УДК 517.5

Точные значения поперечников некоторых классов функций из L_2 и минимизация констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина

Юсупов Г. А.

*Таджикский национальный университет
734025, Таджикистан, г. Душанбе, проспект Рудаки, 17.*

e-mail: G_7777@mail.ru

получена 8 апреля 2013

Ключевые слова: наилучшие приближения, модуль непрерывности m -го порядка, n -поперечники

Рассматривается экстремальная задача нахождения точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина между наилучшими приближениями периодических дифференцируемых функций $f \in L_2^{(r)}[0, 2\pi]$ тригонометрическими полиномами и усреднёнными значениями с положительным весом φ модулями непрерывности m -го порядка $\omega_m(f^{(r)}, t)$, принадлежащих пространству L_p , $0 < p \leq 2$. В частности, решена задача о минимизации константы в указанных неравенствах по всем подпространствам размерности n , поставленная Н.П. Корнейчуком. Для некоторых классов функций, определяемых указанными модулями непрерывности, найдены точные значения n -поперечников класса

$$L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi) := \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/p} \left(\int_0^h \varphi(t) dt \right)^{-1/p} \leq 1 \right\}$$

в гильбертовом пространстве L_2 и указаны соответствующие экстремальные подпространства. Приведённые в данной статье результаты являются продолжением и обобщением некоторых ранее известных результатов, полученных в этом направлении.

1. Введение

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ – множество положительных чисел вещественной оси; $L_2 \equiv L_2[0, 2\pi]$ – пространство измеримых и

суммируемых с квадратом по Лебегу 2π -периодических функций, у которых норма

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2[0,2\pi]} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Через $\mathfrak{S}_{2n-1}$ обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка $\leq n-1$. Известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, которая имеет формальное разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

величина её наилучшего приближения элементами подпространства $\mathfrak{S}_{2n-1}$ в пространстве L_2 равна

$$E_{n-1}(f) = \inf \left\{ \|f - T_{n-1}\|_2 : T_{n-1} \in \mathfrak{S}_{2n-1} \right\} = \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \right\}^{1/2}, \quad (1.1)$$

где $S_{n-1}(f)$ – частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье f , а $\rho_k^2 = a_k^2 + b_k^2$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$.

Символом $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{N}$; $L_2^{(0)} \equiv L_2$) обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$ -го порядка абсолютно непрерывны, а производные r -го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству L_2 .

Модуль непрерывности m -го порядка функции $f \in L_2$ обозначим через

$$\omega_m(f, t)_2 := \sup \left\{ \|\Delta_h^m f(\cdot)\|_2 : |h| \leq t \right\},$$

где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x + jh)$$

– разность m -го порядка функции $f \in L_2$ с шагом h .

Напомним, что под неравенствами типа Джексона – Стечкина в рассматриваемом нормированном пространстве X понимают соотношения, в которых погрешность приближения индивидуальной функции $f \in X$ оценивается через модуль непрерывности самой приближаемой функции или некоторой её производной:

$$E_{n-1}(f)_X \leq \chi n^{-r} \omega_m \left(f^{(r)}, \frac{t}{n} \right)_X, \quad t > 0.$$

В случае $X = L_2$ задача отыскания точной константы

$$\chi := \sup \left\{ \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\omega_m(f^{(r)}; t/n)_2} : f \in L_2, f^{(r)} \neq \text{const} \right\}$$

рассматривалась во многих работах (см., например, [1]–[10] и приведённую в них литературу). С этой целью были введены различные экстремальные аппроксимационные характеристики. Например, А.А. Лигун [2] рассмотрел следующую экстремальную характеристику (всюду далее отношение $0/0$ полагаем равным нулю):

$$\mathcal{K}_{m,n,r}(\varphi, h) := \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{E_{n-1}^2(f)}{\int_0^h \omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt},$$

где $m, n \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $0 < h \leq \pi/n$; $\varphi \geq 0$ — суммируемая на $[0, h]$ функция. Он показал, что

$$\left\{ B_{n,h}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1} \leq \mathcal{K}_{m,n,r}(\varphi, h) \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} B_{k,h}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1}.$$

Здесь

$$B_{k,h}^{r,m}(\varphi) := 2^m k^{2r} \int_0^h (1 - \cos kt)^m \varphi(t) dt, \quad k \geq n.$$

С целью обобщения результатов [2] М.Ш. Шабозов и Г.А. Юсупов рассмотрели экстремальную характеристику [9]

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi, h) := \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/p}}, \quad (1.2)$$

где $m, n \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $0 < p \leq 2$; $0 < h \leq \pi/n$; $\varphi \geq 0$ — суммируемая на $[0, h]$ функция, и установили следующие неравенства

$$\left\{ \mathcal{A}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1} \leq \chi_{m,n,r,p}(\varphi, h) \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} \mathcal{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1}, \quad (1.3)$$

полагая

$$\mathcal{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) := 2^{m/2} \left(k^{rp} \int_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p}, \quad k \geq n.$$

Отметим, что при $\varphi(t) = \sin^\gamma(\beta t/h)$, $0 \leq \gamma \leq rp - 1$, $r \in \mathbb{R}_+$, $0 < \beta < \pi$, $0 < h \leq \pi/n$ характеристика (1.2) была рассмотрена в работе М.Г. Есмаганбетова [4], причём в этом случае

$$\inf_{n \leq k < \infty} \mathcal{A}_{k,h,p}^{r,m} \left(\sin^\gamma \frac{\beta t}{h} \right) = \mathcal{A}_{n,h,p}^{r,m} \left(\sin^\gamma \frac{\beta t}{h} \right).$$

При вычислении точных значений n -поперечников классов функций, непосредственно вытекающих из (1.2), и в связи с точностью неравенства (1.3) возникает необходимость установления равенства

$$\inf_{n \leq k < \infty} \mathcal{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) = \mathcal{A}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi) \quad (1.4)$$

для любой положительной суммируемой функции φ на промежутке $[0, h]$ при тех же ограничениях на указанных параметрах. В общем случае проверка условия (1.4) не всегда удаётся. Для некоторых конкретных весовых функций выполнение условия (1.4) доказано в работе [10]. Возникает естественный вопрос: какими структурными и дифференциальными свойствами должна обладать функция φ , чтобы выполнялось соотношение (1.4)?

2. Наилучшее приближение 2π -периодических функций в пространстве L_2

В этом параграфе мы дадим ответ на поставленный выше вопрос в зависимости от дифференциальных свойств весовых функций φ . Справедлива следующая

Теорема 2.1. Пусть весовая функция φ , заданная на отрезке $[0, h]$, является неотрицательной и непрерывно дифференцируемой на нём. Если при некоторых $r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \leq 2$ и любых $t \in [0, h]$ выполнено дифференциальное неравенство

$$(rp - 1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \geq 0, \quad (2.1)$$

то при любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $0 < h \leq \pi/n$ справедливо равенство

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi; h) = 2^{-m} n^{-r} \left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (2.2)$$

Существует функция $f_0 \in L_2^{(r)}$, $f_0^{(r)} \neq \text{const}$, реализующая верхнюю грань в (1.2), равная правой части (2.2).

Доказательство. Воспользуемся следующим упрощенным вариантом неравенства Минковского (см., например, [12, с. 104])

$$\left(\int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2 \right)^{p/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p} \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_0^h |f_k(t)|^p \varphi(t) dt \right)^{2/p} \right)^{1/2},$$

$$(0 < p \leq 2; \varphi \geq 0, 0 < t \leq h).$$

Действительно, имея в виду, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ имеет место соотношение

$$\omega_m^2(f^{(r)}; t)_2 = 2^m \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 (1 - \cos ku)^m : |u| \leq t \right\},$$

получаем

$$\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/p} \geq$$

$$\begin{aligned}
&\geq \left\{ \int_0^h \left[2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 (1 - \cos kt)^m \right]^{p/2} \varphi(t) dt \right\}^{1/p} \geq \\
&\geq \left\{ 2^m \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \left(k^{rp} \int_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{2/p} \right\}^{1/2}. \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Легко доказать, что функция

$$y(x) = x^{rp} \int_0^h (1 - \cos xt)^{mp/2} \varphi(t) dt \quad (2.4)$$

в области $Q = \{x : x \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$ является монотонно возрастающей и

$$\min \{y(x) : x \in Q\} = y(n) := n^{rp} \int_0^h (1 - \cos nt)^{mp/2} \varphi(t) dt. \quad (2.5)$$

В самом деле, дифференцируя (2.4) и применяя элементарное тождество

$$\frac{d}{dx} (1 - \cos xt)^{mp/2} = \frac{t}{x} \cdot \frac{d}{dt} (1 - \cos xt)^{mp/2},$$

будем иметь

$$\begin{aligned}
y'(x) &= rpx^{rp-1} \int_0^h (1 - \cos xt)^{mp/2} \varphi(t) dt + x^{rp} \int_0^h \frac{d}{dx} (1 - \cos xt)^{mp/2} \varphi(t) dt = \\
&= rpx^{rp-1} \int_0^h (1 - \cos xt)^{mp/2} \varphi(t) dt + x^{rp-1} \int_0^h \frac{d}{dt} (1 - \cos xt)^{mp/2} \varphi(t) dt. \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Выполнив интегрирование по частям в последнем интеграле равенства (2.6), с учётом неравенства (2.1), окончательно получаем

$$\begin{aligned}
y'(x) &= x^{rp-1} \left\{ (1 - \cos hx)^{mp/2} h\varphi(h) + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^h (1 - \cos xt)^{mp/2} [(rp-1)\varphi(t) - t\varphi'(t)] dt \right\} \geq 0,
\end{aligned}$$

откуда сразу следует соотношение (2.5).

Учитывая (1.1) и (2.5), продолжим неравенство (2.3):

$$\begin{aligned} \dots &\geq 2^{m/2} n^r \left(\int_0^h (1 - \cos nt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \right\}^{1/2} = \\ &= 2^m n^r E_{n-1}(f) \left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из неравенства (2.3) и (2.7) следует, что

$$\frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/p}} \leq 2^{-m} n^{-r} \left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}.$$

Так как последнее неравенство имеет место для любого $f \in L_2^{(r)}$, то мы имеем оценку сверху для величины (2.2):

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi; h) \leq 2^{-m} n^{-r} \left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (2.8)$$

Оценку снизу величины (2.2), справедливую при всех $0 < h \leq \pi/n$, получаем для функции $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$, для которой

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \quad \omega_m(f_0^{(r)}; t)_2 = 2^m n^r \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^m, \quad 0 < nt \leq \pi.$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\chi_{m,n,r,p}(\varphi; h) \geq \\ &\geq \frac{E_{n-1}(f_0)}{\left(\int_0^h \omega_m^p(f_0^{(r)}; t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = 2^{-m} n^{-r} \left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Требуемое равенство (2.2) получаем из сопоставления неравенств (2.8) и (2.9), чем и завершаем доказательство теоремы 2.1. $\square$

3. Точные значения поперечников класса $L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi)$ в пространстве L_2

Пусть S — единичный шар в L_2 ; $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2 ; $\Lambda_N \subset L_2$ — N -мерное подпространство; $\Lambda^N \subset L_2$ — подпространство

коразмерности N ; $l : L_2 \rightarrow \Lambda_N$ — непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства L_2 в Λ_N ; $l^\perp : L_2 \rightarrow \Lambda_N$ — непрерывный оператор линейного проектирования пространства L_2 на подпространство Λ_N . Величины

$$\begin{aligned} b_N(\mathfrak{M}, L_2) &= \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0; \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : \Lambda_{n+1} \subset L_2 \}, \\ d^N(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \sup \{ \|f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n \} : \Lambda^n \subset L_2 \}, \\ d_N(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \sup \{ \inf \{ \|f - g\|_2 : g \in \Lambda_n \} : f \in \mathfrak{M} \} : \Lambda_n \subset L_2 \}, \\ \lambda_N(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - lf\|_2 : f \in \mathfrak{M} \} : lL_2 \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset L_2 \}, \\ \pi_N(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - l^\perp f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \} : l^\perp L_2 \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset L_2 \} \end{aligned}$$

называют соответственно бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным, проекционным N -поперечниками в пространстве L_2 . Указанные величины монотонно убывают по N и между ними в пространстве L_2 выполняются соотношения [11],[12]:

$$b_N(\mathfrak{M}; L_2) \leq d^N(\mathfrak{M}; L_2) \leq d_N(\mathfrak{M}; L_2) = \lambda_N(\mathfrak{M}; L_2) = \pi_N(\mathfrak{M}; L_2). \quad (3.1)$$

Через $W_m(f^{(r)}; \varphi)_{p,h}$, $m, r \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi$ обозначим среднее в p -й степени значение модуля непрерывности порядка m от функции $f^{(r)}$ с весом φ :

$$W_m(f^{(r)}; \varphi)_{p,h} = \left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/p} \left(\int_0^h \varphi(t) dt \right)^{-1/p}, \quad (3.2)$$

а через $L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi)$ обозначим множество функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых

$$W_m(f^{(r)}; \varphi)_{p,h} \leq 1.$$

Следуя монографии [13, с. 385], положим

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{N,m,p,h} \left(L_2^{(r)}, L_2 \right) &= \inf \left\{ \sup \left\{ \frac{E(f, \mathfrak{S}_N)_2}{W_m(f^{(r)}; \varphi)_{p,h}} : f \in L_2^{(r)} \right\} : \mathfrak{S}_N \subset L_2 \right\}, \\ E_{n-1} \left(L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi) \right) &= \sup \left\{ \|f - S_{n-1}(f)\|_2 : f \in L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi) \right\}. \end{aligned}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть весовая функция φ , заданная на отрезке $[0, h]$, является неотрицательной и непрерывно дифференцируемой. Если при некоторых значениях $1/r < p \leq 2$, $r \in \mathbb{N}$ и любых $t \in [0, h]$ выполнено неравенство

$$(rp - 1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \geq 0, \quad (3.3)$$

то при всех $m, n \in \mathbb{N}$ и $0 < h \leq \pi/n$ справедливы равенства

$$\mathbb{K}_{2n,m,p,h} \left(L_2^{(r)}, L_2 \right) = \mathbb{K}_{2n-1,m,p,h} \left(L_2^{(r)}, L_2 \right) = E_{n-1} \left(L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi) \right)_2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_{2n} \left(L_2^{(r)}(p, h, m; \varphi), L_2 \right) = \delta_{2n-1} \left(L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi), L_2 \right) = \\
&= 2^{-m} n^{-r} \left\{ \int_0^h \varphi(t) dt \right\}^{1/p} \left\{ \int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right\}^{-1/p},
\end{aligned}$$

где $\delta_N(\cdot)$ — любой из N -поперечников $b_N(\cdot)$, $d^N(\cdot)$, $d_N(\cdot)$, $\lambda_N(\cdot)$, $\pi_N(\cdot)$.

Доказательство. В самом деле, из (2.7) вытекает, что

$$\begin{aligned}
E_{n-1}(f) &\leq 2^{-m} n^{-r} \frac{\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/p}}{\left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = \\
&= 2^{-m} n^{-r} \left(\frac{\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 \varphi(t) dt}{\int_0^h \varphi(t) dt} \right)^{1/p} \cdot \left(\frac{\int_0^h \varphi(t) dt}{\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt} \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

верно при выполнении неравенства (3.3). Отсюда для проекционного N -поперечника класса $L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi)$ получаем оценку сверху

$$\begin{aligned}
\pi_{2n} \left(L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi), L_2 \right) &\leq \pi_{2n-1} \left(L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi), L_2 \right) \leq E_{n-1} \left(L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi) \right) \leq \\
&\leq 2^{-m} n^{-r} \left\{ \int_0^h \varphi(t) dt \right\}^{1/p} \left\{ \int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right\}^{-1/p}. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

С целью получения оценки снизу для бернштейновского N -поперечника класса $L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi)$ введём в рассмотрение шар

$$\mathbb{B}_{2n+1} = \left\{ T_n \in \mathfrak{S}_{2n+1} : \|T_n\|_2 \leq \frac{2^{-m} n^{-r} \left(\int_0^h \varphi(t) dt \right)^{1/p}}{\left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}} \right\}$$

в $(2n+1)$ -мерном подпространстве $\mathfrak{S}_{2n+1}$ тригонометрических полиномов и покажем, что $\mathbb{B}_{2n+1} \subset L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi)$. Нетрудно доказать, что

$$\omega_m(T_n^{(r)}, t)_2 \leq 2^m n^r \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^m \|T_n\|_2. \tag{3.5}$$

Обе части неравенства (3.5) возведём в степень p ($1/r < p \leq 2$) и проинтегрируем полученное соотношение по t в пределах от 0 до h , откуда непосредственно получаем

$$\left(\frac{\int_0^h \omega_m^p(T_n^{(r)}; t)_2 \varphi(t) dt}{\int_0^h \varphi(t) dt} \right)^{1/p} \leq 2^m n^r \left(\frac{\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt}{\int_0^h \varphi(t) dt} \right)^{1/p} \cdot \|T_n\|_2 \leq 1,$$

а потому $\mathbb{B}_{2n+1} \subset L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi)$. В силу определения бернштейновского N -поперечника имеем оценки снизу

$$\begin{aligned} b_{2n-1} \left(L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi), L_2 \right) &\geq b_{2n} \left(L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi), L_2 \right) \geq b_{2n}(\mathbb{B}_{2n+1}, L_2) = \\ &= 2^{-m} n^{-r} \left\{ \int_0^h \varphi(t) dt \right\}^{1/p} \left\{ \int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right\}^{-1/p}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Сопоставляя неравенства (3.4) и (3.6), с учётом соотношения (3.1) завершаем доказательство теоремы 3.1. $\square$

Из доказанной теоремы 3.1 в качестве следствия получаем результат работы [4].

Следствие 3.1. Пусть $\varphi_*(t) = \sin^\gamma(\beta t/h)$; $0 \leq \gamma \leq rp - 1, r \geq 1, 1/r < p \leq 2$. Тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{2n, m, p, h} \left(L_2^{(r)}, L_2 \right) &= \mathbb{K}_{2n-1, m, p, h} \left(L_2^{(r)}, L_2 \right) = \\ &= \delta_{2n} \left(L_2^{(r)}(p, h, m; \varphi_*), L_2 \right) = \delta_{2n-1} \left(L_2^{(r)}(p, h, m; \varphi_*), L_2 \right) = \\ &= 2^{-m} n^{-r} \left(\int_0^h \sin^\gamma \frac{\beta}{h} t dt \right)^{1/p} \left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \sin^\gamma \frac{\beta}{h} t dt \right)^{-1/p}, \end{aligned}$$

где $\delta_N(\cdot)$ — любой из перечисленных выше N -поперечников.

Автор благодарит рецензента за ценные замечания, использованные в работе.

Список литературы

1. Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Математические заметки. 1979. Т. 25, №2. С. 217–223. (English transl.: Taikov L.V. Structural and constructive characteristics of function from L_2 // Matematicheskie Zametki. 1979. V. 25, №2. P. 217–223.)
2. Лигун А.А. Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 // Математические заметки. 1988. Т. 43, №6. С. 757–769. (English transl.: Ligun A.A. Exact inequalities of Jackson type for periodic functions in space L_2 // Matematicheskie Zametki. 1988. V. 43, №6. P. 757–769.)

3. Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p . Тула: Тульский государственный университет, 1995. (Ivanov V.I., Smirnov O.I. Konstanty Dzheksona i konstanty Junga v prostranstvakh L_p . Tula: Tul'skiy gosudarstvennyy universitet, 1995 [in Russian].)
4. Есмаганбетов М.Г. Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Математические заметки. 1999. Т. 65, №6. С. 816–820. (English transl.: Esmaganbetov M.G. Widths of classes from $L_2[0, 2\pi]$ and the minimization of exact constants in Jackson-type inequalities // Matematicheskie Zametki. 1999. V. 65, №6. P. 816–820.)
5. Бабенко А.Г., Черных Н.И., Шевалдин В.Т. Неравенства Джексона – Стечкина в L_2 с тригонометрическим модулем непрерывности // Математические заметки. 1999. Т. 65, №6. С. 928–932. (English transl.: Babenko A.G., Chernykh N.I., Shevaldin V.T. The Jackson – Stechkin inequality in L_2 with a trigonometric modulus of continuity // Matematicheskie Zametki. 1999. V. 65, №6. P. 777–781.)
6. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Математические заметки. 2005. Т. 78, №5. С. 792–796. (English transl.: Vakarchuk S.B. Exact constants in Jackson-type inequalities and exact values of widths // Matematicheskie Zametki. 2005. V. 78, №5. P. 792–796.)
7. Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Математические заметки. 2006. Т. 80, №1. С. 11–19. (English transl.: Vakarchuk S.B. Jackson-type inequalities and widths of function classes in L_2 // Matematicheskie Zametki. 2006. V. 80, №1. P. 11–19.)
8. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Математические заметки. 2010. Т. 87, №4. С. 616–623. (English transl.: Shabozov M.Sh. Widths of classes periodical differentiable functions in $L_2[0, 2\pi]$ // Matematicheskie Zametki. 2010. V. 87, №4. P. 616–623.)
9. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точные значения их поперечников // Математические заметки. 2011. Т. 90, №5. С. 764–775. (English transl.: Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Best polynomial approximations in L_2 of classes of 2π -periodic functions and exact values of their widths // Matematicheskie Zametki. 2011. V. 90, №5. P. 764–775.)
10. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Widths of certain classes of periodic functions in L_2 // Journal of Approximation Theory. 2012. V. 164, Issue 1. P. 869–878.
11. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976. (Tikhomirov V.M. Nekotorye voprosy teorii priblizhenij. Moskva: Moskovskij gosudarstvennyy universitet, 1976 [in Russian].)
12. Pinkus A. n -Widths in Approximation Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1985.

13. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. (Korneichuk N.P. Exact Constants in Approximation Theory. Moskva: Nauka, 1987; English transl. in Encyclopedia Math. Appl., V. 38, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1991.)

Exact Values of Widths of Some Functional Classes in L_2 and Minimization of the Constants in Inequalities of Jackson – Stechkin Type

Yusupov G.A.

Tajik National University

Rudaki Av., 17, Dushanbe city, 734025, Tajikistan

Keywords: best approximations, module of continuity of m th order, n -widths

In this paper, it is considered the extremal problem of finding the exact constants in inequalities of Jackson – Stechkin type between the best approximations of periodic differentiable functions $f \in L_2^{(r)}[0, 2\pi]$ by trigonometric polynomials, and the average values with a positive weight φ moduli of continuity of m th order $\omega_m(f^{(r)}, t)$, belonging to the space L_p , $0 < p \leq 2$. In particular, the problem of minimizing the constants in these inequalities over all subspaces of dimension n , raised by N.P. Korneychuk, is solved. For some classes of functions defined by the specified moduli of continuity, the exact values of n -widths of class

$$L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi) := \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/p} \left(\int_0^h \varphi(t) dt \right)^{-1/p} \leq 1 \right\}$$

are found in the Hilbert space L_2 , and the extreme subspace is identified. In this article, the results are shown which are the extension and the generalization of some earlier results obtained in this line of investigation.

Сведения об авторе:

Юсупов Гулзорхон Амиршоевич,

Таджикский национальный университет,

кандидат физико-математических наук, доцент