

Algorithms for asymptotic and numerical modeling of oscillatory modes in the simplest ring of generators with asymmetric nonlinearity

S. D. Glyzin¹, E. A. Marushkina¹DOI: [10.18255/1818-1015-2023-2-160-169](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2023-2-160-169)¹P.G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia.

MSC2020: 93A30, 34C15, 37M25

Research article

Full text in Russian

Received September 12, 2022

After revision November 14, 2022

Accepted November 16, 2022

A system of three ring-connected generators with asymmetric nonlinearity and special nonlinear coupling is considered. The investigated system simulates an electrical circuit of three identical generators. Each generator is an oscillatory circuit with a nonlinear element. The volt-ampere characteristic of this element has a *S*-shaped character. The nonlinear coupling between the generators is organized in such way that it has a transmission coefficient close to one in the forward direction and close to zero in the reverse direction. First, the problem of finding solutions branching from equilibrium states is studied by asymptotic methods. And then the initial system is investigated by numerical methods. The dependence of the system dynamics on the degree of asymmetry of cubic nonlinearity describing the characteristic of a nonlinear element is studied.

Keywords: modeling; autogenerator; asymptotics; oscillatory mode; bifurcation; numerical analysis

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sergey D. Glyzin | orcid.org/0000-0002-6403-4061. E-mail: glyzin.s@gmail.com

Doctor, Professor, Head of Department.

Elena A. Marushkina | orcid.org/0000-0001-9183-6484. E-mail: marushkina-ea@yandex.ru

corresponding author | Ph.D., Associate Professor, Head of Department.

Funding: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 21-71-30011), <https://rscf.ru/en/project/21-71-30011/>.

For citation: S. D. Glyzin and E. A. Marushkina, "Algorithms for asymptotic and numerical modeling of oscillatory modes in the simplest ring of generators with asymmetric nonlinearity", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 30, no. 2, pp. 160-169, 2023.

Алгоритмы асимптотического и численного построения колебательных режимов в простейшем кольце генераторов с несимметричной нелинейностью

С. Д. Глызин¹, Е. А. Марушкина¹DOI: [10.18255/1818-1015-2023-2-160-169](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2023-2-160-169)¹Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, Ярославль, 150003, Россия.

УДК 517.9

Научная статья

Полный текст на русском языке

Получена 12 сентября 2022 г.

После доработки 14 ноября 2022 г.

Принята к публикации 16 ноября 2022 г.

Рассматривается система из трех связанных в кольцо генераторов с несимметричной нелинейностью и специальной нелинейной связью. Исследуемая система моделирует электрическую цепь, в которой каждый из трех идентичных генераторов представляет собой колебательный контур с нелинейным элементом. Вольт-амперная характеристика этого элемента имеет S-образный характер. Нелинейная связь между генераторами организована так, что имеет близкий к единичному коэффициент передачи в прямом направлении и близкий к нулевому в обратном. Асимптотическими методами сначала изучается задача о решениях, ветвящихся от состояний равновесия, а затем численными методами исследуется исходная система. Изучена зависимость динамики системы от степени несимметричности кубической нелинейности, описывающей характеристику нелинейного элемента.

Ключевые слова: моделирование; автогенератор; асимптотика; колебательный режим; бифуркация; численный анализ

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Сергей Дмитриевич Глызин

orcid.org/0000-0002-6403-4061. E-mail: glyzin.s@gmail.com

зав. кафедрой компьютерных сетей, д-р физ.-мат. наук, профессор.

Елена Александровна Марушкина

orcid.org/0000-0001-9183-6484. E-mail: marushkina-ea@yandex.ru

автор для корреспонденции

зав. кафедрой общей математики, канд. физ.-мат. наук, доцент.

Финансирование: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-30011, <https://rscf.ru/project/21-71-30011/>.

Для цитирования: S. D. Glyzin and E. A. Marushkina, “Algorithms for asymptotic and numerical modeling of oscillatory modes in the simplest ring of generators with asymmetric nonlinearity”, *Modeling and analysis of information systems*, vol. 30, no. 2, pp. 160-169, 2023.

Введение

Разработка нелинейных систем электрических генераторов часто связана с необходимостью выявления у этой системы значений параметров, при которых она допускает хаотические колебания. Одним из простейших объектов такого рода является система из трех генераторов, соединенных в кольцо. В настоящей работе рассмотрена система нелинейных автогенераторов, нелинейность каждого из элементов которой обусловлена наличием так называемого туннельного диода. Для вольт-амперной характеристики этого элемента выбирается несимметричная S-образная функция. В качестве характеристики несимметричности этой функции используется квадратичная нелинейность в ее представлении. Предполагается, что связь между элементами кольца является однонаправленной. В работе проведен численный эксперимент, который позволяет установить границы изменения параметра несимметричности, при которых система генерирует периодические и хаотические колебания.

1. Модельная система

Рассматривается нелинейная система, состоящая из трех идентичных автогенераторов с однонаправленной связью (рис. 1). В этой системе L , C , R – сосредоточенные индуктивность, емкость и активное сопротивление, а E – напряжение источника питания. Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента – туннельного диода TD – имеет вид, представленный на рис. 2. Подробный вывод модельных уравнений для такой электрической цепи можно найти в [1–3]. Математическая модель парциального генератора строится на основе законов Ома и Кирхгофа, откуда получаем:

$$C\ddot{u} + \left[\frac{1}{R} + f'(u) \right] \dot{u} + \frac{1}{L}u = \frac{E}{L}, \quad (1)$$

где u – напряжение в контуре, $f(u)$ – нелинейная характеристика туннельного диода (см. рис. 2).

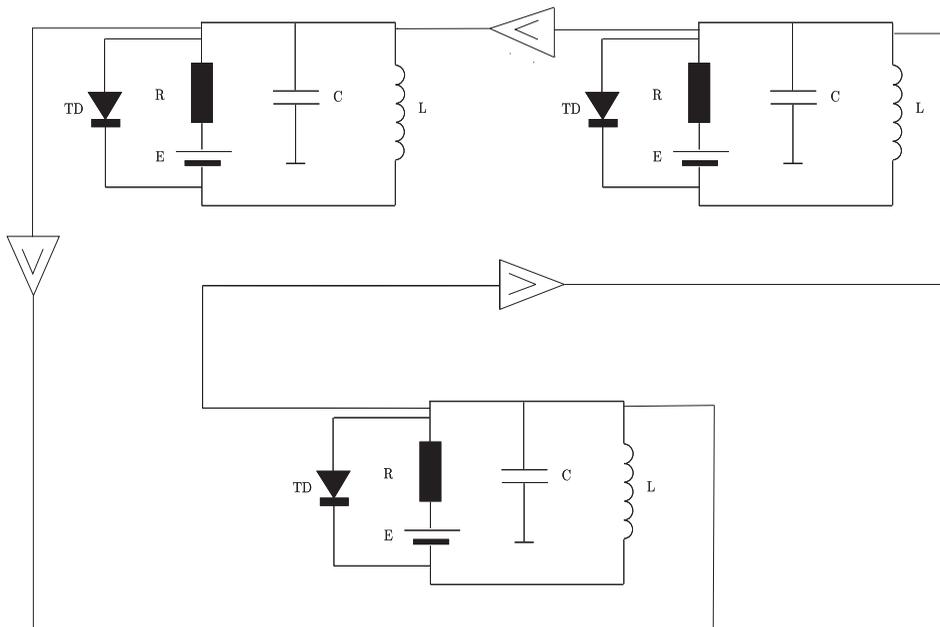


Fig. 1. A chain of three identical self-oscillators with a unidirectional connection

Рис. 1. Цепь из трех идентичных автогенераторов с однонаправленной связью

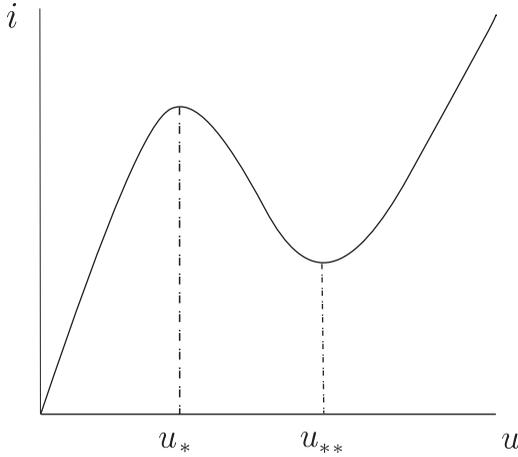


Fig. 2. Nonlinear characteristic of the tunnel diode

Рис. 2. Нелинейная характеристика туннельного диода

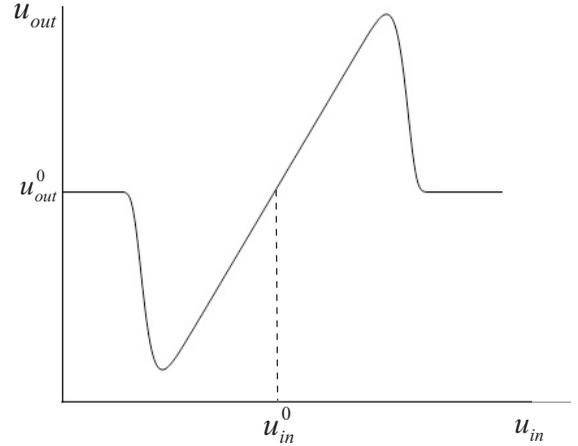


Fig. 3. Graph of the function $g(u)$

Рис. 3. График функции $g(u)$

Заметим, что парциальный осциллятор (1) имеет состояние равновесия $u = \tilde{u}_0$, где $\tilde{u}_0 = E$, которое является устойчивым (неустойчивым) при

$$\frac{1}{R} + f'(\tilde{u}_0) > 0 \quad (< 0). \quad (2)$$

Всюду ниже предполагаем, что рабочая точка $A = (\tilde{u}_0, \tilde{i}_0)$, $\tilde{i}_0 = f(\tilde{u}_0)$ лежит на падающем участке нелинейной характеристики $i = f(u)$, т. е. $f'(\tilde{u}_0) < 0$. В этом случае в силу (2) можно добиться устойчивости или неустойчивости положения равновесия $u = \tilde{u}_0$ за счет изменения только сопротивления R (при фиксированных прочих параметрах). Перейдем теперь к соответствующему кольцевому генератору, схема которого показана на рис. 1. Будем считать, что все три парциальные электрические цепи идентичны и связи между ними установлены с помощью трех одинаковых блоков. Важно отметить, что эти блоки носят принципиально нелинейный характер. А именно, каждый из них состоит из трех элементов: нелинейного преобразователя сигнала $u_{out} = g(u_{in})$, где u_{in} , u_{out} — входное и выходное напряжения соответственно, и двух буферных каскадов, реализованных на операционных усилителях. График функции $g(u)$ изображен на рис. 3. Отметим, что буферные устройства должны иметь большое входное и малое выходное сопротивления, а также обладать единичным коэффициентом передачи в прямом направлении и близким к нулевому в обратном. Практические способы реализации нелинейного блока, представленного на рис. 3, описаны в работах [4–7].

Для того чтобы вывести математическую модель интересующего нас кольцевого генератора учтем тот факт, что в силу однонаправленного характера связи парциальная система с номером j непосредственно влияет только на систему с номером $j + 1$ и, в свою очередь, сама испытывает влияние только со стороны $(j - 1)$ -ой системы. Таким образом, для j -ой ячейки имеем равенства

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{E - u_j}{R}, \quad i_3 = f(u_j), \quad i_4 = C \frac{du_j}{dt}, \\ i_5 &= -\frac{1}{L} \int (E - u_j - g(u_{j-1})) dt, \\ i_1 &= i_2 + i_3, \quad i_2 = i_4 + i_5, \end{aligned}$$

из которых после дифференцирования по t для парциальных напряжений u_j , $j = 1, 2, 3$ выходит система

$$C\ddot{u}_j + \left[\frac{1}{R} + f'(u_j) \right] \dot{u}_j + \frac{1}{L} (u_j + g(u_{j-1})) = \frac{E}{L}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где $u_0 = u_3$.

Получившуюся систему (3) будем изучать при двух дополнительных ограничениях. Во-первых, напряжение E источников питания считаем таковым, что $E = u_{in}^0 + u_{out}^0$, где $u_{out}^0 = g(u_{in}^0)$ (см. рис. 3). Во-вторых, предполагаем, что $u_* < u_{in}^0 < u_{**}$, где u_* , u_{**} — экстремумы нелинейной характеристики туннельного диода (см. рис. 2). В этом случае система (3) имеет состояние равновесия $u_1 = u_2 = u_3 = \tilde{u}_0$, где $\tilde{u}_0 = u_{in}^0$.

Последовательность дальнейших действий такова. Сначала выполним в системе (3) замену $u_j - \tilde{u}_0 \rightarrow u_j$, $j = 1, 2, 3$, переводящую упомянутое выше состояние равновесия в нулевое. Аппроксимация функции $f(u + \tilde{u}_0)$ обычно выполняется с помощью симметричного полинома третьей степени вида $f(u + \tilde{u}_0) = -s_0 u + s_2 u^3$, где $s_0, s_2 > 0$ (см. [1]). Представляет интерес задача о влиянии на динамику исследуемой системы квадратичного слагаемого. Ниже считаем, что $f(u + \tilde{u}_0) = -s_0 u + s_1 u^2 + s_2 u^3$. Нелинейную функцию связи $g(u + \tilde{u}_0) - u_{out}^0$ будем считать близкой к непрерывной кусочно-линейной функции. В результате после некоторых нормировок переменных u_j , $j = 1, 2, 3$, и времени интересующая нас система примет вид:

$$\ddot{u}_j + \frac{d}{dt} (\varepsilon u_j + \alpha u_j^2 + u_j^3) + u_j + \mu g(u_{j-1}) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (4)$$

где $u_0 = u_3$, $\mu > 0$, а знак параметров ε и α произволен. Что же касается функции связи $g(u)$, то теперь она задается равенством

$$g(u) = u \exp\left(-\frac{u^n}{nb^n}\right), \quad (5)$$

где $b > 0$ произвольно фиксировано. При увеличении параметра n функция (5) приближается к кусочно-линейной функции, рассмотренной в работе [1].

Нетрудно видеть, что при достаточно малых значениях величин ε и $\mu = \nu\varepsilon$ (величину μ , как и ранее, полагаем положительной) к системе (4) применима локальная теория, изложенная в статье [1] (см. также [8–10]). При $\mu = \varepsilon = 0$ реализуется критический случай трех пар чисто мнимых корней. В связи с этим для нахождения нормальной формы системы (4) использовалась замена

$$u_j = \sqrt{\mu} u_{j1}(t, \tau) + \mu u_{j2}(t, \tau) + \mu^{3/2} u_{j3}(t, \tau) + \dots, \quad j = 1, 2, 3,$$

где $\tau = \mu t$, функции $u_{jk}(t, \tau)$ являются 2π -периодическими по t , причем

$$u_{j1} = z_j(\tau) \exp(it) + \bar{z}_j(\tau) \exp(-it), \quad j = 1, 2, 3.$$

Здесь комплексные амплитуды z_j подлежат определению в ходе выполнения алгоритма. Из условий разрешимости задач для $u_{j3}(t, \tau)$ в классе 2π -периодических по t функций на третьем шаге выполнения алгоритма получается следующая нормальная форма:

$$z_j' = -\nu \frac{z_j}{2} + \frac{i}{2} z_{j-1} + dz_j |z_j|^2, \quad j = 1, 2, 3, \quad (6)$$

где $d = -\frac{3}{2} + \frac{2\alpha^2}{3}i$. В статье [1] отыскиваются условия существования и устойчивости автомодельных циклов системы (6). Для данной работы важно отметить, что указанный результат получается и для случая $\alpha \neq 0$. Тем самым, при достаточно малых значениях параметров ε и μ показано, что система (4) с функцией связи вида (5) имеет орбитально асимптотически устойчивый цикл, ветвящийся от состояния равновесия. Это позволяет получить отправную точку для численного анализа в области, где эти значения не малы, и локальный асимптотический анализ не работает. Перейдем к обзору результатов численного эксперимента.

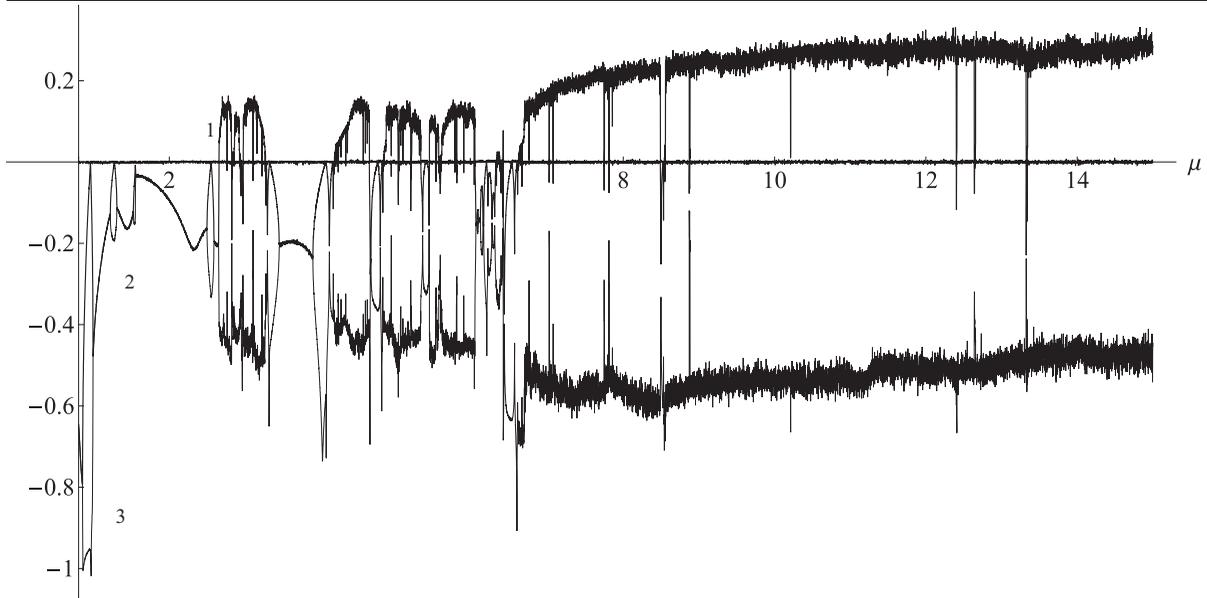


Fig. 4. Three largest Lyapunov exponents for $\alpha = 0$ and $0.8 \leq \mu \leq 15$

Рис. 4. Три старших ляпуновских показателя при $\alpha = 0$ и $0.8 \leq \mu \leq 15$

2. Численный эксперимент

Выполним численный анализ системы (4), (5) с целью нахождения ее нелокальных колебательных режимов в ситуации, когда

$$\varepsilon = 0.001, \quad b = 0.9. \quad (7)$$

Параметр α выберем трех различных видов: $\alpha = 0$ и $\alpha = \pm 0.5$. Параметр μ считаем бифуркационным и рассмотрим его изменение в пределах от 0.1 до 20.

Вместо системы (4) будем интегрировать эквивалентную систему первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= v_j - \varepsilon u_j - \alpha u_j^2 - u_j^3, \\ \dot{v}_j &= -u_j - \mu g(u_{j-1}), \end{aligned} \quad j = 1, 2, 3, \quad (8)$$

где $u_0 = u_3$. Выберем функцию связи $g(u)$ в соответствии с формулой (5) при $n = 6$.

Необходимо добавить, что при $\alpha = 0$ получившаяся система (8) инвариантна относительно замены $u_j \rightarrow -u_j$, $v_j \rightarrow -v_j$, $j = 1, 2, 3$, и поэтому все ее аттракторы в этом случае разбиваются на два класса: симметричные парные (переходящие друг в друга при указанной замене) и самосимметричные (остающиеся неизменными).

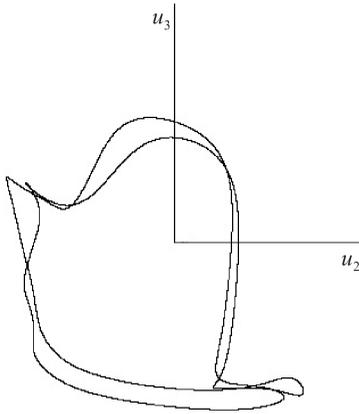
При условиях (7), $\alpha = 0$ и при увеличении μ в системе (8) наблюдаются следующие фрагменты динамики.

1) При $0.1 \leq \mu < \mu_1$, где $\mu_1 \approx 0.82$, единственным ее аттрактором является устойчивый самосимметричный цикл. Добавим еще, что при достаточно малом μ существование такого цикла гарантирует изложенная в статье [1] локальная теория. Таким образом, локальный хаос с малой амплитудой колебаний здесь заведомо невозможен, поскольку единственным локальным аттрактором системы (8) является в этом случае устойчивый цикл.

2) При прохождении параметра μ через критическое значение μ_1 упомянутый выше цикл претерпевает бифуркацию типа вилки, т. е. становится неустойчивым и порождает два устойчивых симметричных цикла. Последние сохраняются на интервале (μ_1, μ_3) , где $\mu_3 \approx 2.6108$, а при $\mu = \mu_3$ теряют устойчивость жестко.

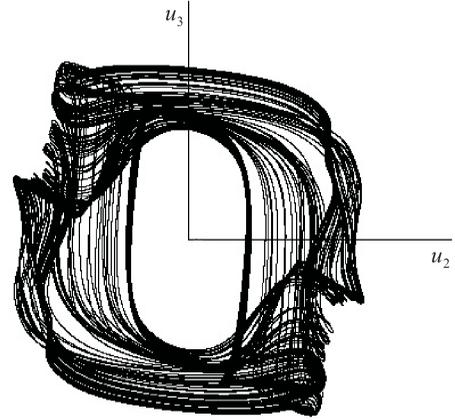
3) При $\mu = \mu_2$, где $\mu_2 \approx 2.61$, нелокально возникают два симметричных хаотических аттрактора и при $\mu_2 < \mu < \mu_3$ эти аттракторы сосуществуют с устойчивыми симметричными циклами, о которых говорилось чуть выше.

4) При $\mu \approx 2.697$ симметричные хаотические аттракторы объединяются в один самосимметричный.



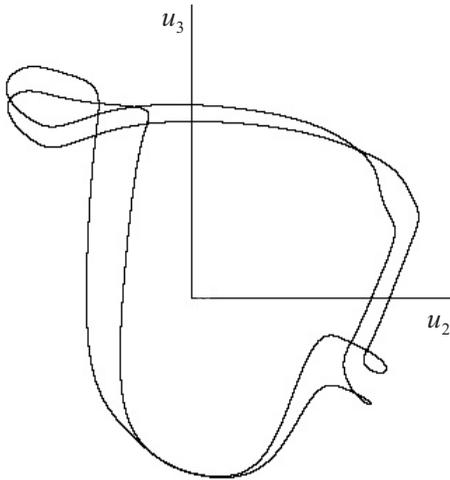
a)

Fig. 5. $\alpha = 0$ a) $\mu = 2.6$; b) $\mu = 2.8$, $\lambda_1 = 0.13$



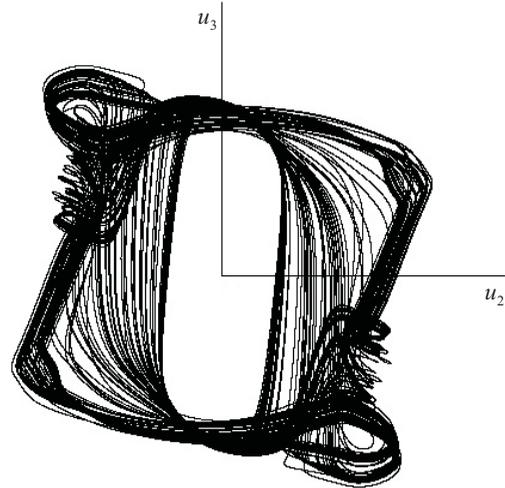
b)

Рис. 5. $\alpha = 0$ a) $\mu = 2.6$; b) $\mu = 2.8$, $\lambda_1 = 0.13$



a)

Fig. 6. $\alpha = 0$ a) $\mu = 3.8$; b) $\mu = 4.6$, $\lambda_1 = 0.14$



b)

Рис. 6. $\alpha = 0$ a) $\mu = 3.8$; b) $\mu = 4.6$, $\lambda_1 = 0.14$

При последующем увеличении μ не удается получить достоверного описания всех происходящих фазовых перестроек из-за наличия достаточно большого (возможно счетного) числа окон периодичности. Общее представление о динамике здесь дают лишь графики трех старших ляпуновских показателей $\lambda_1(\mu)$, $\lambda_2(\mu)$, $\lambda_3(\mu)$ аттрактора системы (8) (см. рис. 4), построенные на отрезке

$$0.8 \leq \mu \leq 15 \quad (9)$$

по точкам с шагом h по μ , равным соответственно 0.001. При этом система (8) интегрировалась методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности с постоянным шагом 0.0001 по времени (см. [11—

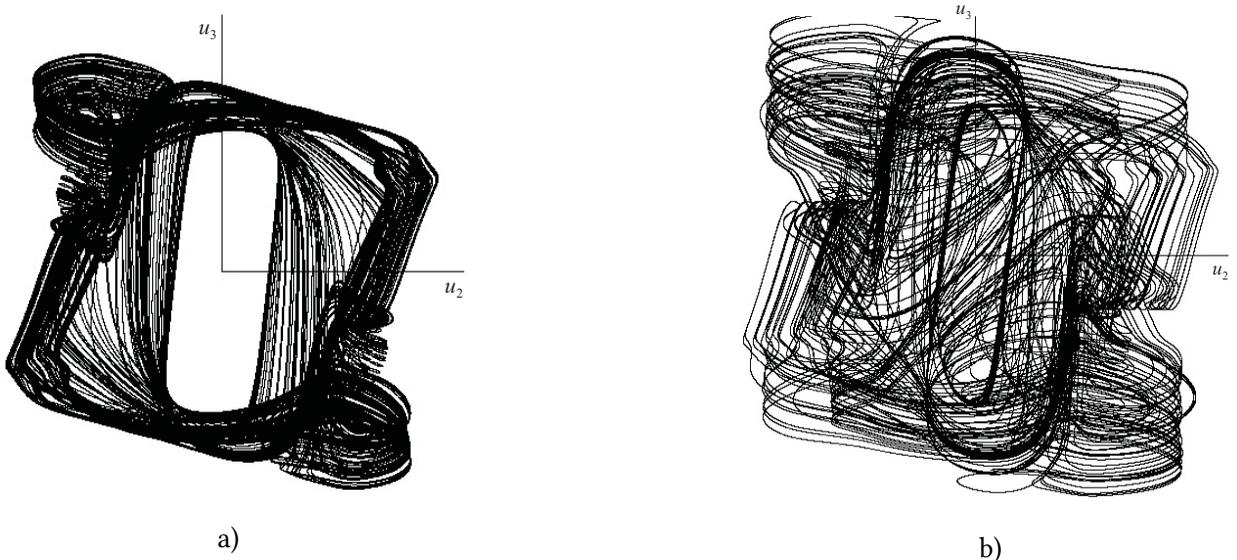


Fig. 7. $\alpha = 0$ a) $\mu = 5.7, \lambda_1 = 0.12$; b) $\mu = 9.5, \lambda_1 = 0.245$

Рис. 7. $\alpha = 0$ а) $\mu = 5.7, \lambda_1 = 0.12$; б) $\mu = 9.5, \lambda_1 = 0.245$

13]), а для оценки ляпуновских показателей использовался метод динамической перенормировки (см. [11]). Окна периодичности системы заканчиваются каскадами бифуркаций удвоения и переходом к хаосу. Для иллюстрации устойчивых режимов, возникающих в системе (8) на рисунках 5, 6 приведены проекции ее периодической и хаотической траекторий на плоскости (u_2, u_3) в окрестности правой границы ее первых двух окон периодичности.

В дополнение к приведенной на рис. 4, 5, 6 визуальной информации перечислим наиболее заметные окна периодичности, которые удалось обнаружить на отрезке $0.1 \leq \mu \leq 15$. К таковым относятся промежутки

$$[0.1, 2.61), \quad (2.853, 2.95), \quad (3.24, 4.582), \quad (4.67, 5.061), \\ (6.83, 6.96), \quad (12.235, 12.38), \quad (13.755, 13.84).$$

Общее же количество всех окон, по всей видимости, счетно. На рисунке 7 приведены проекции траекторий системы (8) в области развитого хаоса, в которой окна периодичности делаются достаточно узкими так, что их не удастся различить с помощью численных методов.

Еще одна характерная особенность системы (8) заключается в том, что при некоторых μ хаотические аттракторы и устойчивые циклы в ней сосуществуют. Например, при $\mu = 4.6$ она имеет два симметричных хаотических аттрактора и три устойчивых цикла – два симметричных и один самосимметричный.

Рассмотрим теперь случай несимметричной характеристики нелинейного элемента сети и примем значение α равным 0.5. Как и в предыдущем случае для того, чтобы составить общее представление о динамике системы приводятся графики трех старших ляпуновских показателей $\lambda_1(\mu), \lambda_2(\mu), \lambda_3(\mu)$ аттрактора системы (8) (см. рис. 8, 9), вычисленные на отрезках

$$3.6 \leq \mu \leq 4.6, \quad 8 \leq \mu \leq 15 \tag{10}$$

В случае $\alpha = -0.5$ графики старших ляпуновских показателей построены на отрезке $2 \leq \mu \leq 15$ и представлены на рисунке 10.

Основное отличие случаев несимметричной характеристики нелинейного элемента от случая $\alpha = 0$ состоит в том, что пропадает инвариантность относительно замен $u_j \rightarrow -u_j, v_j \rightarrow -v_j, j = 1, 2, 3$,

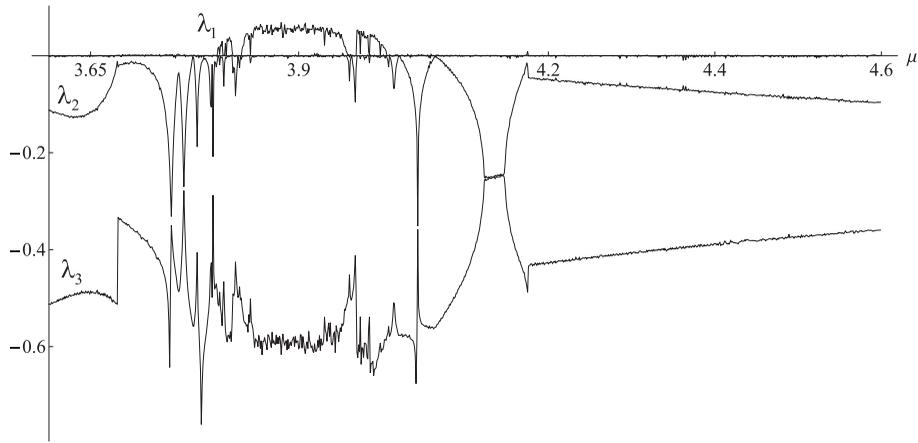


Fig. 8. Three largest Lyapunov exponents for $\alpha = 0.5$ and $3.6 \leq \mu \leq 4.6$

Рис. 8. Три старших ляпуновских показателя при $\alpha = 0.5$ и $3.6 \leq \mu \leq 4.6$

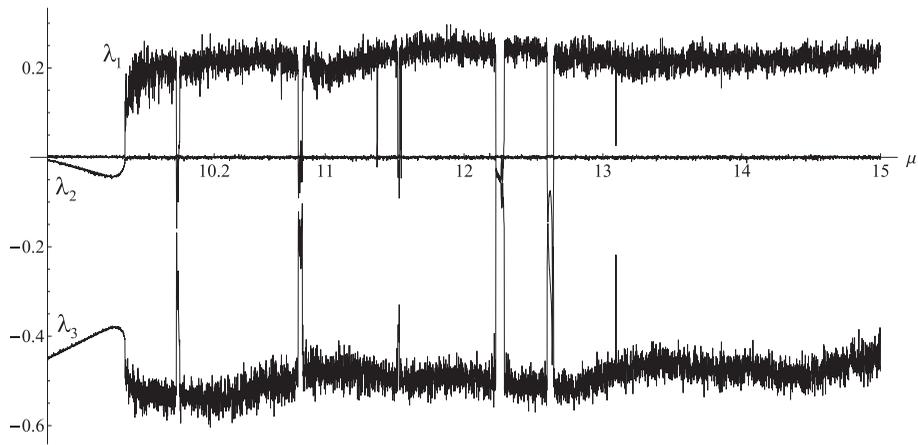


Fig. 9. Three largest Lyapunov exponents for $\alpha = 0.5$ and $8 \leq \mu \leq 15$

Рис. 9. Три старших ляпуновских показателя при $\alpha = 0.5$ и $8 \leq \mu \leq 15$

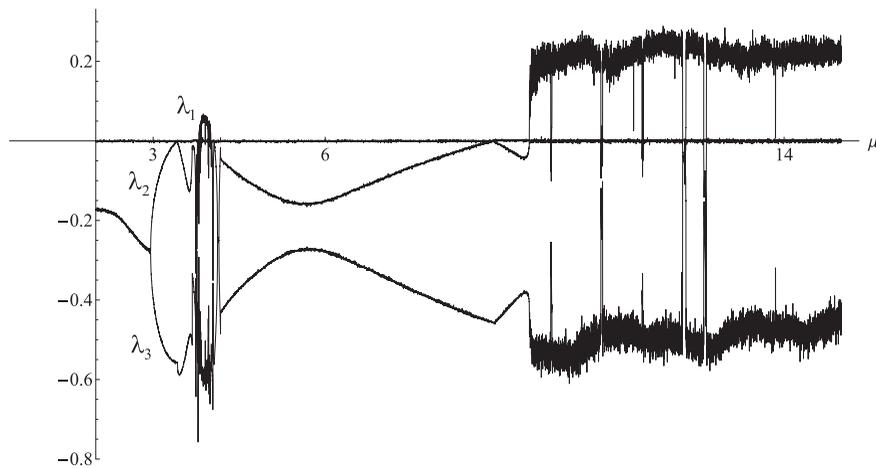


Fig. 10. Three largest Lyapunov exponents for $\alpha = -0.5$ and $2 \leq \mu \leq 15$

Рис. 10. Три старших ляпуновских показателя при $\alpha = -0.5$ и $2 \leq \mu \leq 15$

и, тем самым, отсутствуют симметричные друг другу или самосимметричные аттракторы. Следующее отличие касается размера области периодической динамики (8). Промежутки существования и устойчивости циклов этой задачи расширяются с ростом величины $|\alpha|$. Как в случае $\alpha = 0.5$, так и при $\alpha = -0.5$ имеется обширная область значений параметра μ , в которой система (8) имеет устойчивый цикл.

Заключительные замечания

На основе проделанного численного анализа, можно утверждать, что предложенный в статье [1] и развитый в данной работе способ создания хаотических генераторов достаточно универсален. Такая система может состоять из генератора периодических колебаний, описываемого одним из уравнений (3). Нелинейный характер связи между парциальными системами в рамках локальной теории несущественен (нормальная форма остается прежней и в случае нелинейности (5) и в случае, когда в (3) функция связи линейна, т.е. $g(u) = u$). Численный анализ нелокальной динамики показал существенную зависимость наличия хаотических колебательных режимов от степени несимметричности характеристики нелинейного элемента (туннельного диода), а также важную роль нелинейной связи между парциальными системами.

References

- [1] S. D. Glyzin, A. Y. Kolesov, and N. K. Rozov, "Chaos phenomena in a circle of three unidirectionally connected oscillators", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 46, no. 10, pp. 1724–1736, 2006.
- [2] S. D. Glyzin, A. Y. Kolesov, and N. K. Rozov, "The buffer phenomenon in ring-like chains of unidirectionally connected generators", *Izvestiya: Mathematics*, vol. 78, no. 4, pp. 708–743, 2014.
- [3] A. Y. Kolesov and N. K. Rozov, "Yavlenie bufernosti v RCLG-avtogeneratore: Teoreticheskij analiz i rezul'taty eksperimenta", *Trudy MIAN*, vol. 233, pp. 153–207, 2001, in Russian.
- [4] A. S. Dmitriev and V. Y. Kislov, *Chaotic oscillations in radiophysics and electronics*. Nauka, 1989, 280 pp., in Russian.
- [5] A. S. Dmitriev, A. I. Panas, and S. O. Starkov, "Dinamicheskij haos kak paradigma sovremennyh sistem svyazi", *Uspekhi sovremennoj radioelektroniki (Zarubezhnaya radioelektronika)*, no. 10, pp. 4–26, 1997, in Russian.
- [6] A. S. Dmitriev and S. O. Starkov, "Peredacha soobshchenij s ispol'zovaniem haosa i klassicheskaya teoriya informacii", *Uspekhi sovremennoj radioelektroniki (Zarubezhnaya radioelektronika)*, no. 11, pp. 4–32, 1998, in Russian.
- [7] A. S. Dmitriev and A. I. Panas, *Dynamic chaos: novel type of information carrier for communication systems*. Fizmatlit, 2002, 252 pp., in Russian.
- [8] B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff, and Y.-H. Wan, *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*. Cambridge University Press, 1985, 311 pp.
- [9] V. V. Migulin, V. I. Medvedev, E. R. Mustel', and V. N. Parygin, *Osnovy teorii kolebanij*. Nauka, 1988, 392 pp., in Russian.
- [10] A. Y. Kolesov and N. K. Rozov, *Invariantnye tory nelinejnyh volnovyh uravnenij*. Fizmatlit, 2004, 408 pp., in Russian.
- [11] D. S. Glyzin, S. D. Glyzin, A. Y. Kolesov, and N. K. Rozov, "The dynamic renormalization method for finding the maximum lyapunov exponent of a chaotic attractor", *Differential Equations*, vol. 41, no. 2, 2005.
- [12] S. P. Kuznecov, *Dinamicheskij haos: Kurs lekcij*. Fizmatlit, 2001, 296 pp., in Russian.
- [13] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer Science & Business Media, 1983, 462 pp.