равенство  $l-1$  раз, получим искомое разложение:

$$f(x) = f(x_0) + a_1 \cdot (x - x_0) + \dots + a_{l+k} \cdot (x - x_0)^{l+k} + o((x - x_0)^{l+k}),$$

где

$$a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}, \quad m = 1, \dots, l-1,$$

$$a_m = \frac{c_j}{(j+1) \dots (j+n)}, \quad m = j + l, \quad j = 0, \dots, k.$$

Ровно это, исходя из свойств  $\Delta_h^m(f, x_0)$ , и дают формулы для вычисления  $a_m$  в условии Предложения 2.

□

Отметим, что при  $l=1$  очевидно наличие обратного соотношения в утверждении Предложения 2: если  $f \in W_1^1[I]$  и в точке  $x_0 \in I$  справедливо разложение

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x-x_0) + \dots + a_{k+1} \cdot (x-x_0)^{k+1} + o((x-x_0)^{k+1}) \text{ при } x \rightarrow x_0,$$

то функция  $f'$  является  $(k, L)$ -дифференцируемой в точке  $x_0$ .

Для исследования дальнейших свойств  $(k, L)$ -дифференцируемых функций применим дискретную «глобальную» конструкцию разностного выражения.

По заданной функции  $f \in L_1[a; b]$  и разбиению  $\tau_n = \{[x_{i-1}; x_i]\}_{i=1}^n$  полуинтервала  $[a; b]$  на  $n$  равных полуинтервалов построим ступенчатую функцию, определяемую формулой

$$\Lambda_n^k[f](x) = \frac{\Delta_h^k(f, x_{i-1})}{h^k} \text{ при } x \in [x_{i-1}; x_i], \quad i = 1, \dots, n,$$

(заключительный справа полуинтервал замыкаем), где  $h = \frac{b-a}{n(k+1)}$  [3].

Имеем следующую модификацию Предложения 1.

**Предложение 3.** Если функция  $f$  является  $(k, L)$ -дифференцируемой в точке  $x_0 \in I$  :

$$\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - c_0 - c_1 \cdot (x-x_0) - \dots - c_k \cdot (x-x_0)^k) dx = o(h^{k+1}) \text{ при } h \rightarrow 0,$$

то в этой точке последовательности  $\{\Lambda_n^m[f]\}$  для  $m = 1, \dots, k$  сходятся при  $n \rightarrow \infty$  к значениям  $m! \cdot c_m$ .

*Доказательство.* Из  $(k, L)$ -дифференцируемости функции  $f$  в точке  $x_0$  следует её  $(m, L)$ -дифференцируемость в этой точке для  $m = 1, \dots, k$ , что запишем в виде:

$$F(x) = F(x_0) + c_0 \cdot (x-x_0) + \dots + \frac{c_m}{m+1} \cdot (x-x_0)^{m+1} + o((x-x_0)^{m+1}), \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Рассмотрим некоторое разбиение  $\tau_n$  отрезка  $[a; b]$ . Пусть полуинтервал  $J_i = [x_{i-1}; x_i]$ ,  $1 \leq i \leq n$ , /при  $i = n$  - отрезок  $[x_{n-1}; x_n]$ / из  $\tau_n$  содержит точку  $x_0$ . Подставляя

$$\frac{\Delta_h^m(f, x_{i-1})}{h^m} = \frac{\Delta_h^{m+1}(F, x_{i-1})}{h^{m+1}}, \quad i = 1, \dots, k,$$

получаем

$$\begin{aligned} \left| \Lambda_n^m[f](x_0) - m! \cdot c_m \right| &= \left| \frac{\Delta_h^{m+1} \left( \frac{c_m}{m+1} \cdot x^{m+1} + o((x-x_0)^{m+1}), x_{i-1} \right)}{h^{m+1}} - m! \cdot c_m \right| = \\ &= \left| \frac{\Delta_h^{m+1} (o((x-x_0)^{m+1}), x_{i-1})}{h^{m+1}} \right|. \end{aligned}$$

Пусть  $(m+1) \cdot u = \max\{x_0 - x_{i-1}, x_i - x_0\}$  /при этом будет выполняться  $u \leq h \leq 2u$  / , тогда (см. Предложение 1)

$$\Delta_h^{m+1} (o((x-x_0)^{m+1}), x_{i-1}) = o(u^{m+1}).$$

Поскольку условие  $n \rightarrow \infty$  влечёт  $h \rightarrow 0$ , то получаем нужное утверждение.  $\square$

Аналогичная модификация имеет место и для Предложения 2 (с таким же доказательством), причём, наряду с последовательностями  $\{\Lambda_n^m[f]\}$  в этом случае к такому же результату приводят последовательности  $\{\Lambda_n^m[f]\}$ , построенные на основе классических конечных разностей  $\Delta_h^m$ .

Отметим, что согласно теоремам 3 из [3] и 4 из [2] выполняется:

если  $f \in C^k$ , то  $\{\Lambda_n^k[f]\}$  и  $\{\Lambda_n^k[f]\}$  сходятся равномерно к  $f^{(k)}$ ;  
если  $f \in W_p^k$ , то  $\{\Lambda_n^k[f]\}$  и  $\{\Lambda_n^k[f]\}$  сходятся по норме пространства  $L_p$  к  $f^{(k)}$ .

## 1. Исследование сходимости вычислительной конструкции $\Theta_n[\cdot]$

В этой части подробнее остановимся на особенностях локального в интегральном смысле отличия заданной функции от постоянной (см. Предложение 1).

Будем рассматривать в качестве множества-носителя замкнутый куб в  $\mathbb{R}^d$

$$Q_0 = [a_1; b_1] \times \cdots \times [a_d; b_d], \text{ где } b_i - a_i = b_j - a_j, \quad i, j \in \{1, \dots, d\},$$

– с евклидовой метрикой и использовать функциональные пространства  $L_p = L_p[Q_0]$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $B = B[Q_0]$ ,  $C = C[Q_0]$ , определяемые соответственно тому, как они описаны в начале статьи, а также  $L_\infty = L_\infty[Q_0]$  – пространство измеримых существенно ограниченных на кубе функций,

$$\|f\|_{L_\infty[Q_0]} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in Q_0} |f(x)|, \text{ где } x = (x_1, \dots, x_d).$$

Для работы с подкубами удобно ввести следующие обозначения: если рёбра куба  $Q$  параллельны осям координат и имеют длину  $2r$ , точка  $x$  – его центр, то пишем также  $Q(x, r)$ ; а меру куба (аналогично любого измеримого по Лебегу множества в  $\mathbb{R}^d$ ) обозначаем как  $|Q|$ .

Пусть  $\tau_n$  – разбиение полузамкнутого куба  $Q_0 = [a_1; b_1] \times \cdots \times [a_d; b_d]$  на  $n^d$  равных полузамкнутых кубов /каждый полуинтервал  $[a_i; b_i]$ ,  $i = 1, \dots, d$ , разбивается на  $n$  одинаковых полуинтервалов/. Куб  $Q_0$  снова замкнём, а добавленные при этом точки распределим по соответствующим кубам из разбиения  $\tau_n$ . Для полученного разбиения замкнутого куба оставим то же обозначение.

По заданной функции  $f \in L_1$  и разбиению  $\tau_n$  построим кусочно-постоянную функцию, определяемую формулой:

$$\Theta_n[f](x) = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(t) dt \quad \text{при } x \in Q$$

на каждом кубе  $Q \in \tau_n$ .

Нам понадобится понятие *точки Лебега* (Lebesgue point) интегрируемой функции (см., например, [6], с. 351). Применительно к обсуждаемому случаю его удобно описать так.

**Определение 3.** Для  $f \in L_1$  точка  $x \in Q_0$  называется *точкой Лебега*, если

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|D(x, r)|} \int_{D(x, r)} |f(t) - f(x)| dt = 0, \quad \text{где } D(x, r) = Q(x, r) \cap Q_0. \quad (2)$$

В определении точки Лебега вместо кубов  $Q(x, r)$  могут быть использованы шары и множества некоторых других видов (см., [6], с. 352).

Ключевой результат, связанный с данным понятием, имеет вид (дифференциальная теорема Лебега):

$$\text{для } f \in L_1 \text{ почти все точки } x \in Q_0 \text{ удовлетворяют условию (2).}$$

В контексте данного параграфа приходим к следующим соотношениям.

**Предложение 4.** Если  $x \in Q_0$  – точка Лебега функции  $f$ , то последовательность  $\{\Theta_n[f]\}$  при  $n \rightarrow \infty$  сходится в этой точке к значению  $f(x)$ . Если для функции  $f$  условие (2) выполняется равномерно по кубу  $Q_0$ , то последовательность  $\{\Theta_n[f]\}$  сходится равномерно на  $Q_0$ ; из этого вытекает непрерывность  $f$ .

*Доказательство.* Рассмотрим первое утверждение. Для  $n \in \mathbb{N}$  построим разбиение  $\tau_n$  куба  $Q_0$  и зададим функцию  $\Theta_n[f]$ . Пусть куб  $Q_i = Q(x_i, r_n)$ ,  $1 \leq i \leq n^d$ , из разбиения  $\tau_n$  содержит точку  $x$ , в которой функция  $f$  удовлетворяет условию

$$\frac{1}{|Q(x, r)|} \int_{Q(x, r)} |f(t) - f(x)| dt \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

Тогда

$$|\Theta_n[f](x) - f(x)| = \left| \frac{1}{|Q(x_i, r_n)|} \int_{Q(x_i, r_n)} (f(t) - f(x)) dt \right| \leq \frac{1}{|Q(x_i, r_n)|} \int_{Q(x_i, r_n)} |f(t) - f(x)| dt.$$

Очевидно, что если  $x \in Q(x_i, r_n)$ , то  $Q(x_i, r_n) \subseteq Q(x, 2 \cdot r_n)$ . Поэтому

$$|\Theta_n[f](x) - f(x)| \leq \frac{1}{|Q(x, 2r_n)|} \int_{Q(x, 2r_n)} |f(t) - f(x)| dt \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Аналогичное рассуждение можно провести для граничных точек  $x$  куба  $Q_0$ .

Рассмотрим второе утверждение. При условии равномерного выполнения соотношения (2) для функции  $f$  на  $Q_0$  получаем равномерную по кубу оценку для разности  $|\Theta_n[f](x) - f(x)|$ . Из равномерной сходимости последовательности кусочно-постоянных функций  $\{\Theta_n[f]\}$ , подчинённых разбиениям куба на равные подкубы, сразу вытекает непрерывность предельной функции (см. доказательство теоремы 3 данной статьи). Сам факт непрерывности функции, для которой равномерно на  $Q_0$  выполняется (2) /в эквивалентной форме/ хорошо известен.  $\square$

Отметим, что по Предложению 4 в качестве критериев принадлежности функции  $f$  из  $L_1$  пространству  $C$  получаются: *выполнение условия (2) равномерно по кубу  $Q_0$  или равномерная сходимость последовательности  $\{\Theta_n[f]\}$  на  $Q_0$ .*

Приходим к следующему описанию пространств  $L_p$ .

**Теорема 1.** *Для того, чтобы функция  $f$  из  $L_1$  принадлежала пространству  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , необходимо и достаточно, чтобы последовательность  $\{\Theta_n[f]\}$  сходилась при  $n \rightarrow \infty$  в пространстве  $L_p$ . Равномерная ограниченность последовательности  $\{\Theta_n[f]\}$  равносильна принадлежности функции  $f$  пространству  $L_\infty$ .*

*Доказательство.* Пусть  $f \in L_1$ , и последовательность  $\{\Theta_n[f]\}$  сходится в пространстве  $L_p$ . Из дифференциальной теоремы Лебега и Предложения 4 следует, что  $\{\Theta_n[f]\} \xrightarrow{\text{п.в.}} f$  (сходимость почти всюду). Таким образом,  $f \in L_p$ .

Рассмотрим обсуждаемое утверждение в обратную сторону. Пусть  $f \in L_p$ . Для заданного  $\varepsilon > 0$  найдётся функция  $f_\varepsilon \in C$  такая, что  $\|f - f_\varepsilon\|_p < \varepsilon$ . Получим, что в неравенстве

$$\|\Theta_n[f] - f\|_p \leq \|\Theta_n[f] - \Theta_n[f_\varepsilon]\|_p + \|\Theta_n[f_\varepsilon] - f_\varepsilon\|_p + \|f - f_\varepsilon\|_p$$

первое и третье слагаемые в правой части могут быть сделаны одновременно сколь угодно малыми за счёт выбора функции  $f_\varepsilon$ , а второе слагаемое станет меньше любой требуемой величины, начиная с некоторого достаточно большого номера  $n$ . Уточним оценку первого слагаемого.

$$\begin{aligned} \|\Theta_n[f] - \Theta_n[f_\varepsilon]\|_p &= \|\Theta_n[f - f_\varepsilon]\|_p = \left( \sum_{i=1}^{n^d} \left| \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} (f - f_\varepsilon)(t) dt \right|^p |Q_i| \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^{n^d} \int_{Q_i} |f - f_\varepsilon(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|f - f_\varepsilon\|_p. \end{aligned}$$

Здесь на каждом кубе  $Q_i$  было применено интегральное неравенство Гёльдера с показателями  $\frac{p}{p-1}$  и  $p$ .

Рассмотрим второе утверждение. Ограниченность последовательности  $\{\Theta_n[f]\}$  вместе со сходимостью  $\{\Theta_n[f]\} \xrightarrow{\text{п.в.}} f$  дают  $f \in L_\infty$ . С другой стороны, ясно, что  $\|\Theta_n[f]\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ .  $\square$

На основе последовательностей  $\{\Theta_n[\cdot]\}$  в рамках пространства  $L_1$  получаем оператор:

$$\Theta[f] \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n[f].$$

Отметим простейшие свойства данного оператора:

- 1) если  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|D(x, r)|} \int_{D(x, r)} |f(t) - y| dt = 0$ , где  $D(x, r) = Q(x, r) \cap Q_0$ , то  $\Theta[f](x) = y$ ;
- 2)  $\Theta[\Theta[f]] = \Theta[f]$ ;
- 3)  $\|\Theta_n[f]\|_1 \leq \|f\|_1$ ,  $\|\Theta\| = 1$ .

Далее, для каждой непрерывной функции  $f$  выполняется  $\Theta[f](x) \equiv f(x)$  (ровно для таких  $f$  последовательность  $\{\Theta_n[f]\}$  сходится равномерно), и оператор, естественно, является ограниченным на  $C$  с интегральной метрикой. Из этого следует, что действие  $\Theta$  в  $L_1$  можно рассматривать как распространение его с пространства  $C$  /о единственности распространения непрерывного линейного оператора см., например, [7] с. 240/.  $\Theta$  можно назвать **оператором непрерывности**.

При  $d = 1$  в Предложении 4 условие « $x$  – точка Лебега» можно заменить на условие

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt, \quad x+h \in [a; b],$$

что равносильно дифференцируемости в точке  $x$  функции  $F$  – первообразной  $f$ . Выполнение данного соотношения в точке  $x$  для функции  $f \in L_1[a; b]$  можно назвать  **$L$ -непрерывностью в этой точке**.

Функция  $\Theta[f]$  может быть неопределена на некотором фиксированном множестве меры ноль точек куба  $Q_0$ , в частности, – в точках разрыва кусочно-постоянной функции  $f$ . На основе поведения последовательности  $\{\Theta_n[f]\}$  можно доопределить функцию  $\Theta[f]$  на всём кубе  $Q_0$ , что даёт, в том числе, важные теоретические следствия.

**Теорема 2.** Для каждой функции  $f \in L_\infty$  имеет место  $\overline{\Theta[f]} \in B$ , где  $\overline{\Theta[f]}$  – это доопределённая на множестве меры ноль усреднением частичных пределов последовательности  $\{\Theta_n[f](x)\}$  функция  $\Theta[f](x)$ , и выполняется равенство  $\|\overline{\Theta[f]}\|_B = \|f\|_\infty$ .

*Доказательство.* По Теореме 2 условие  $f \in L_\infty$  равносильно ограниченности последовательности  $\{\Theta_n[f]\}$ . Более точно,  $\|\Theta_n[f]\|_B \leq \|f\|_\infty$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ . Следовательно, для любой точки  $x \in Q_0$  числовая последовательность  $\{y_n\}$ , где  $y_n \stackrel{\text{def}}{=} \Theta_n[f](x)$ , ограничена. Определим,

$$\overline{\Theta[f]}(x) = \frac{\liminf \{y_n\} + \limsup \{y_n\}}{2}.$$

Если в точке  $x$  выполняется условие (2), то  $\overline{\Theta[f]}(x) = \Theta[f](x)$ . Таким образом,  $\overline{\Theta[f]}(x) = f(x)$  почти всюду и  $\overline{\Theta[f]} \in B$ .

□

Получается, что в рассматриваемой шкале лебеговых пространств «предельный» случай – пространство  $L_\infty[Q_0]$  – можно заменить на пространство  $B[Q_0]$ . Этот факт имеет понятные обобщения, но их аккуратное доказательство уводит от темы статьи. Наметим только шаги и ориентиры. Для множества-носителя  $\Pi_0$ , где  $\Pi_0 = [a_1; b_1] \times \dots \times [a_d; b_d]$  – параллелепипед в  $\mathbb{R}^d$ , Предложение 4

доказывается аналогично случаю с кубом, поскольку в формуле (2) можно рассматривать семейство параллелепипедов  $\Pi$ , подобных  $\Pi_0$  (см., [6], с. 352 Следствие 5.6.3), рассуждения Теорем 1 и 2 сохраняются полностью. Далее, все утверждения естественно справедливы для полузамкнутых и открытых параллелепипедов, поэтому Теорема 2 сразу переносится на каждое  $G_0$ , представляющее собой счётное объединение любых непересекающихся параллелепипедов, а в итоге приходим к измеримому по Лебегу множеству в  $\mathbb{R}^d$ .

## 2. Обратная теорема для $(k, L)$ -дифференцируемости

Важной стороной введённых в первой части производных в вычислительных целях являются свойства функций,  $(k, L)$ -дифференцируемых на множестве. В то же время в теоретическом плане место таких производных определяется двусторонними соотношениями с классическими производными.

Определим обычные  $X_p$ -модули гладкости ( $1 \leq p \leq \infty$ ):

$$\omega_k(f, t)_p = \sup_{0 < h < t} \|\Delta_h^k(f)\|_{X_p[a; b-kh]}.$$

Как известно,

$$\|\cdot\|_p + \sup_{t>0} t^{-k} \omega_k(\cdot, t)_p$$

– норма на пространстве  $W_p^k$ ,  $1 < p < \infty$ , (см. [8], теорема 2), и имеет место равенство:

$$\sup_{t>0} t^{-k} \omega_k(f, t)_p = \limsup_{h \rightarrow 0} \|h^{-k} \Delta_h^k(f)\|_{L_p[a; b-kh]} = \|f^{(k)}\|_p.$$

**Теорема 3.** Для того, чтобы функция  $f$  из  $L_1[I]$  принадлежала пространству  $C^k[I]$  необходимо и достаточно, чтобы  $f$  была равномерно  $(k, L)$ -дифференцируемой на  $I$ .

*Доказательство.* Любая функция  $f$  из  $C^k[I]$  является, конечно, равномерно  $(k, L)$ -дифференцируемой на  $I$ . Это легко выводится, например, из хорошо известной формулы разложения  $k$  раз дифференцируемой функции с остаточным членом в форме Лагранжа: если на интервале между  $x_0$  и  $x$  определена функция  $f^{(k)}$ , то

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!} \cdot (x - x_0)^{k-1} + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x - x_0)^k,$$

где точка  $\xi$  заключена между  $x_0$  и  $x$ . Последнее слагаемое можно записать в виде

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + \alpha(x - x_0) \cdot (x - x_0)^k, \quad \text{где} \quad \alpha(x - x_0) = \frac{f^{(k)}(\xi) - f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

При условии непрерывности  $f^{(k)}$  на  $I$  получаем, что все функции  $\alpha(x - x_0)$  по модулю можно одновременно ограничить сколь угодно малым положительным числом  $\varepsilon$  для любых точек  $x_0$  и  $x$  из  $I$ , удалённых друг от друга не больше, чем на соответствующее число  $\delta$ . Из этого следует равномерная  $(k, L)$ -дифференцируемость функции  $f$  на  $I$ .

Рассмотрим достаточность. По условию равномерно по точкам  $x_0$  из  $I$  выполняется

$$F(x) = F(x_0) + c_0(x_0) \cdot (x - x_0) + \dots + \frac{c_k(x_0)}{k+1} \cdot (x - x_0)^{k+1} + o((x - x_0)^{k+1}) \quad \text{при } x \rightarrow x_0,$$

где  $F$  – первообразная функции  $f$ .

Пусть  $f_L^{(k)}(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} k! \cdot c_k(x_0)$ . Тогда равномерно на  $I$  есть соотношение (см. Предложение 1)

$$\frac{\Delta_h^{k+1}(F, x_0)}{h^{k+1}} = f_L^{(k)}(x_0) + \frac{\Delta_h^{k+1}(o((x - x_0)^{k+1}), x_0)}{h^{k+1}} = f_L^{(k)}(x_0) + o(h^0) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (3)$$

Кроме того,  $f_L^{(k)} \in C[I]$ . Действительно, применяя рассуждения из доказательства Предложения 3, получаем равномерную сходимость на  $I$  последовательности  $\{\Lambda_n^k[f]\}$  к функции  $f_L^{(k)}$ . Поскольку разбиения отрезка на равные части обладают свойством «смещения узлов» (см., например, [5], с.241), то из равномерной сходимости последовательности ступенчатых функций, подчинённых таким разбиениям, следует непрерывность предельной функции (предположив противоположное, тот час же получим противоречие).

На основе условия  $f_L^{(k)} \in C[I]$  получаем из (3), что

$$\sup_{t>0} t^{-(k+1)} \omega_{k+1}(F, t)_p = \limsup_{h \rightarrow 0} \|h^{-(k+1)} \cdot \Delta_h^{k+1}(F)\|_{X_p[a; b-(k+1)h]} = \|f_L^{(k)}\|_p < \infty.$$

Это даёт принадлежность функции  $F$  пространствам  $W_p^{k+1}$ , следовательно, принадлежность  $f$  пространствам  $W_p^k$  при всех  $1 < p < \infty$  и равенство  $f^{(k)} = f_L^{(k)}$  в  $L_p$ .

Также можно было, доказав непрерывность функции  $f_L^{(k)}$ , завершить доказательство на основе соотношения (3) применением теоремы 1 из [8].  $\square$

## References

- [1] A. P. Calderon and A. Zygmund, “Local properties of solution of elliptic partial differential equation”, *Studia Mathematica*, vol. 20, no. 2, pp. 171–225, 1961.
- [2] A. N. Morozov, “Numerical modeling tools and s-derivatives”, *Modeling and analysis of inform. systems*, vol. 29, no. 1, pp. 20–29, 2022.
- [3] A. N. Morozov, “Calculation of derivatives in the  $L_p$  spaces where  $1 \leq p \leq \infty$ ”, *Modeling and analysis of inform. systems*, vol. 27, no. 1, pp. 124–131, 2020.
- [4] V. K. Dzyadyk, *Introduction to the Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials*. Nauka, 1977.
- [5] L. L. Schumaker, *Spline Functions: Basic Theory*. Wiley, New York, 1981.
- [6] V. I. Bogachev, *Measure Theory*. V.1. Springer, 2007.
- [7] L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Functional Analysis*. Nauka, Moscow, 1984.
- [8] Y. A. Brudnyi, “Criteria for the existence of derivatives in  $l_p$ ”, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, vol. 2, no. 1, pp. 35–55, 1967.