

УДК 514.113.5+514.774.8

Замкнутые локально минимальные сети на поверхностях выпуклых многогранников

Стрелкова Н. П.¹

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1

e-mail: nstrelk@gmail.com

получена 5 августа 2013

Ключевые слова: локально минимальная сеть, геодезическая сеть, выпуклый многогранник

Замкнутые локально минимальные сети — это «разветвлённый» аналог замкнутых несамопересекающихся геодезических. Исследуются свойства таких сетей на поверхностях выпуклых многогранников и задача описания класса выпуклых многогранников, на поверхности которых существуют такие сети.

Замкнутая локально минимальная сеть на выпуклом многограннике — это вложенный в многогранник граф с рёбрами-геодезическими, в каждой вершине которого сходится ровно три ребра под углами по 120° . Случай замкнутых геодезических не рассматривается. Основные результаты статьи заключаются в следующем. Показано, что естественное условие на кривизны вершин многогранника, необходимое для существования на нём замкнутой локально минимальной сети, не является достаточным, и доказано новое, более сильное, необходимое условие. Описаны всевозможные комбинаторные структуры и длины рёбер минимальных сетей на выпуклых многогранниках. Доказано, что на почти всех выпуклых многогранниках, все кривизны которых делятся на $\frac{\pi}{3}$, существует замкнутая локально минимальная сеть.

1 Введение

Сетью мы будем называть геометрическую реализацию графа, т.е. представление вершин графа точками некоторого пространства, а рёбер — кривыми, соединяющими соответствующие точки. Сеть называется *замкнутой локально минимальной*, если её нельзя укоротить деформацией внутри малой окрестности точки сети, даже если разрешить локальные перестройки комбинаторной структуры сети. Слово «замкнутая» в этом названии имеет тот же смысл, что и в словосочетании «замкнутая

¹Работа поддержана грантом Правительства РФ по постановлению №220, договор №11.G34.31.0053, РФФИ, проект 13-01-00664а, а также грантом Президента РФ по поддержке ведущих научных школ РФ, проект НШ-1410.2012.1.

геодезическая». Так же, как и в случае геодезических, замкнутая локально минимальная сеть, вообще говоря, может допускать малую глобальную деформацию, уменьшающую её длину (пример — замкнутая геодезическая на сфере). Однако из [1] следует, что это не может произойти в случае сетей на поверхности выпуклого многогранника. Таким образом, можно представлять себе, что замкнутая локально минимальная сеть сделана из эластичных нитей и натянута на многогранник так, что «не соскальзывает» с его поверхности. С другой стороны, имеется простой критерий, описывающий локальную структуру этих сетей.

Теорема 1. [2, теор. 5.30, сл. 5.41] *Сеть на поверхности выпуклого многогранника является замкнутой локально минимальной тогда и только тогда, когда (1) все рёбра — геодезические, (2) каждая вершина имеет степень 2 или 3, (3) угол между смежными рёбрами в вершинах степени 3 равен 120° , а в вершинах степени 2 — 180° .*

Хотя замкнутые геодезические естественно считать частным случаем минимальных сетей, мы будем рассматривать лишь сети, отличные от замкнутой геодезической. Мы будем называть замкнутые локально минимальные сети кратко **минимальными сетями**. Всюду будем считать, что вершин степени 2 в минимальной сети нет. Ясно, что это не ограничивает общности.

Если все рёбра минимальной сети имеют одинаковую длину, а в каждой её ячейке содержится не более одной вершины многогранника, то можно рассмотреть двойственную триангуляцию многогранника на правильные треугольники. Такие триангуляции классифицированы в работе [3]. Существенно, что изучение минимальных сетей не сводится к изучению таких триангуляций, в частности потому, что на многограннике может существовать минимальная сеть, но не существовать минимальной сети с равными длинами рёбер.

Минимальные сети классифицированы на равногранных тетраэдрах [2, 4] (этот результат основан на существовании разветвлённого накрытия равногранного тетраэдра плоским тором). Известны примеры минимальных сетей на поверхности всех платоновых тел [2]. В работе [5] получены некоторые необходимые и некоторые достаточные условия существования минимальной сети на тетраэдре.

Вопрос, на каких выпуклых многогранниках существуют минимальные сети, открыт, так же как и аналогичный вопрос в случае замкнутых геодезических на многогранниках [6]. Мы получим ряд продвижений в этом направлении. **Основные результаты настоящей работы:** теорема 4, описывающая всевозможные комбинаторные структуры и длины рёбер минимальных сетей на выпуклых многогранниках; необходимое условие на наличие системы разрезов (теорема 6); теорема 9 о сведении задачи поиска минимальных сетей к задаче поиска *простых* минимальных сетей; теорема 14 о существовании простой минимальной сети на «почти всех» многогранниках, кривизны всех вершин которых кратны $\frac{\pi}{3}$.

2 Определения

2.1 Многогранники, многогранные метрики и развёртки

Определение 1. Многогранной метрикой будем называть внутреннюю метри-

ку на двумерном многообразии, относительно которой каждая внутренняя точка многообразия имеет окрестность, изометричную либо плоскому кругу, либо окрестности вершины конуса с плоской метрикой, а каждая граничная точка многообразия имеет окрестность, изометричную окрестности вершины сектора с плоской метрикой.

Здесь метрика называется *внутренней*, если расстояние между любыми двумя точками равно точной нижней грани длин соединяющих их кривых. Под *сектором* с полным углом $\alpha < 2\pi$ мы понимаем сектор на плоскости, ограниченный двумя лучами с общим началом и углом α между ними. Под *конусом* с полным углом $\alpha < 2\pi$ мы понимаем метрическое пространство, полученное из сектора с углом α отождествлением двух его граничных лучей. Рассматривая универсальное накрытие над плоскостью без одной точки, легко определить сектор и конус с полным углом, большим 2π , но нам они не понадобятся, поэтому мы не приводим подробные определения.

Ясно, что на компактном многообразии с многогранной метрикой найдётся лишь конечное число точек, не имеющих изометричной кругу окрестности. Эти точки мы будем называть *вершинами* многогранной метрики. *Кривизна* вершины по определению равна 2π минус *полный угол* при этой вершине (т.е. полный угол при вершине конуса, которому изометрична окрестность данной вершины). Про остальные внутренние точки будем говорить, что они *имеют нулевую кривизну*. Мы будем рассматривать только многогранные метрики *неотрицательной кривизны*, т.е. метрики, в которых кривизны всех вершин положительны.

Для конкретного задания многогранной метрики мы будем использовать понятие *развёртки* в следующем смысле [7]. Рассмотрим произвольное конечное семейство плоских многоугольников. На множестве их сторон зададим *правила склейки*, т.е. укажем пары соответствующих друг другу сторон и для каждой пары зададим изометрию одной стороны на другую. (Соответствующие стороны должны иметь одинаковую длину.) Каждая сторона должна соответствовать не более чем одной другой стороне. Соответствовать друг другу могут в том числе и стороны одного и того же многоугольника.

Определение 2. Развёртка — это конечное семейство многоугольников и правила склейки их сторон, удовлетворяющие описанным выше условиям.

Теперь рассмотрим дизъюнктивное объединение всех многоугольников развёртки и отождествим в нём точки сторон, соответствующие друг другу при выбранных изометриях («склеим» многоугольники вдоль некоторых сторон, подразумевается абстрактное отождествление точек, без привязки к каким-либо склеиваниям и сгибаниям физических многоугольников в трёхмерном пространстве). Полученное топологическое пространство естественным образом наделяется внутренней метрикой — расстоянием между двумя точками считаем инфимум длин соединяющих их путей. Здесь длина пути, проходящего по одному многоугольнику, вычисляется в обычной евклидовой метрике, а длина произвольного пути равна сумме длин путей в произвольном разбиении данного пути на части, каждая из которых содержится в одном многоугольнике. Очевидно, что в результате получается пространство с многогранной метрикой в смысле нашего определения 1. В этом случае будем говорить, что эта *развёртка задаёт эту многогранную метрику*, или что эта развёртка есть

развёртка данной многогранной метрики. Мы будем говорить о развёртке как о метрическом пространстве, имея в виду эту метрику.

Обратно, любое компактное пространство с многогранной метрикой может быть представлено в виде развёртки, т.е. допускает разбиение на части, изометричные плоским многоугольникам. Это легко проверить: покрываем пространство конечным числом маленьких плоских треугольников (вообще говоря, перекрывающихся), а затем части, на которые границы этих треугольников разбивают пространство, объявляем многоугольниками развёртки.

Невырожденным выпуклым многогранником будем называть границу выпуклой оболочки нескольких точек в $\mathbb{R}^3$, не лежащих в одной плоскости. Вырожденным выпуклым многогранником (или дважды покрытым выпуклым многоугольником) будем называть сферу, снабжённую многогранной метрикой, развёртка которой состоит из двух равных выпуклых многоугольников, склеенных по соответственным сторонам. Везде ниже под словами «выпуклый многогранник» или просто «многогранник» будем понимать вырожденный или невырожденный выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^3$.

Определение 3. Кривизной вершины многогранника называется величина, равная 2π минус сумма углов граней многогранника при этой вершине.

Ясно, что естественная внутренняя метрика на выпуклом многограннике является многогранной метрикой положительной кривизны (и кривизны вершин этой метрики равны кривизнам вершин многогранника). Верно и обратное.

Теорема 2. [7]. Для любой многогранной метрики положительной кривизны на сфере существует выпуклый многогранник, обладающий этой метрикой. Этот многогранник определён однозначно с точностью до движения в $\mathbb{R}^3$, в том числе любая изометрия (в смысле внутренней метрики) многогранника на себя может быть реализована движением в $\mathbb{R}^3$.

Из авторского доказательства последней теоремы, а именно из [7, гл. 2 § 2 п. 2 и гл. 4 § 2 лемма 3] непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. Отображение, ставящее в соответствие данной многогранной метрике выпуклый многогранник, непрерывно относительно следующих топологий. Две многогранные метрики с одинаковым числом вершин ε -близки, если существуют их развёртки, состоящие лишь из треугольников и имеющие одинаковое комбинаторное строение (т.е. гомеоморфные как триангуляции сферы), соответствующие стороны которых отличаются не более чем на ε . Два многогранника с одинаковым числом вершин ε -близки, если их можно расположить в $\mathbb{R}^3$ так, чтобы расстояние между соответствующими вершинами было меньше ε .

Более того, при этом отображении образ границ многоугольников развёртки на многограннике непрерывно зависит от развёртки.

Замечание 1. Многогранник несёт в себе информацию двух видов: внутреннюю метрику и способ реализации в $\mathbb{R}^3$. В случае выпуклых многогранников внутренняя метрика однозначно определяет реализацию в $\mathbb{R}^3$, но по заданной многогранной метрике, вообще говоря, трудно найти эту реализацию (трудно найти рёбра — геодезические, по которым нужно «сгибать»).

Задачи, рассматриваемые в данной статье, затрагивают лишь свойства внутренней метрики многогранника, т.е. не зависят от реализации многогранника в $\mathbb{R}^3$, и потому могут рассматриваться как задачи о сетях на пространствах с многогранной метрикой. Часто для перехода от многогранной метрики к многограннику будет использоваться теорема 2. Вопрос способов поиска реализации метрики многогранником затрагиваться не будет.

2.2 Геодезические и многоугольники

Следующие объекты мы определим для произвольной многогранной метрики неотрицательной кривизны (а значит, и на произвольном выпуклом многограннике).

Кратчайшей с данными концами будем называть кривую, имеющую наименьшую длину среди всех кривых с этими концами.

Если каждая внутренняя точка данной кривой имеет окрестность, изометричную кругу или сектору круга (если точка лежит на границе многообразия), причём при изометрии каждой такой окрестности на круг или сектор круга участок кривой, содержащийся в этой окрестности, переходит в диаметр круга, то кривую будем называть *геодезической*. Отметим, что геодезическая всегда является локально кратчайшей кривой, а в случае многогранной метрики положительной кривизны на сфере верно и обратное: любая локально кратчайшая кривая является геодезической. *Геодезической ломаной* будем называть путь, который можно разбить на конечное число путей (*звеньев*), каждый из которых является геодезической.

Рассмотрим непрерывное отображение плоского замкнутого круга в пространство с многогранной метрикой, ограничение которого на внутренность круга является гомеоморфизмом. Граничная окружность плоского круга перейдёт при этом в некоторую непрерывную замкнутую кривую. Если эта кривая является геодезической ломаной, то образ на развёртке внутренности круга будем называть *многоугольником*, а образ окружности — его *границей*. Если границу нельзя представить как замкнутую геодезическую ломаную меньше чем с n звеньями, а с n звеньями — можно, то многоугольник будем называть n -угольником, а узлы этой ломаной — *вершинами* многоугольника.

Итак, многоугольник — открытое множество, гомеоморфное открытому двумерному диску. Если граница многоугольника не имеет самопересечений, то многоугольник с добавленной к нему границей будем называть *замкнутым геодезическим многоугольником*. В частности, любой диск с многогранной метрикой является замкнутым геодезическим многоугольником. Но граница многоугольника может иметь самопересечения, и тогда замыкание многоугольника на многограннике не обязательно гомеоморфно замкнутому кругу. Например, многогранник с выброшенным ребром AB — это двуугольник. Нам будет полезна формула для суммы углов многоугольника — одна из дискретных версий формулы Гаусса–Бонне.

Лемма 2. [7, Гл. 1 § 8 теор. 2]. Пусть α_i , $i = 1, \dots, n$ — внутренние углы n -угольника, а k_j , $j = 1, \dots, s$ — кривизны вершин многогранной метрики, находящихся внутри n -угольника. Тогда $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \pi(n - 2) + \sum_{j=1}^s k_j$.

Геодезически выпуклым будем называть подмножество пространства с многогранной метрикой, если любые две его точки можно соединить геодезической, лежащей целиком в этом множестве.

Лемма 3. [7, гл. 1, § 8]. На любом замкнутом (как метрическое пространство) многообразии с многогранной метрикой положительной кривизны каждые две точки можно соединить кратчайшей. Эта кратчайшая является геодезической ломаной. Причём преломляться (иметь с какой-то стороны угол, отличный от π) кратчайшая может только в вершинах границы многообразия, угол в которых больше π .

Следствие 1. Многоугольник, все углы которого меньше или равны π , является геодезически выпуклым.

Нам понадобится внутри такого многоугольника «соединять геодезическими» больше чем две точки. Этому посвящена следующая лемма.

Пусть дано подмножество U некоторого многогранника, и множество $X \subset U$. Выпуклой оболочкой $C(X, U)$ множества $X \subset U$ в множестве U будем называть наименьшее по включению множество C такое, что $X \subset C \subset U$ и любая содержащаяся в U геодезическая с концами в C целиком содержится в C .

Лемма 4. Пусть $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ — множество вершин многогранника, попавших внутрь многоугольника U , углы которого $\leq \pi$. Тогда выпуклая оболочка $C(X, U)$ — это либо замкнутый геодезический многоугольник с углами $\leq \pi$, вершины которого содержатся в X , либо геодезическая с концами из X , либо точка (при $n = 1$). Причём при $n \geq 2$ углы фигуры $U \setminus C$ в вершинах C не меньше π .

Доказательство. Для каждой пары X_i, X_j обозначим через γ_{ij} кратчайшую среди соединяющих их кривых, лежащих в U (в силу леммы 3 каждая из кратчайших будет геодезической на поверхности многогранника). Теперь среди всевозможных замкнутых n -звенных ломаных с множеством вершин X и звеньями среди выбранных кратчайших выберем ломаную наименьшей длины. От противного легко доказать, что такая ломаная будет несамопересекающейся и, значит, ограничивает некоторый геодезический многоугольник M_1 .

Если для некоторых X_i, X_j существует геодезическая γ с концами X_i, X_j , строго содержащаяся в $U \setminus M_1$, то γ разбивает $U \setminus M_1$ на две части: одна из них гомеоморфна кольцу, а другая гомеоморфна кругу и, значит, является геодезическим многоугольником, который мы обозначим через N_1 . Рассмотрим $M_1 \cup N_1 = M_2$. Докажем, что многоугольник M_2 имеет строго меньше вершин, чем M_1 . Действительно, внутрь M_2 попадают вершины M_1 , находящиеся на его границе между X_i и X_j и являющиеся вершинами N_1 . Отсутствие исчезнувших вершин означало бы, что N_1 является двуугольником, ограниченным геодезической γ и стороной многоугольника M_1 , но любой двуугольник содержит внутри себя точку положительной кривизны, а их внутри $U \setminus M_1$ нет по построению. Далее, на k -ом шаге рассматриваем $U \setminus M_k$ и, если существует геодезическая внутри $U \setminus M_k$ с концами в вершинах M_k , расширяем с помощью неё многоугольник M_k до M_{k+1} . Поскольку число вершин при этом убывает, процесс остановится на некоем многоугольнике M_∞ таком, что в $U \setminus M_\infty$ не существует геодезической с концами в вершинах M_∞ . Напомним, что M_∞ содержит (внутри или на границе) всё X , т.е. все содержащиеся в U вершины многогранника.

Докажем, что все углы $U \setminus M_\infty$ в вершинах M_∞ не меньше π .

Первый случай: M_∞ — одноугольник. Из формулы Гаусса–Бонне для многоугольников (по нашему определению гомеоморфных диску) легко вывести, что в случае

не содержащего вершин ненулевой кривизны и гомеоморфного кольцу $U \setminus M_\varkappa$ его сумма углов равна $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i + \beta = \pi(n+1)$, где α_i — углы многоугольника U , β — угол $U \setminus M_\varkappa$ в вершине одноугольника $M_\varkappa$. Поскольку $\alpha_i \leq \pi$ по условию леммы, $\beta \geq \pi$, что нам и требовалось.

Второй случай: $M_\varkappa$ имеет хотя бы две вершины. Предположим, что угол $U \setminus M_\varkappa$ в вершине X_2 многоугольника $M_\varkappa$ меньше π . Пусть он образован сторонами X_1X_2 и X_2X_3 (возможно, $X_1 = X_3$). Рассмотрим кратчайшую среди кривых, содержащихся в $U \setminus M_\varkappa$, соединяющих X_1 и X_3 и гомотопных в $U \setminus M_\varkappa$ ломаной $X_1X_2X_3$. Эта кратчайшая является геодезической ломаной с узлами в вершинах $U \setminus M_\varkappa$ с углом больше π (лемма 3), т.е. её узлы не могут лежать ни в вершинах U , ни в вершине X_2 . С другой стороны, она не может быть второй половиной границы многоугольника $M_\varkappa$, так как эта вторая половина не гомотопна ломаной $X_1X_2X_3$. Значит, эта геодезическая ломаная содержит звено, лежащее строго внутри $U \setminus M_\varkappa$ и соединяющее вершины $M_\varkappa$, но это звено есть геодезическая, которых не существует по определению $M_\varkappa$. Противоречие завершает доказательство того факта, что все углы $U \setminus M_\varkappa$ в вершинах $M_\varkappa$ не меньше π .

Докажем, что любая содержащаяся в U геодезическая с концами в $M_\varkappa$ целиком содержится в $M_\varkappa$. Предположим, что это не так, тогда существует геодезическая γ с концами на границе $M_\varkappa$ и внутренностью внутри $U \setminus M_\varkappa$. Геодезическая γ разбивает $U \setminus M_\varkappa$ на две части. Часть, гомеоморфная кругу, представляет собой геодезический многоугольник, все углы которого, за исключением двух углов в концах γ , заведомо больше π , но это противоречит формуле Гаусса–Бонне.

Наконец, докажем, что любое множество C такое, что $X \subset C \subset U$ и любая содержащаяся в U геодезическая с концами в C целиком содержится в C , содержит $M_\varkappa$. Тем самым будет доказано, что $M_\varkappa = C(X, U)$. Ясно, что все геодезические, соединяющие X_i и лежащие в U , содержатся в любом C . Сделаем триангуляцию многоугольника $M_\varkappa$ геодезическими так, чтобы множество вершин триангуляции совпадало с множеством X [7, Гл. 4, § 1, лемма 2]. Все стороны треугольников такой триангуляции лежат в C . Любой из её треугольников — изометричен плоскому, значит, любая его точка принадлежит некоторой геодезической с концами на его сторонах, а значит, тоже лежит в C . Итак, все точки треугольников триангуляции, а значит, и все точки многоугольника $M_\varkappa$, лежат в C , что и требовалось. $\square$

2.3 Сети

Сетью будем называть конечное семейство спрямляемых кривых, попарно не имеющих общих точек, за исключением общих концов. Кривые будем называть *рёбрами сети*, а их концы — *вершинами сети*. Сети Γ соответствует (абстрактный) граф $G = (V, E)$, в котором рёбра из E соответствуют кривым, задающим сеть, а вершины из V соответствуют концам кривых. Такой граф G мы называем *типом* сети Γ . Сеть будем называть *связной*, если граф G связан.

Определение 4. *Минимальная сеть на выпуклом многограннике* — это связная сеть со следующими свойствами: (1) все её рёбра — геодезические, (2) каждая вершина имеет степень 3, (3) угол между смежными рёбрами равен 120° .

Таким образом, в качестве определения минимальной сети мы приняли критерий

из теоремы 1 с учётом сделанного во введении соглашения. О связи между этим и другими определениями коротко сказано во введении, подробнее см. [2, 1].

Дополнение к образу минимальной сети на многограннике состоит из нескольких компонент связности, которые мы будем называть *ячейками* сети.

Определение 5. Минимальную сеть будем называть *простой*, если каждая её ячейка содержит не более одной вершины многогранника. Остальные минимальные сети будем называть *непростыми*.

Мы будем говорить, что две сети Γ_1, Γ_2 в пространствах X_1, X_2 *гомеоморфны*, если существует гомеоморфизм пространств X_1 и X_2 , переводящий сети друг в друга. Если длины соответствующих при гомеоморфизме рёбер двух сетей одинаковы, то две сети будем называть *изометричными*.

Плоский граф — это сеть на сфере, рассматриваемая с точностью до гомеоморфизма сферы. Ячейкам сети соответствуют *границы* плоского графа. Будем говорить, что минимальная сеть на многограннике *реализует* плоский граф G , если она является представителем этого плоского графа как класса гомеоморфных сетей.

Взвешенным графом (G, w) будем называть пару, состоящую из графа $G = (V, E)$ и положительной весовой функции на множестве его рёбер $w: E \rightarrow \mathbb{R}^+$.

3 Обзор результатов

Здесь мы приводим все результаты статьи, а также упоминаем другие известные нам факты о минимальных сетях на многогранниках. Короткие доказательства мы приводим здесь же, а более длинные вынесены в разделы 4–7.

3.1 Необходимое условие на кривизны вершин

Пусть дана минимальная сеть на многограннике. Запишем для каждой ячейки сети формулу Гаусса–Бонне (лемма 2): $\frac{2\pi n}{3} = \pi(n-2) + \sum_v k(v)$, где суммирование идёт по вершинам многогранника, попавшим внутрь данной n -угольной ячейки и $k(v)$ — кривизна вершины v (см. опр. 3). Получаем следующие утверждения.

Лемма 5. [2, Предл. 5.34]. *Для n -угольной ячейки минимальной сети сумма кривизн попавших в эту ячейку вершин многогранника равна $\sum_v k(v) = 2\pi - \frac{\pi n}{3}$. Минимальная сеть на выпуклом многограннике состоит из не более чем шестиугольных ячеек. Шестиугольные ячейки не содержат вершин многогранника.*

Теорема 3 (Необходимое условие на кривизны). *Для того, чтобы на выпуклом многограннике существовала минимальная сеть, необходимо, чтобы множество V его вершин можно было разбить на несколько подмножеств $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_s$ так, что сумма кривизн вершин в каждом подмножестве V_i кратна $\frac{\pi}{3}$ и меньше 2π , т.е. равна одному из чисел $\frac{\pi k}{3}$, $k = 1, \dots, 5$.*

Напомним, что сумма всех кривизн (сферического) многогранника равна 4π , и, значит, минимальная сеть некоторым образом разбивает 4π на части вида $\frac{k\pi}{3}$. Всего существует 47 таких разбиений (т.е. решений уравнения $x_1 \frac{\pi}{3} + x_2 \frac{2\pi}{3} + x_3 \pi + x_4 \frac{4\pi}{3} + x_5 \frac{5\pi}{3} = 4\pi$ в целых неотрицательных числах).

В [5] был приведён пример не имеющего минимальных сетей тетраэдра, кривизны вершин которого удовлетворяют соотношениям $k(A) = \frac{2\pi}{3}$, $k(B) = \frac{5\pi}{3}$, $k(C) + k(D) = \frac{5\pi}{3}$. Таким образом, **необходимое для существования минимальной сети условие на кривизны многогранника из теоремы 3 не является достаточным уже в случае тетраэдров**. Отметим, что приведённое в [5] доказательство этого факта было длинным и непрозрачным. В теореме 8 (раздел 3.3) мы покажем, как с помощью результатов настоящей статьи совсем коротко доказать недостаточность необходимого условия из теоремы 3.

3.2 От плоского графа к многограннику с сетью

Если забыть про длины рёбер и углы между ними, то минимальная сеть на многограннике — это одна из возможных реализаций на сфере некоторого плоского графа. Попробуем пойти в обратном направлении. Рассмотрим произвольный плоский граф с вершинами степени 3 и не более чем шестиугольными гранями. Припишем каждому ребру некоторый вес — положительное число. Зададимся целью построить многогранник, на котором этот граф был бы реализован как минимальная сеть, длины рёбер которой равнялись бы весам соответствующих рёбер графа. Если бы такая минимальная сеть нашлась, то каждая её ячейка представляла бы собой геодезический многоугольник, в котором нам известны величины всех углов (120°) и длины всех сторон. Следующая лемма объясняет, насколько эти данные задают геодезический многоугольник.

Лемма 6. (1) *Геодезический n -угольник с углами по 120° , длинами последовательных сторон $a_1, \dots, a_n$ (все $a_i > 0$, далее считаем $a_{i+n} \equiv a_i$ для всех i) и не содержащий внутри себя точек отрицательной кривизны существует тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

при $n = 6$: $a_1 + a_2 = a_4 + a_5$ и $a_2 + a_3 = a_5 + a_6$

при $n = 5$: $a_i < a_{i+2} + a_{i+3}$, $i = 1, \dots, 5$

при $n = 4$: $a_i < a_{i+1} + 2a_{i+2} + a_{i+3}$, $i = 1, \dots, 4$

при $n \leq 3$ существует всегда.

(2) *При выполнении условий из пункта 1 существует и n -угольник, содержащий внутри себя не более одной вершины ненулевой кривизны.*

(3) *Многоугольник из пункта 2 единственен с точностью до изометрии; его развёртка может быть построена конструктивно.*

Лемма будет доказана в разделе 4. А сейчас выведем из этой леммы следствия. Будем говорить, что *плоский взвешенный граф* реализуется на многограннике P как минимальная сеть, если на многограннике P существует минимальная сеть, реализующая этот плоский граф и имеющая длины рёбер, равные весам соответствующих рёбер графа. Ясно, что для каждой минимальной сети однозначно определён плоский взвешенный граф, который она реализует.

Всякому многограннику с минимальной сетью на нём естественным образом соответствует семейство геодезических многоугольников (ячеек сети), а длины их сторон удовлетворяют соотношениям из леммы 6. Значит, этим соотношениям обязаны удовлетворять веса рёбер любого плоского взвешенного графа, который может быть реализован как минимальная сеть.

Обратно, для каждой грани плоского графа с весовой функцией, удовлетворяющей этим соотношениям, в соответствии с первым пунктом леммы 6, существует геодезический многоугольник с углами по 120° и длинами сторон, равными весам соответствующих рёбер. Построим такие многоугольники для всех граней плоского графа. Зададим на множестве этих многоугольников правила склейки, отождествляя две стороны (вершины) многоугольников в том случае, если эти стороны (вершины) соответствуют одному и тому же ребру (или вершине) графа. Легко проверить, что при этом получается гомеоморфное сфере пространство с многогранной метрикой положительной кривизны. Причём по построению границы многоугольников этой развёртки образуют минимальную сеть, реализующую данный плоский взвешенный граф. По теореме 2 эта метрика реализуется некоторым выпуклым многогранником, и тем самым доказана достаточность соотношений из леммы 6 для существования многогранника с минимальной сетью, реализующей данный взвешенный граф. Итак, из леммы 6 мы вывели следующую теорему.

Теорема 4. *Для взвешенного плоского графа (G, w) существует выпуклый многогранник, на котором (G, w) реализуется как минимальная сеть, тогда и только тогда, когда (G, w) обладает свойствами:*

- (1) *степень каждой вершины равна трём;*
- (2) *всякая грань является не более чем шестиугольной;*
- (3) *$w(v_1v_2) + w(v_2v_3) = w(v_4v_5) + w(v_5v_6)$ для любой нумерации $v_1 \dots v_6$ последовательных вершин любой шестиугольной грани;*
- (4) *$w(v_1v_2) < w(v_2v_3) + 2w(v_3v_4) + w(v_4v_1)$ для любой нумерации $v_1 \dots v_4$ последовательных вершин любой четырёхугольной грани;*
- (5) *$w(v_1v_2) < w(v_3v_4) + w(v_4v_5)$ для любой нумерации $v_1 \dots v_5$ последовательных вершин любой пятиугольной грани.*

Для любого плоского графа G весовая функция, принимающая на каждом ребре значение 1, удовлетворяет условиям 3–5, откуда вытекает следующее следствие.

Следствие 2. *Для всякого плоского графа G , у которого степень всех вершин равна трём и все грани не более чем шестиугольные, существует выпуклый многогранник, на котором G реализуется как минимальная сеть.*

Следующая теорема — ещё одно следствие леммы 6.

Теорема 5. *Для всякого графа (G, w) со свойствами (1)–(5) из теоремы 4 существует единственный (с точностью до движения в $\mathbb{R}^3$) выпуклый многогранник, на котором (G, w) реализуется как простая минимальная сеть, причём на этом многограннике существует единственная с точностью до движения в $\mathbb{R}^3$ минимальная сеть, реализующая данный взвешенный граф.*

Доказательство. Доказательство существования представляет собой повторение доказательства достаточности в предыдущей теореме, но с учётом пункта 2 леммы 6. Для доказательства единственности предположим, что нашлись два многогранника, на каждом из которых данный плоский взвешенный граф реализуется как простая минимальная сеть. В силу пункта 3 леммы 6 ячейки двух сетей, соответствующие одной и той же грани плоского графа, представляют собой изометричные многоугольники. Поскольку комбинаторная структура двух сетей одинакова, эти ячейки

склеены между собой в двух сетях одинаковым образом, поэтому, объединяя изометрии пар ячеек, получаем изометрию одного многогранника на другой, переводящую данные минимальные сети друг в друга. По теореме 2 такая изометрия может быть реализована движением $\mathbb{R}^3$, что и требовалось. $\square$

Теоремы 4 и 5 без доказательств были опубликованы автором в заметке [8].

3.3 Система разрезов: геометрическое необходимое условие

Пусть многогранник P удовлетворяет необходимому условию из теоремы 3. Рассмотрим какое-нибудь из разбиений множества V его вершин на подмножества $V_1 \sqcup \dots \sqcup V_s$, подходящие под это условие. Как найти минимальную сеть, разбивающую вершины этим способом (или убедиться, что такой сети нет)? Для каждого V_i мы знаем, что его вершины должны содержаться в одной k_i -угольной ячейке сети, где k_i определяется соотношением $\sum_{v \in V_i} k(v) = 2\pi - \frac{2\pi k_i}{3}$ (лемма 5). Наша задача — «нарисовать» «вокруг» каждого множества V_i свой k_i -угольник U_i (ячейку) так, чтобы их внутренности не пересекались между собой и, более того, чтобы объединение границ всех U_i можно было превратить в минимальную сеть, возможно, добавив некоторые рёбра. Одна из сложностей здесь в том, что «окружать» несколько точек многоугольником можно *существенно разными способами*, т.е. не гомотопными в классе гомотопий, не проходящих через вершины многогранника. Чтобы формализовать понятие «способа окружения вершин ячейками», мы вводим следующее определение.

Определение 6. *Системой разрезов* на многограннике P будем называть разбиение его множества вершин $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_s$ и систему попарно непересекающихся подмножеств многогранника $\{M_i\}_{i=1}^s$, если для каждого $i = 1, \dots, s$

- (1) V_i удовлетворяет условию теоремы 3 (т.е. сумма кривизн вершин, входящих в V_i , равна одному из чисел $\pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$)
- (2) $V_i \subset M_i$
- (3) M_i — это либо точка из V_i , либо геодезическая с концами в V_i , либо замкнутый геодезический многоугольник, все вершины которого содержатся в V_i
- (4) все углы многоугольника $P \setminus M_i$ больше или равны π (если M_i не одноточечно.)

Пусть дана минимальная сеть с шестигульными ячейками U_i , $i = 1, \dots, s$ на многограннике с множеством вершин V . Положим $V_i = V \cap U_i$ и $M_i = C(V_i, U_i)$ (здесь $C(X, U)$ — выпуклая оболочка подмножества $X \subset U$, см. определения в разделе 2.2). Из леммы 4 следует, что $\{V_i, M_i\}_{i=1}^s$ — система разрезов. Будем говорить, что эта система разрезов *соответствует* данной минимальной сети. Итак, доказано следующее необходимое условие существования минимальной сети.

Теорема 6. *Если на выпуклом многограннике есть минимальная сеть, то на этом многограннике существует система разрезов.*

Это необходимое условие сильнее, чем необходимое условие из теоремы 3 (см. теорему 8 ниже). Однако оно по-прежнему не является достаточным.

Теорема 7. *Существует многогранник, имеющий систему разрезов, хотя на нём нет ни одной минимальной сети.*

Доказательство мы приводим в разделе 6. В качестве искомого примера будет построен многогранник, напоминающий очень вытянутый прямоугольный параллелепипед. Отметим, что это доказательство обобщает идеи неопубликованной дипломной работы Максима Гортинского, посвящённой минимальным сетям на кубе.

Пример: прямоугольный параллелепипед. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед P с размерами $\ell \times w \times h$. Кривизна каждой его вершины равна $\frac{\pi}{2}$. Какой может быть система разрезов? Из пункта (1) определения 3 вытекает, что каждое множество V_i должно состоять из двух вершин (их суммарная кривизна равна π). В качестве множеств M_i можно рассмотреть любую четвёрку попарно непересекающихся геодезических с концами в вершинах параллелепипеда (отметим, что при этом углы $P \setminus M_i$ равны $\frac{3\pi}{2} \geq \pi$, т.е. все условия из определения системы разрезов выполнены).

На любом параллелепипеде существует минимальная сеть. Например, пусть $\ell \geq w \geq h$, тогда несложно проверить, что существует сеть, изображённая на рис. 1 на одной из стандартных развёрток параллелепипеда $\ell \times w \times h$. Система разрезов, соответствующая этой минимальной сети, состоит из двух самых коротких рёбер и двух средних по длине (они выделены пунктиром).

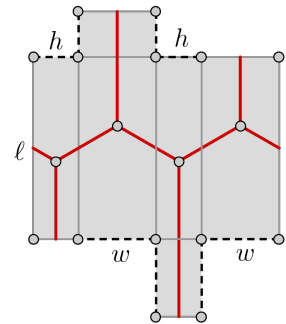


Рис. 1. Сеть на параллелепипеде

Доказательство следующей теоремы 8 показывает, что необходимое условие на кривизны из теоремы 3 слабее необходимого условия на наличие системы разрезов из теоремы 6.

Теорема 8. *Минимальной сети нет на любом тетраэдре $ABCD$, удовлетворяющем следующим условиям на кривизны вершин, длину ребра CD и площадь поверхности S (сумму площадей граней)*

- (1) $k(A) = \frac{2\pi}{3}$, $k(B) = \frac{5\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} < k(D) < \frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6} < k(C) < \frac{4\pi}{3}$;
- (2) $\frac{S}{|CD|^2} < \frac{1}{4}$.

Замечание 2. *Можно проверить, что эта теорема представляет собой усиление теоремы 5 из работы [5], упоминавшейся в разделе 3.1.*

На рис. 2 показано, как построить пример развёртки $A_1C_1DC_2A_2B$ дважды покрытого четырёхугольника $ABCD$, подходящего под условия теоремы 8. Здесь XA_1BA_2 — ромб с углом $\frac{\pi}{3}$, точка D принадлежит диагонали XB ромба, $\angle C_1DC_2$ чуть больше $\frac{\pi}{3}$, а длина $A_1C_1 = A_2C_2$ мала по сравнению со стороной ромба.

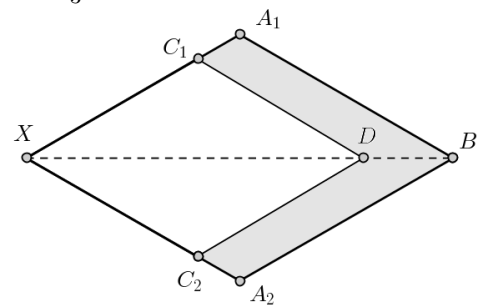


Рис. 2. Развёртка тетраэдра

Доказательство. Покажем, что на многограннике $ABCD$, удовлетворяющем условиям теоремы, не существует системы разрезов — тогда по теореме 6 на нём не существует и минимальных сетей. Предположим противное и рассмотрим систему разрезов $\{V_i, M_i\}$. Из условия (1) следует, что кривизна каждой из вершин C и D не кратна $\frac{\pi}{3}$. Учитывая тот факт, что сумма кривизн всех вершин сферического многогранника равна 4π , получаем, что $k(C) + k(D) = \frac{5\pi}{3}$ и единственное возможное разбиение вершин на три подмножества в системе разрезов — это

$V_1 = \{A\}, V_2 = \{B\}, V_3 = \{C, D\}$. Рассмотрим множество M_3 . Поскольку полный угол в вершине C меньше π , C не может лежать на границе M_3 , иначе нарушится свойство (4) из опр. 6. Значит, на границе M_3 лежит только вершина D , т.е. M_3 — одноугольник с вершиной D , содержащий внутри себя вершину C .

Докажем, что такого одноугольника на нашем тетраэдре не существует. По-прежнему предполагая противное, найдём кратчайшую геодезическую γ внутри M_3 , соединяющую C и D (лемма 3). Тогда $M_3 \setminus \gamma$ — геодезический треугольник, изометричный равнобедренному треугольнику CD_1D_2 на плоскости. Причём в треугольнике CD_1D_2 угол при вершине C равен полному углу при вершине C тетраэдра, т.е. $\frac{2\pi}{3} < \angle D_1CD_2 < \frac{5\pi}{6}$. Оценим площадь треугольника $S(CD_1D_2) = \frac{1}{2}|CD_1| \cdot |CD_2| \sin \angle D_1CD_2 > \frac{1}{2}(\ell(\gamma))^2 \cdot \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}|CD|^2$, поскольку ребро короче любой геодезической, соединяющей его концы. Но площадь треугольника равна площади одноугольника M_3 , которая, в свою очередь, меньше площади поверхности тетраэдра, обозначенной через S в формулировке теоремы. Получаем $S > S(D_1CD_2) > \frac{1}{4}|CD|^2$, противоречие с условием (2) доказываемой теоремы. $\square$

3.4 Сведение задачи к простым минимальным сетям

Из теорем 4 и 5 вытекает следующий факт.

Следствие 3. *Для всякой минимальной сети N на выпуклом многограннике P существует единственный выпуклый многогранник $P_S(N)$, на котором существует простая минимальная сеть, изометричная сети N .*

Более того, в разделе 5 будет показано, что для всех минимальных сетей N на многограннике P , которым соответствует данная система разрезов, многогранник $P_S(N)$ будет одним и тем же, т.е. верна следующая теорема.

Теорема 9. *Для каждой системы разрезов M_{cut} на многограннике P существует и единственен многогранник $P_S(M_{cut})$ такой, что для любой минимальной сети N на многограннике P , которой соответствует система разрезов M_{cut} , существует простая минимальная сеть на многограннике $P_S(M_{cut})$, изометричная сети N .*

В доказательстве будет показано, что развёртку многогранника $P_S(M_{cut})$ можно построить конструктивно. Таким образом, для изучения минимальных сетей на данном многограннике P можно рассмотреть всевозможные системы разрезов на P , для каждой системы разрезов M_{cut} построить соответствующий многогранник $P_S(M_{cut})$ и на нём изучить простые минимальные сети. Затем перенести полученные результаты обратно на многогранник P . При этом, вообще говоря, не все простые минимальные сети, реализующиеся на $P_S(M_{cut})$, реализуются на P , верно только утверждение в обратном направлении.

Эта конструкция принципиально сводит задачу поиска произвольных минимальных сетей на данном многограннике P к задаче поиска простых минимальных сетей на некотором семействе многогранников $\mathcal{S}(P)$. Вторая задача в некотором смысле проще первой, поскольку простые минимальные сети существуют лишь на многогранниках, все кривизны которых кратны $\frac{\pi}{3}$. К сожалению, гарантировать, что семейство $\mathcal{S}(P)$ конечно, мы не можем, поскольку существуют многогранники с бесконечным числом систем разрезов (например, куб).

Замечание 3. Поскольку для любых двух точек многогранника множество геодезических с концами в этих точках не более чем счётно, множество всех возможных систем разрезов на любом многограннике, а значит, и семейство $\mathcal{S}(P)$, тоже не более чем счётно.

Гипотеза 1. Каждый выпуклый многогранник имеет не более чем конечное число систем разрезов, которым соответствуют минимальные сети.

3.5 Дважды покрытые треугольники

Теорема 10. В случае многогранников с тремя вершинами (т.е. дважды покрытых треугольников) необходимое условие на кривизны из теоремы 3 является достаточным.

Доказательство. Для выполнения необходимого условия из теоремы 3 вершины многогранника должны иметь кривизны $\{\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$, $\{\pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$ или $\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$. Каждому из этих наборов кривизн соответствует один (с точностью до гомотетии) дважды покрытый треугольник. На рис. 3 для каждого из случаев изображена развёртка многогранника и пример минимальной сети на нём. $\square$

Параметрической деформацией сети Γ типа G будем называть семейство сетей $\Gamma_t, t \in [0, t_0]$ того же типа G такое, что $\Gamma_0 = \Gamma$ и для каждого ребра a графа G семейство соответствующих кривых $\Gamma_t(a)$ является непрерывной деформацией кривой $\Gamma_0(a)$, т.е. ребра сети Γ .

Теорема 11. На дважды покрытом треугольнике любая минимальная сеть может быть переведена параметрической деформацией в класс минимальных сетей в сеть, длины всех рёбер которой одинаковы.

Доказательство опирается на теорему 5 и тот факт, что в случае трёх вершин их кривизны однозначно определяют многогранник с точностью до подобия. Итак, пусть на любом из трёх возможных дважды покрытых треугольников имеется минимальная сеть Γ типа G , реализующая некоторый плоский граф (G, w) (т.е. длина ребра $\Gamma(e)$ равна $w(e)$, $e \in E(G)$). Рассмотрим семейство взвешенных графов $(G, w_t), 0 \leq t \leq 1$ с весовой функцией $w_t(e) = (1 - t)w(e) + t$. Докажем, что все эти взвешенные графы реализуются как минимальные сети на многогранниках. Для этого проверим выполнение условий теоремы 4. Условия 1 и 2 выполнены, так как (G, w_0) реализуется. Кроме того, $w_1(e) \equiv 1$, поэтому для (G, w_1) также выполнены все условия теоремы 4. При фиксированном G условия 3–5 ограничивают выпуклое подмножество в множестве всех весовых функций, поэтому w_t , как выпуклая линейная комбинация w_0 и w_1 , также удовлетворяет условиям 3–5, а значит, по теореме 5, существует выпуклый многогранник P_t , на котором взвешенный плоский граф (G, w_t) реализуется как простая минимальная сеть. Тогда многогранник P_t должен иметь ровно три вершины тех же кривизн, что и исходный дважды покрытый треугольник P_0 , а значит, P_t может отличаться от P_0 только растяжением с некоторым

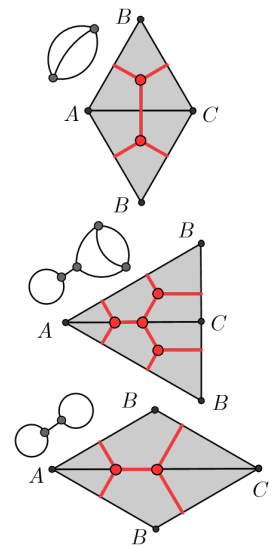


Рис. 3. Все дважды покрытые треугольники, имеющие минимальную сеть

коэффициентом k_t . Значит, каждый взвешенный граф из семейства $(G, \frac{1}{k_t}w_t)$ реализуется на P_0 как минимальная сеть. Обозначим эту сеть через Γ_t . Нам осталось доказать, что параметрическая деформация Γ_t непрерывна. Коэффициент k_t непрерывен, так как он пропорционален площади развёртки, а она непрерывно зависит от w_t , поэтому семейство взвешенных графов $(G, \frac{1}{k_t}w_t)$ непрерывно. Значит, соответствующие многогранные метрики непрерывно зависят от t (в смысле топологии из леммы 1). Рассмотрим отображение, ставящее в соответствие развёртке (многогранной метрике) пару (изометричный ей многогранник, границы многоугольников развёртки, нарисованные на этом многограннике). В силу леммы 1 это отображение непрерывно (относительно топологии в образе, считающей близкими близкие многогранники с близким разбиением на многоугольники развёртки). В нашем случае образ границ многоугольников развёртки — это сеть, откуда и вытекает, что Γ_t непрерывно зависит от t . $\square$

Замечание 4. Из теорем 5 и 11 вытекает, что минимальные сети на дважды покрытых треугольниках однозначно (с точностью до линейной деформации) соответствуют 3-валентным плоским графам с тремя гранями степени меньше 6 и остальными гранями степени ровно 6. Или, эквивалентно, двойственным графам, т.е. (рассматриваемым с точностью до гомеоморфизма сферы) триангуляциям сферы, все вершины которых, за исключением трёх, имеют степень 6, а три оставшиеся имеют степени $(1, 2, 3)$, $(2, 2, 2)$ или $(1, 1, 4)$. Множество таких триангуляций, как уже отмечалось во введении, изучено в работе [3].

В случае многогранников с тремя вершинами геометрическая конструкция построения триангуляций, описанная в [3], оказывается совсем простой и даёт результат, который мы формулируем в следствии 4 после краткого описания конструкции.

Конструкция. Возьмём любую из изображённых на рис. 3 развёрток (мы возьмём «чистую» развёртку, без нарисованной на ней сети) и поместим её на плоскость, разбитую на правильные шестиугольники, так, чтобы все вершины развёртки оказались в центрах шестиугольников разбиения. «Вырежем» развёртку из плоскости и склеим дважды покрытый треугольник T . Попадавшие на развёртку «следы» шестиугольников разбиения превратятся в минимальную сеть на T .

Следствие 4. Любая минимальная сеть на дважды покрытом треугольнике может быть линейной деформацией в классе минимальных сетей переведена в минимальную сеть, полученную в результате этой конструкции.

Для произвольного многогранника аналогии теоремы 11 и замечания 4 неверны даже в случае простых сетей, что и делает задачу о минимальных сетях на многогранниках не только комбинаторной, но и геометрической.

3.6 Существование минимальных сетей

Поскольку необходимое условие на кривизны (теорема 3) не является достаточным, возникает вопрос о достаточности следующего более сильного условия (не являющегося необходимым).

Гипотеза 2. Если кривизны всех вершин многогранника кратны $\frac{\pi}{3}$, то на этом многограннике существует минимальная сеть.

Помимо дважды покрытых треугольников (см. выше), это верно для тетраэдров.

Теорема 12. [5]. *Если кривизны всех вершин многогранника с четырьмя вершинами кратны $\frac{\pi}{3}$, то на этом многограннике существует минимальная сеть.*

Доказательство легко вытекает из существования минимальных сетей на определённых классах тетраэдров, доказанного в [5] путём явного построения *непростых* минимальных сетей.

По лемме 5 из существования простой минимальной сети на многограннике следует, что кривизна каждой вершины этого многогранника делится на $\frac{\pi}{3}$. Следующая гипотеза — усиление гипотезы 2.

Гипотеза 3. *Если кривизны всех вершин многогранника кратны $\frac{\pi}{3}$, то на этом многограннике существует простая минимальная сеть.*

В случае многогранников с тремя вершинами гипотеза 3 верна, как показывает доказанная выше теорема 10. Следующий несложный факт следует, например, из классификации минимальных сетей на равногранных тетраэдрах [2, 4].

Теорема 13. [4]. *На любом многограннике с четырьмя вершинами и кривизнами $\{\pi, \pi, \pi, \pi\}$ существует простая минимальная сеть.*

Теорему 14 можно рассматривать как аргумент «в пользу» гипотезы 3.

Теорема 14. *Пусть $\mathcal{P}(k_1, \dots, k_n)$ — множество многогранников с n вершинами и кривизнами $\frac{k_1\pi}{3}, \dots, \frac{k_n\pi}{3}$, где $k_i \in \mathbb{Z}, k_i \geq 0$. Тогда множество многогранников, имеющих простую минимальную сеть, открыто и всюду плотно в $\mathcal{P}(k_1, \dots, k_n)$.*

Открытость и всюду плотность здесь понимается относительно топологии на $\mathcal{P}(k_1, \dots, k_n)$, порождённой следующим отношением. Два многогранника с n занумерованными вершинами ε -близки, если их можно расположить в $\mathbb{R}^3$ так, что расстояния между соответствующими вершинами меньше ε . Доказательство теоремы 14 приведено в разделе 7.

3.7 Физические соображения

Вернёмся к сделанному во введении замечанию, что минимальная сеть «натянута на многогранник и не соскальзывает с его поверхности». Ясно, что на любом многограннике можно нарисовать сколько угодно неминимальных сетей. Естественно спросить: а что происходит с соответствующими сетями из эластичных нитей, т.е. «куда» они «соскальзывают»? Соскальзывая, сеть сокращает свою длину, и если в некоторый «регулярный» момент соскальзывание прекратится, то это будет означать, что сеть достигла локального минимума длины, т.е. превратилась в минимальную сеть! Однако чаще такое соскальзывание заканчивается тем, что рёбра сети «наезжают» на вершины многогранника, переходят через них, и, в конце концов, вся сеть оказывается внутри одной грани, где и сжимается в точку — абсолютный минимум длины.

Если же удаётся показать, что на данном многограннике «соскальзывание» должно «остановиться», то это значит, что на данном многограннике существует минимальная сеть. Например, можно показать, что ребро сети не может «наехать» на

вершину с полным углом не больше π . Но, к сожалению, многогранников, у которых полные углы всех вершин не больше π (т.е. кривизны не меньше π), очень мало: это равногранные тетраэдры и дважды покрытый равносторонний треугольник; с минимальными сетями на этих многогранниках и так всё ясно.

Описанные соображения оказались полезны в случае многогранников с кривизнами $\{\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}$.

Теорема 15. *На любом тетраэдре с кривизнами $\{\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}$ существует простая минимальная сеть, а именно, всегда существует минимальная сеть, реализующая плоский граф, изображённый на рис. 4.*

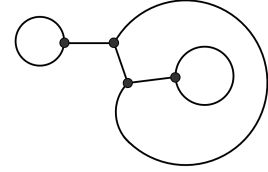


Рис. 4. Граф

Доказательство этой теоремы мы не приводим из-за ограничения объёма статьи. Сеть, существование которой устанавливается в доказательстве, имеет наименьшую длину среди сетей на данном тетраэдре, имеющих тип, изображённый на рис. 4, и содержащих внутри каждой своей пятиугольной ячейки одну вершину тетраэдра кривизны $\frac{\pi}{3}$, а внутри каждой одноугольной ячейки — одну вершину кривизны $\frac{5\pi}{3}$.

4 Доказательство леммы 6

При $n = 6$ из формулы Гаусса-Бонне (лемма 2) вытекает, что суммарная кривизна вершин внутри шестиугольника с углами по 120° должна быть равна нулю, т.е. речь идёт о плоском шестиугольнике с углами по 120° и заданными длинами сторон. Пусть $a_1 + a_2 = a_4 + a_5$ и $a_2 + a_3 = a_5 + a_6$. Рассмотрим правильный треугольник со стороной $a_1 + a_2 + a_3$ и отрезем от него три угла в виде правильных треугольников со сторонами a_1 , a_3 и a_5 . Из равенств $a_1 + a_2 + a_3 = a_3 + a_4 + a_5 = a_5 + a_6 + a_1$ следует, что получившийся шестиугольник будет иметь требуемые длины сторон. Для доказательства в обратную сторону нужно, наоборот, достроить шестиугольник до правильного треугольника. Пункты 2 и 3 леммы в этом случае очевидны.

При $n < 6$ суммарная кривизна точек внутри n -угольника с углами 120° равна $2\pi - \frac{\pi}{3}n$ (лемма 2). Из теоремы 8 книги [7, гл. 5, § 1] вытекает, что если для данных длин сторон и углов существует геодезический многоугольник, то существует такой многоугольник, содержащий внутри себя единственную вершину положительной кривизны (см. также сноску к доказательству этой теоремы 8 в книге [7, гл. 5, § 1]). Поэтому пункт 2 леммы 6 вытекает из пункта 1, и для доказательства пункта 1 достаточно рассматривать многоугольники, содержащие ровно одну вершину положительной кривизны. Дальнейшие рассуждения (кроме леммы 7) во многом аналогичны доказательству той же теоремы 8 книги [7, гл. 5, § 1], но мы приводим их для полноты.

Пусть для данных $a_1, \dots, a_n$ существует геодезический многоугольник $A_1 A_2 \dots A_n$, $\angle A_i = 120^\circ$, содержащий внутри себя единственную вершину положительной кривизны X . Через γ_i обозначим кратчайшую внутри этого многоугольника, соединяющую X и A_i (γ_i существуют и являются геодезическими, см. лемму 3). Легко показать, что в нашем случае γ_i определены однозначно и не пересекаются между собой. Треугольники $A_i A_{i+1} X$, ограниченные γ_i, γ_{i+1} и стороной $A_i A_{i+1}$, не содержат внутри себя вершин ненулевой кривизны, и потому изометричны треугольникам на плоскости. Нарисуем эти треугольники на плоскости последовательно,

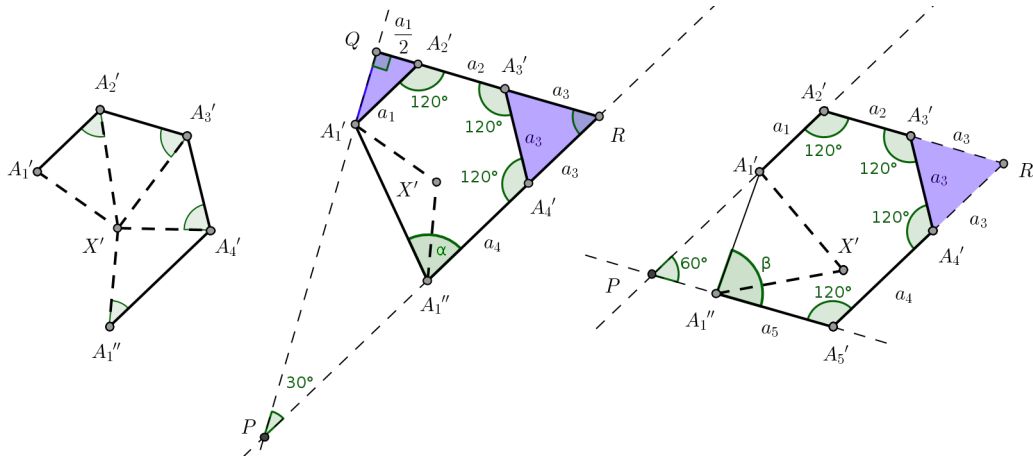


Рис. 5. В центре: $\alpha > 30^\circ \Leftrightarrow 2(\frac{a_1}{2} + a_2 + a_3) > a_4 + a_3$; справа: $\beta > 60^\circ \Leftrightarrow a_5 < a_2 + a_3$.

сначала $A'_1X'A'_2$ (изометричный треугольнику A_1XA_2), затем $A'_2X'A'_3$ (изометричный треугольнику A_2XA_3 , по другую сторону от отрезка A'_2X'), и т.д., а последний треугольник, изометричный треугольнику A_nXA_1 , обозначим через $A'_nX'A''_1$. Тогда суммарный угол треугольников при вершине X' равен полному углу многогранной метрики в вершине X , т.е. $\frac{\pi}{3}n$. Отсюда ясно, что треугольники не перекрываются, и их объединение представляет собой вложенный $(n+2)$ -угольник на плоскости, ограниченный замкнутой ломаной $A'_1A'_2 \dots A'_nA''_1X'A'_1$, причём $|A'_1X'| = \ell(\gamma_1) = |A''_1X'|$, $\angle A'_i = 120^\circ, i = 2, \dots, n$, $|A'_1A'_2| = a_1, |A'_iA'_{i+1}| = a_i, |A'_nA''_1| = a_n, \angle X' = \frac{\pi}{3}n$. Обратно, если такой плоский многоугольник для данных $a_1, \dots, a_n$ существует, то задав на нём склейку $A'_1X' \equiv A''_1X'$, получим развёртку требуемого геодезического многоугольника. Итак, пункт 1 леммы 6 равносильна следующей лемме 7.

Лемма 7. Плоский многоугольник $A'_1A'_2 \dots A'_nA''_1X'$ со свойствами $|A'_1A'_2| = a_1, |A'_iA'_{i+1}| = a_i, |A'_nA''_1| = a_n, |A'_1X'| = |A''_1X'|, \angle A'_i = 120^\circ, i = 2, \dots, n, \angle X' = \frac{\pi}{3}n$ существует при $n \leq 3$: для любых $a_i > 0$, а при больших n — тогда и только тогда, когда

при $n = 4$: $a_i < a_{i+1} + 2a_{i+2} + a_{i+3}, i = 1, \dots, 4$ (считаем $a_{i+4} = a_i$ для всех i);

при $n = 5$: $a_i < a_{i+2} + a_{i+3}, i = 1, \dots, 5$ (считаем $a_{i+5} = a_i$ для всех i).

Прежде чем доказывать лемму 7, заметим, что ломаная $A'_1A'_2 \dots A'_nA''_1$ однозначно задаётся длинами своих сторон $(a_1, \dots, a_n)$ и (ориентированными) углами (все по 120°). Положение точки X' тоже определено однозначно — это вершина равнобедренного треугольника с данным основанием и углом. Значит, набор $a_1, \dots, a_n$ однозначно задаёт построенную нами развёртку геодезического многоугольника, а значит, и сам многоугольник, т.е. доказан пункт 3 леммы 6.

Доказательство леммы 7. Для заданных $a_1, \dots, a_n$ рассмотрим плоскую ломаную $A'_1A'_2 \dots A'_nA''_1$ с данными длинами сторон и углами по 120° , а затем построим точку X' как вершину равнобедренного треугольника $A'_1A''_1X'$ с нужным углом X' . При $n = 1, 2, 3$ внутренний угол X' ломаной $A'_1A'_2 \dots A'_nA''_1X'$ равен $\frac{\pi n}{3} \leq \pi$, поэтому очевидно, что ломаная $A'_1A'_2 \dots A'_nA''_1X'A'_1$ не имеет самопересечений и ограничивает вложенный многоугольник, т.е. случай $n \leq 3$ разобран.

При $n = 4$ многоугольник $A'_1A'_2A'_3A'_4A''_1$ при любых $a_1, \dots, a_4$ является выпуклым. Пусть нумерация вершин в $A'_1A'_2A'_3A'_4A''_1$ идёт по часовой стрелке. Будем говорить,

что $\angle ABC$ положителен, если луч AB переходит в луч BC при повороте против часовой стрелки на угол, меньший π . Отсутствие самопересечений у замкнутой ломаной $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4 A''_1 X' A'_1$ равносильно тому, что точка X' лежит внутри пятиугольника $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4 A''_1$, а это равносильно положительности углов $\angle A'_i A'_{i+1} X', i = 1, 2, 3$ и $\angle A'_4 A''_1 X'$. Докажем, что положительность углов равносильна системе неравенств.

Сначала докажем, что $\angle A'_4 A''_1 X'$ положителен тогда и только тогда, когда $a_4 < a_3 + 2a_2 + a_1$. Построим правильный $\triangle A'_3 A'_4 R$ и прямоугольный $\triangle A'_1 A'_2 Q$ с углами $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ и гипотенузой $A'_1 A'_2$ и рассмотрим $\triangle PQR$ с углами $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, см. рис. 5. Заметим, что $|QR| = \frac{a_1}{2} + a_2 + a_3$, а $|A'_2 R| = a_4 + a_3$. Значит, $|PR| = a_1 + 2a_2 + 2a_3 > a_4 + a_3 = |A'_1 R|$ равносильно тому, что A''_1 лежит внутри гипотенузы треугольника PQR , и потому равносильно условию $\angle A'_1 A''_1 A'_4 > \frac{\pi}{6}$, т.е. $\angle A'_4 A''_1 X' > 0$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь любой из углов $\angle A'_{k-1} A'_k X', i = 2, 3, 4$, и замкнутую ломаную $L(k)$, состоящую из отрезков $A'_1 X', X' A'_k$ и участка ломаной $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4 A''_1$ от A'_k до A''_1 . Повернём ломаную $L(k)$ на $\frac{2\pi}{3}$ по часовой стрелке вокруг точки X' . При этом точка A''_1 перейдёт в A'_1 , образ вершины $A'_i, k \leq i \leq 4$ обозначим через A''_i и рассмотрим ломаную $A''_k \dots A''_4 A'_1 A'_2 \dots A'_{k-1}$. Все углы этой ломаной по построению равны 120° , длины сторон — $a_k, a_{k+1}, \dots, a_n, a_1, \dots, a_{k-1}$, $|A''_k X'| = |A'_k X'|$, «внутренний» $\angle A'_k X' A''_k = 240^\circ$. Т.е. это ломаная с теми же свойствами, но для набора $(a_k, a_{k+1}, \dots, a_n, a_1, \dots, a_{k-1})$. Условие того, что $\angle A'_{k-1} A'_k X'$ положителен равносильно условию, что положителен его образ при повороте, т.е. $\angle A''_{k-1} A''_k X'$, а это уже выведенное нами условие на положительность «крайнего» угла для многоугольника $A''_k \dots A''_4 A'_1 A'_2 \dots A'_{k-1} A'_k X'$, т.е. в точности соответствующее неравенство системы.

Случай $n = 5$ может быть разобран аналогично с использованием рис. 5. $\square$

5 Доказательство теоремы 9

Пусть дана система разрезов $M_{cut} = \{V_i, M_i\}$. Рассмотрим незамкнутый многогранник Q , получающийся из P выбрасыванием всех неодноточечных M_i . По определению 6 углы Q во всех граничных вершинах не меньше π , поэтому по теореме [7, гл. 5, § 1, теор. 8] существует и единственен замкнутый многогранник P_S , содержащий незамкнутый многогранник Q_1 , изометричный Q и такой, что всякая компонента связности $P_S \setminus Q_1$ содержит ровно по одной вершине многогранника P_S . В [7] развёртка многогранника P_S строится конструктивно — используется построение развёртки геодезического многоугольника с заданными длинами сторон и величинами углов и единственной вершиной положительной кривизны. Это построение выполняется с помощью развёртки, аналогичной развёртке $A'_1 A'_2 \dots A'_n A''_1 X'$ из предыдущего пункта.

Если минимальной сети N на многограннике P соответствует система разрезов M_{cut} , то $N \subset Q$. Поскольку многогранник Q_1 изометричен Q , на нём имеется сеть N_1 , изометричная (как множество, в смысле внутренних метрик на Q и Q_1) минимальной сети N . По построению в каждой шестигульной ячейке сети N_1 содержится ровно одна вершина многогранника P_S . Итак, все минимальные сети с данной системой разрезов на P реализуются как простые минимальные сети на многограннике P_S . Единственность P_S вытекает из теоремы 5. $\square$

6 Пример многогранника без минимальных сетей, имеющего систему разрезов

Этот раздел посвящён доказательству теоремы 7. В качестве искомого примера мы построим многогранник, напоминающий очень вытянутый прямоугольный параллелепипед. Дело в том, что при достаточно большой длине ℓ (по сравнению с w и h) на параллелепипеде $\ell \times w \times h$ не существует минимальной сети с системой разрезов, состоящей из четырёх рёбер длины ℓ . Однако, как мы отмечали в разделе 3.3, на любом параллелепипеде существует минимальная сеть (хоть с какой-нибудь системой разрезов), так что сам параллелепипед не подходит для доказательства теоремы 7. Мы чуть-чуть пошевелим вершины «длинного» параллелепипеда так, чтобы на нём «не осталось» систем разрезов, содержащих относительно короткие геодезические (как в примере на рис. 1), — тогда минимальная сеть должна иметь систему разрезов с длинными геодезическими, что, как мы покажем, невозможно, и тем самым будет доказано отсутствие минимальных сетей на этом многограннике.

Лемма 8. *Для любых положительных ℓ, w, h и ε и прямоугольного параллелепипеда P размером $\ell \times w \times h$ существует многогранник P^* с восемью вершинами и биекция $\beta: V(P) \rightarrow V(P^*)$ такие, что*

- (1) $|k(v) - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon$ для всех $v \in V(P^*)$;
- (2) для $v_1, v_2 \in V(P)$ равенство $k(\beta(v_1)) + k(\beta(v_2)) = \pi$ выполняется тогда и только тогда, когда v_1 и v_2 — концы некоторого ребра длины ℓ , причём в этом случае расстояние между $\beta(v_1)$ и $\beta(v_2)$ на многограннике P^* не меньше $\ell - 2\varepsilon$;
- (3) площади поверхности $S(P)$ и $S(P^*)$ двух многогранников отличаются не более чем на ε .

Доказательство леммы состоит в описании развёртки многогранника P^* , изображённой на рис. 6. Обозначим вершины параллелепипеда P через A, B, C, D, K, L, M, N , пусть $AK = BL = CM = DN = \ell$. Рассмотрим произвольный выпуклый четырёхугольник $A_1A_1^*K_1^*K_1$, в котором $A_1K_1 = \ell$, $\angle A_1 = \angle K_1 = 45^\circ$, и пусть $A_2A_2^*K_2^*K_2$ — равный ему четырёхугольник. Рассмотрим дизъюнктное объединение граней параллелепипеда и двух построенных четырёхугольников и зададим на этом множестве правила склейки: отождествляются рёбра граней параллелепипеда, соответствующие одному ребру, за исключением пары сторон, соответствующих ребру AK ; отождествляются стороны $A_1A_1^* \equiv A_2A_2^*$, $A_1^*K_1^* \equiv A_2^*K_2^*$, $K_1^*K_1 \equiv K_2^*K_2$; сторона A_1K_1 отождествляется со стороной AK грани $AKND$, а сторона A_2K_2 — со стороной AK грани $AKLB$. Получаем гомеоморфную сфере развёртку положительной кривизны (определение 2), которая по теореме 2 изометрична некоторому выпуклому многограннику. Заметим, что точки A и K в новой развёртке имеют нулевую кривизну (к имевшемуся полному углу $\frac{3\pi}{2}$ мы приклеили два угла по $\frac{\pi}{4}$), зато появились вершины A^* и K^* (так мы обозначаем точки, полученные при склеивании A_1^* и A_2^* , K_1^* и K_2^*). При этом, меняя длины сторон $A_1A_1^*$ и $K_1K_1^*$, мы можем менять кривизны вершин A^* и K^* , но в сумме они в любом случае будут давать π .

Тем же способом «приклеим» к параллелепипеду ещё три похожие, но попарно не равные «заплатки» вдоль рёбер BL, CM, DN , см. рис. 6. При этом выберем приклеиваемые четырёхугольники так, чтобы углы четырёхугольников в вершинах со звёздочками были попарно различны и близки к $\frac{3\pi}{4}$, а боковые стороны малы (не

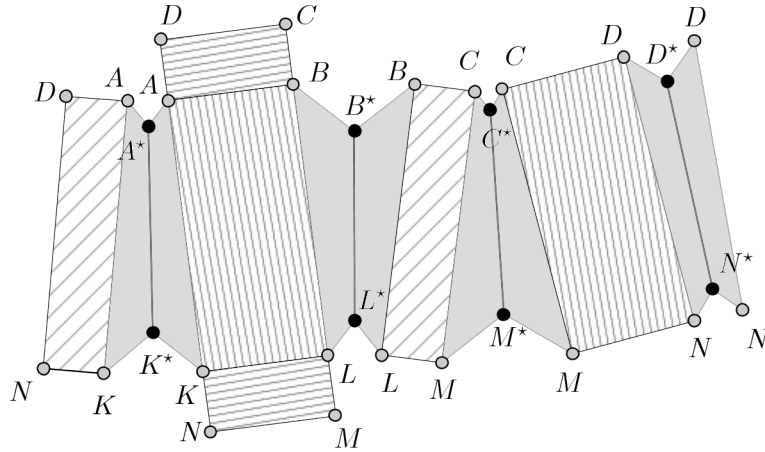


Рис. 6. Развёртка многогранника P^* , полученного малым шевелением параллелепипеда

превосходят $\min(\varepsilon, \frac{\varepsilon}{16\ell})$. Тогда получившийся в результате многогранник P^* с вершинами $A^*, B^*, C^*, D^*, K^*, L^*, M^*, N^*$ будет удовлетворять требуемым свойствам. $\square$

Далее будем рассматривать многогранник P^* , построенный с помощью этой леммы для маленького ε (скажем, меньше $\frac{1}{100}$) и большого ℓ (скажем, $\ell > 100(w+b+\varepsilon)$).

Предположим, что на P^* существует минимальная сеть N и $M_{cut} = \{V_i, M_i\}$ — соответствующая ей система разрезов. Поскольку кривизны вершин многогранника P^* ε -близки к $\frac{\pi}{2}$, сумма кривизн любых m вершин $\frac{m}{100}$ -близка к $\frac{m\pi}{2}$, а значит, группа вершин с суммарной кривизной, кратной $\frac{\pi}{3}$ и меньшей 2π , может состоять только из двух вершин (и иметь суммарную кривизну π). Учитывая пункт (2) леммы, получаем, что с точностью до изменения номеров V_i выполняется $V_1 = \{A^*, K^*\}$, $V_2 = \{B^*, L^*\}$, $V_3 = \{C^*, M^*\}$, $V_4 = \{D^*, N^*\}$. Далее, каждое множество M_i — это геодезическая длиной не меньше $\ell - 2\varepsilon$ (одноугольник оно не может быть из-за того, что кривизны обеих вершин в паре V_i близки к $\frac{\pi}{2}$, а если внутри одноугольника содержится единственная вершина, то по формуле Гаусса–Бонне (лемма 2) её кривизна не меньше π).

Лемма 9. Пусть $\varepsilon < \frac{1}{100}$ и $\ell > 100\varepsilon$. Тогда площадь ячейки сети N , содержащей пару вершин A^* и K^* , не меньше $\text{const} \cdot \ell^2$, где const — некоторое положительное число, не зависящее ни от выбора ε, ℓ, P^* , ни от выбора минимальной сети N .

Доказательство леммы. Пусть $P_S(M_{cut})$ — многогранник, на котором сеть N реализуется как простая минимальная сеть (теорема 9) и $f: P^* \setminus \cup M_i \rightarrow P_S(M_{cut})$ — изометричное вложение, построенное в доказательстве теоремы 9. Тогда многогранник $P_S(M_{cut})$ имеет четыре вершины кривизны π , т.е. является равногранным тетраэдром. Рассмотрим ячейку минимальной сети N , содержащую вершины A^*, K^* . По лемме 5 эта ячейка треугольная. Соответствующая треугольная ячейка сети $f(N)$ содержит единственную вершину многогранника $P_S(M_{cut})$, обозначим эту ячейку через $Y_1Y_2Y_3$, а вершину внутри — через X . Пусть $Con(X) = Y_1Y_2Y_3 \setminus f(P^* \setminus \cup M_i)$. Иными словами, $Con(X)$ — это тот двуугольник, которым в доказательстве теоремы 9 мы заклеивали дыру, получившуюся после разреза вдоль геодезической M_1 , соединяющей вершины A^* и K^* . Ниже f -образы вершин A^* и K^* на многограннике

$P_S(M_{cut})$, т.е. вершины двуугольника $Con(X)$, мы будем по-прежнему обозначать через A^* и K^* .

Соединим X и Y_1 кратчайшей XY_1 внутри ячейки (следствие 1) и изометрично отобразим многоугольник $Y_1Y_2Y_3 \setminus XY_1$ на плоскость. Поскольку кривизна вершины X равна π , получим плоский выпуклый четырёхугольник, см. рис. 7. Пусть T — точка пересечения кратчайшей XY_1 и границы двуугольника $Con(X)$. Тогда образ двуугольника $Con(X)$ при разворачивании — это некоторый четырёхугольник $TT'K^*A^*$.

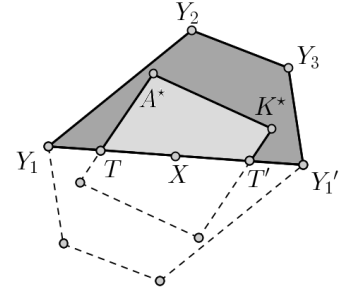


Рис. 7. Развёртка ячейки сети на многограннике $P_S(M_{cut})$ и её центрально симметричная копия

Рассмотрим многоугольник $Y_1Y_2Y_3Y_1'T'K^*A^*T$. По построению он получается разворачиванием области $f(P^* \setminus \cup M_i) \cap Y_1Y_2Y_3$, т.е. той части ячейки $Y_1Y_2Y_3$, которая изометрична разрезанной по геодезической M_1 ячейке сети N на многограннике P^* . Значит, площадь многоугольника $Y_1Y_2Y_3Y_1'T'K^*A^*T$ равна площади ячейки из условия леммы, т.е. лемма сводится к доказательству оценки $S(Y_1Y_2Y_3Y_1'T'K^*A^*T) \geq \text{const} \cdot \ell^2$. Далее все рассуждения проводим для многоугольников на плоскости.

Рассмотрим образ четырёхугольников $Y_1Y_2Y_3Y_1'$ и $TT'K^*A^*$ при симметрии с центром в точке X . По построению $XT = XT'$, $XY_1 = XY_1'$, поэтому объединение четырёхугольника $Y_1Y_2Y_3Y_1'$ и его образа при симметрии — это некоторый центрально симметричный шестиугольник, все углы которого равны 120° . Объединение четырёхугольника $TT'K^*A^*$ и его образа — это ромб, длина стороны которого равна длине стороны («равнобедренного») двуугольника $Con(X)$, которая в свою очередь равна длине геодезической M_1 . Углы этого ромба равны кривизнам вершин A^* и K^* многогранника P^* и, значит, ε -близки к $\frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим ромб R со стороной длины 1 и углами, ε -близкими к $\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим всевозможные центрально симметричные шестиугольники с углами по 120° , содержащие этот ромб. Пусть $\sigma(R)$ — точная нижняя грань площадей таких шестиугольников. Тогда $\sigma(R)$ строго больше площади $S(R)$ нашего ромба — в противном случае существовала бы последовательность шестиугольников, содержащих ромб и сходящихся к нему (скажем, в метрике Хаусдорфа) — но такая последовательность шестиугольников не может существовать из-за наших ограничений на углы ромба и шестиугольников. Итак, число $\delta(R) = \sigma(R) - S(R)$ положительно. Значит, поскольку множество рассматриваемых ромбов компактно и для каждого из них $\delta(R)$ положительно, выполняется $\inf_R \delta(R) > 0$, где инфимум берётся по всевозможным ромбам R со стороной 1 и углами, $\frac{1}{100}$ -близкими к $\frac{\pi}{2}$. Обозначим этот инфимум $\inf_R \delta(R) = \text{const}_1$. Очевидно, что для ромба со стороной x выполняется $\delta(\text{ромба}) \geq \text{const}_1 \cdot x^2$.

Вернёмся к нашей развёртке, см. рис. 7: $S(Y_1Y_2Y_3Y_1'T'K^*A^*T) = S(Y_1Y_2Y_3Y_1') - S(TA^*K^*T') = \frac{1}{2}(S(\text{шестиугольника}) - S(\text{ромба})) \geq \frac{1}{2}\delta(\text{ромба}) \geq \frac{1}{2}\text{const}_1 \cdot |K^*A^*|^2 \geq \frac{1}{2}\text{const}_1 \cdot (\ell - 2\varepsilon)^2 \geq \text{const} \cdot \ell^2$, например, для $\text{const} = \frac{1}{4}\text{const}_1$. Как мы показали выше, из этой оценки вытекает доказываемая лемма. $\square$

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед P с таким большим ℓ , что его площадь поверхности $S(P) = 2\ell \cdot (b + w) + 2bw < \text{const} \cdot \ell^2$, где const — константа из последней леммы. Затем с по-

мощью леммы 8 построим многогранник P^* , причём так, чтобы снова выполнялось $S(P^*) < \text{const} \cdot \ell^2$. Предполагая, что на P^* существует минимальная сеть, переходим к $P_S(M_{\text{cut}})$ и получаем, что по лемме 9 площадь уже одной ячейки сети на многограннике P^* больше $\text{const} \cdot \ell^2$, хотя площадь всей поверхности многогранника P^* меньше $\text{const} \cdot \ell^2$ — противоречие. Теорема 7 доказана.

7 Доказательство теоремы 14

В теореме 16 докажем, что множество многогранников с минимальной сетью всюду плотно, а затем в теореме 17 докажем, что оно открыто в $\mathcal{P}(k_1, \dots, k_n)$.

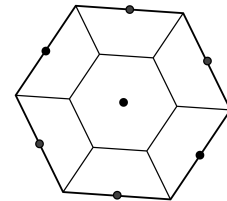
Теорема 16. *Для любого выпуклого многогранника P , все кривизны которого делятся на $\frac{\pi}{3}$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся ε -близкий к P многогранник P' , на котором есть простая минимальная сеть.*

Доказательство. Обозначим вершины данного многогранника P через $A_1, A_2, \dots, A_n$. Выберем на поверхности P произвольную точку X , пусть γ_i — кратчайшая, соединяющая X и A_i , $i = 1, \dots, n$. Несложно проверить, что различные кратчайшие γ_i не могут пересекаться между собой. В [9] доказано, что геодезический многоугольник $P \setminus \bigcup_{i=1}^n \gamma_i$ изометричен вложенному многоугольнику на плоскости. Обозначим этот плоский многоугольник через $M = X_1 A_1 X_2 A_2 \dots X_n A_n$, где геодезической γ_i соответствуют стороны $A_i X_{i+1}$ и $A_i X_i$, $i = 1, \dots, n$ (всюду считаем, что $X_{n+1} = X_1$). Этот многоугольник с естественными правилами склейки ($A_i X_{i+1} \equiv A_i X_i$), очевидно, является развёрткой для многогранника P , которую часто называют *звёздной*.

Разобьём плоскость на равные правильные шестиугольники с длиной стороны, равной некоторому δ , так, чтобы вершины нашего многоугольника M оказались внутри различных шестиугольников разбиения. Обозначим через X'_i центр шестиугольника, содержащего вершину X_i . Для каждого $i = 1, \dots, n$ построим равнобедренный треугольник $A'_i X'_i X'_{i+1}$ с основанием $X'_i X'_{i+1}$, подобный треугольнику $A_i X_i X_{i+1}$ и так же ориентированный на плоскости (т.е. если A_i , X_i и X_{i+1} расположены по часовой стрелке, то и A'_i , X'_i и X'_{i+1} расположены так же). Мы всюду считаем, что $X_{n+1} = X_1$, $X'_{n+1} = X'_1$. Угол при вершине A_i многоугольника M по построению равен полному углу при вершине A_i многогранника P , т.е. может быть равен одному из чисел $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π , $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$. Значит, построенный нами равнобедренный треугольник $A'_i X'_i X'_{i+1}$ либо равносторонний, либо вырожденный (с углом π при вершине A'_i), либо имеет углы 120° , 30° , 30° . Учитывая, что X'_i и X'_{i+1} — центры некоторых шестиугольников, несложно проверить следующую лемму.

Лемма 10. *Для каждого i точка A'_i — либо центр, либо середина стороны некоторого шестиугольника разбиения.*

В случае, если какие-то из точек A'_i оказались серединами сторон шестиугольников, рассмотрим разбиение плоскости на более мелкие шестиугольники, в котором все центры и середины сторон шестиугольников старого разбиения являются центрами шестиугольников, см. рис. 8.



Лемма 11. $|X_i X'_i| < \delta$, $|A_i A'_i| < 2\delta$, $i = 1, \dots, n$.

Рис. 8. Подразбиение

Доказательство. Первое очевидно, поскольку X_i находится внутри правильного шестиугольника с центром X'_i и стороной длины δ . Докажем второе неравенство. Через ε обозначим следующее аффинное преобразование, переводящее вектор $\overrightarrow{X_i X_{i+1}}$ в вектор $\overrightarrow{X_i A_i}$, а вектор $\overrightarrow{X'_i X'_{i+1}}$ — в вектор $\overrightarrow{X'_i A'_i}$: в случае $\angle X_i A_i X_{i+1} = 180^\circ$ — сжатие в два раза, в случае $\angle X_i A_i X_{i+1} = 60^\circ$ — поворот на 60° в нужную сторону (рис. 9), а в случае $\angle X_i A_i X_{i+1} = 120^\circ$ — композицию поворота на 30° и сжатия в $\sqrt{3}$ раз.

Тогда $|\overrightarrow{A_i A'_i}| = |(\overrightarrow{X_i X'_i} + \varepsilon(\overrightarrow{X'_i X'_{i+1}})) - \varepsilon(\overrightarrow{X_i X_{i+1}})| = |(\overrightarrow{X_i X'_i} - \varepsilon(\overrightarrow{X_i X'_i})) + \varepsilon(\overrightarrow{X_i X'_i} + \overrightarrow{X'_i X'_{i+1}} - \overrightarrow{X_i X_{i+1}})| \leq (|\overrightarrow{X_i X'_i}| + |\overrightarrow{X_{i+1} X'_{i+1}}|) < 2\delta$. Предпоследнее неравенство следует из неравенства треугольника и соотношений $|x - \varepsilon x| = |\varepsilon x| \leq |x|$, которые легко проверить для каждого из трёх наших ε . $\square$

Поскольку ломаная $X_1 A_1 X_2 A_2 \dots X_n A_n X_1$ ограничивает вложенный многоугольник по свойству звёздной развёртки, из леммы 11 вытекает, что при достаточно малых δ ломаная $X'_1 A'_1 X'_2 A'_2 \dots X'_n A'_n X'_1$ не имеет самопересечений. В ограниченном ею многоугольнике M' для каждого i стороны $A'_i X'_i$ и $A'_i X'_{i+1}$ имеют по построению одинаковую длину. Зададим на M' правила склейки $A'_i X'_i \equiv A'_i X'_{i+1}$, получим развёртку, задающую многогранной метрику на сфере с теми же кривизнами вершин, что и у многогранника P . Поэтому изометричный этой развёртке выпуклый многогранник P' существует (теорема 2) и имеет те же кривизны, что и многогранник P . В силу непрерывности отображения, ставящего в соответствие развёртке изометричный ей многогранник (лемма 1), δ можно выбрать так, что многогранники P и P' будут ε -близки.

Остаётся убедиться, что границы шестиугольников разбиения, попавшие внутрь многоугольника M' , при переходе к многограннику P' образуют на нём минимальную сеть. Пример фрагмента многоугольника M' изображён на рис. 10. Ясно, что во всех внутренних точках многоугольника M' свойства минимальной сети выполнены (определение 4). Рассмотрим пересечение некоторой стороны $A'_i X'_i$ многоугольника M' и некоторой стороны шестиугольника разбиения. Поскольку угол при вершине A'_i кратен $\frac{\pi}{3}$, отождествлению сторон $A'_i X'_i \equiv A'_i X'_{i+1}$ соответствует поворот с центром в точке A'_i (напомним, это центр некоторого шестиугольника разбиения) на угол, кратный $\frac{\pi}{3}$. Разбиение на шестиугольники инвариантно относительно такого поворота, откуда вытекает, что точки границ шестиугольников на границе многоугольника M' склеиваются попарно и с соблюдением свойств минимальной сети. Это наблюдение двойственно утверждению про триангуляции из [3, раздел 7]. Итак, мы нашли многогранник с простой минимальной сетью, ε -близкий к данному, что и требовалось в теореме 16. $\square$

Теорема 17. Если на многограннике P есть минимальная сеть, то найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что на всех ε -близких многогранниках с теми же кривизнами вершин тоже есть минимальная сеть (причём того же типа).

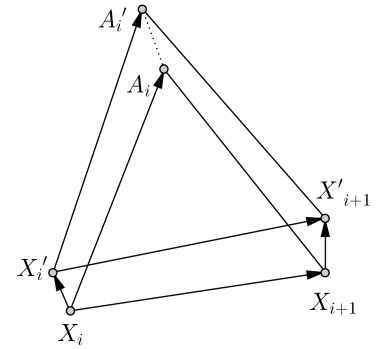


Рис. 9. Оценка $|A_i A'_i|$

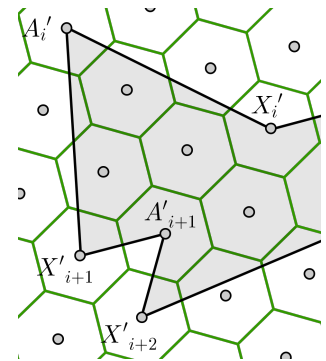
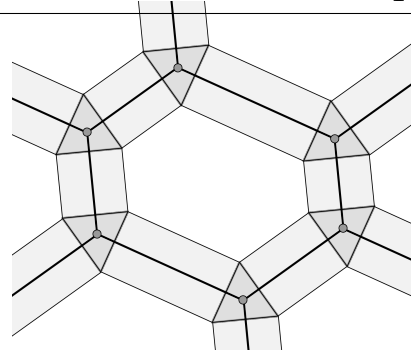


Рис. 10. Фрагмент M'

Доказательство. Пусть Γ — минимальная сеть на многограннике $P \in \mathcal{P}(k_1, \dots, k_n)$. Через $B_\delta(\Gamma)$ обозначим δ -окрестность сети Γ , т.е. множество точек многогранника P , которые можно соединить с сетью Γ путём длины не более δ . Ясно, что при достаточно малом δ множество $B_\delta(\Gamma)$ не содержит вершин многогранника и может быть разбито на несколько геодезических многоугольников двух видов: изометричных плоским правильным треугольникам со стороной длины 2δ (они содержат вершины сети) и изометричных плоским неквадратным прямоугольникам ширины 2δ (каждому ребру сети соответствует один такой прямоугольник), см. рис. 11. Фиксируем малое (в указанном смысле) δ . Развёртку окрестности $B_\delta(\Gamma)$, состоящую из описанных правильных треугольников и прямоугольников с естественными правилами склейки, будем обозначать через D .

Рис. 11. Часть $B_\delta(\Gamma)$

Триангулируем многогранник P следующим образом. Сначала дотриангулируем $B_\delta(\Gamma)$, разбив каждый «прямоугольник» окрестности $B_\delta(\Gamma)$ любой из двух его диагоналей на два треугольника. Затем рассмотрим любую компоненту связности $P \setminus B_\delta(\Gamma)$ — это геодезический многоугольник с углами по 120° , обозначим его через M . Выберем любую вершину на границе M и, пользуясь следствием 1, соединим её геодезическими γ_i с каждой из вершин многогранника, содержащихся в M (если такие вершины есть). Тогда $M \setminus \cup_i \gamma_i$ — геодезический многоугольник, не содержащий внутри себя точек ненулевой кривизны. Точно так же, как в доказательстве [7, Гл. 4, §1, лемма 2], разобьём $M \setminus \cup_i \gamma_i$ на треугольники непересекающимися диагоналями (т.е. геодезическими с концами в вершинах многоугольника $M \setminus \cup_i \gamma_i$, причём начало и конец диагонали не должны совпадать).

В итоге получим некоторую триангуляцию T всего многогранника P , каждый треугольник в которой не содержит внутри себя точек ненулевой кривизны, т.е. изометричен плоскому. В силу [7, Гл. 4, § 2, Лемма 1] для любого $\mu > 0$ существует $\nu > 0$ такое, что на любом ν -близком к P многограннике P' существует триангуляция T' той же комбинаторной структуры, что и T , и такая, что длины соответствующих рёбер двух триангуляций отличаются не более чем на μ . Слова «той же комбинаторной структуры» означают, что существует гомеоморфизм $\psi_{hom}: P \rightarrow P'$, переводящий вершины многогранника P в соответствующие вершины многогранника P' , а триангуляцию T — в триангуляцию T' . Пусть $\psi: P \rightarrow P'$ — кусочно-аффинный гомеоморфизм, который на вершинах триангуляции T совпадает с ψ_{hom} и каждый треугольник $\Delta \in T$ аффинно отображает на $\psi_{hom}(\Delta)$. Здесь под *аффинным отображением* Δ на $\psi_{hom}(\Delta)$ мы понимаем композицию $(f')^{-1} \circ h \circ f$, где $f: \Delta \rightarrow \Delta' \subset \mathbb{R}^2$ и $f': \psi_{hom}(\Delta) \rightarrow (\psi_{hom}(\Delta))' \subset \mathbb{R}^2$ — изометричные вложения треугольников в плоскость, $h: \Delta' \rightarrow (\psi_{hom}(\Delta))'$ — аффинное отображение плоских треугольников.

Отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ будем называть ε -изометрией пространств с внутренней метрикой (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) , если φ — гомеоморфизм и $|\rho_Y(\varphi(a), \varphi(b)) - \rho_X(a, b)| < \varepsilon$ для любых $a, b \in X$. Из сказанного выше и свойств аффинных отображений вытекает лемма.

Лемма 12. Для любого $\zeta > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого много-

граница P' , ε -близкого к P , построенное нами отображение $\psi: P \rightarrow P'$ является ζ -изометрией.

Рассмотрим двойственный граф D^* развёртки D (т.е. абстрактный граф, множество вершин которого — многоугольники развёртки, а рёбра соответствуют склеенным сторонам). Очевидно, что граф D^* отличается от графа G сети Γ лишь добавлением вершины степени 2 внутрь каждого ребра (эта вершина степени 2 соответствует прямоугольнику развёртки). Найдём в графе D^* остовное дерево D_0^* и определим новую развёртку D_0 с тем же множеством многоугольников, что и в D , но с меньшим набором правил склейки — отождествляются только стороны, соответствующие ребру остовного дерева D_0^* . Неформально говоря, мы разрезаем развёртку D по тем рёбрам, которым в двойственном графе соответствуют рёбра, не входящие в D_0^* .

Для многогранника $P' \in \mathcal{P}(k_1, \dots, k_n)$, ε -близкого к P (малое ε мы определим позже), построим ψ . Подмножество $\psi(B_\delta(\Gamma))$ многогранника P' , вместе с перенесённым с D с помощью ψ разбиением на треугольники и четырёхугольники, представляет собой развёртку, которую мы обозначим через D' . В двойственном графе развёртки D' рассмотрим соответствующее остовное дерево $(D'_0)^* = \psi^*(D_0^*)$ (здесь через $\psi^*: D^* \rightarrow (D')^*$ обозначен изоморфизм двойственных графов, индуцированный гомеоморфизмом ψ) и определим развёртку D'_0 с тем же набором многоугольников, что и D' , и правилами склейки, заданными графом $(D'_0)^*$. Ясно, что развёртки D_0 и D'_0 изометричны дискам с многогранными метриками нулевой кривизны. Границы этих дисков будем обозначать через ∂D_0 , $\partial D'_0$. Отображение ψ индуцирует отображение $\psi_i: M_i \rightarrow M'_i$ на каждом из многоугольников M_i , составляющих развёртку D , а значит, и на каждом из многоугольников, составляющих D_0 . Объединение всех ψ_i даёт отображение $\psi_0: D_0 \rightarrow D'_0$. Таким образом, ψ есть фактор-отображение отображения ψ_0 по отождествлению сторон развёртки D_0 , превращающему D_0 в D . Ясно, что ψ_0 является ε -изометрией при всех ε , при которых ψ является ε -изометрией.

Образы точек сети Γ на развёртке D_0 образуют сеть, которую мы обозначим через Γ_0 . Неформально говоря, сеть Γ_0 получается из сети Γ в результате разрыва некоторых её рёбер при разрезе развёртки D по сторонам, не лежащим в D_0^* .

Локально минимальным деревом будем называть сеть, тип которой — дерево, все вершины которого имеют степень 1 и 3, рёбра — геодезические, а углы между смежными рёбрами равны 120° . Множество висячих вершин локально минимального дерева H будем называть его границей и обозначать через ∂H . Ясно, что сеть Γ_0 — локально минимальное дерево (поскольку D_0^* — дерево), причём $\partial \Gamma_0 \subset \partial D_0$.

Наша цель — нарисовать на D'_0 локально минимальное дерево с границей $\psi_0(\partial \Gamma_0)$ и того же типа, что и Γ_0 , которое при переходе от D'_0 обратно к D' превращалось бы в минимальную сеть на D' . На плоскости локально минимальное дерево данного типа с данной границей может быть построено с помощью алгоритма Мелзака [10], аналог которого для дисков с многогранной метрикой, имеющих развёртку типа D , и заключён в доказательстве следующей леммы. Сама лемма 13 представляет собой обобщение на наш случай следствия из алгоритма Мелзака о непрерывной зависимости локально минимального дерева данного типа на плоскости от своей границы [11, Предл. 5.2].

Лемма 13. Пусть A — гомеоморфная диску развёртка, состоящая из неквадратных прямоугольников ширины 2δ и правильных треугольников со стороной 2δ ,

склеенных по некоторым сторонам длины 2δ ;

H — локально минимальное дерево на A с границей $\partial H \subset \partial A$, причём пересечение любого прямоугольника развёртки с сетью H равно средней линии этого прямоугольника, соединяющей стороны длины 2δ , а пересечение любого треугольника развёртки с сетью H состоит из трёх перпендикуляров, опущенных из центра треугольника на его стороны;

T — триангуляция развёртки A , полученная в результате разбиения каждого прямоугольника на два треугольника любой из двух его диагоналей.

Тогда для любого $\lambda > 0$ существует $\zeta > 0$ такое, что для любой ζ -изометрии $\psi_\zeta: A \rightarrow A'$, аффинной на треугольниках из T , существует λ -изометрия $\psi_\lambda: A \rightarrow A'$ такая, что $\psi_\lambda|_{\partial A} = \psi_\zeta|_{\partial A}$ и $H' = \psi_\lambda(H)$ — локально минимальное дерево.

Доказательство леммы проведём индукцией по числу граничных (т.е., напомним, висячих) вершин сети H . Базу индукции проверим для $|\partial H| = 2$. В этом случае дерево H состоит лишь из одного ребра-геодезической γ , а развёртка A состоит из нескольких прямоугольников одинаковой ширины, склеенных последовательно, и изометрична плоскому прямоугольнику со средней линией γ . Ясно, что при малом ζ развёртка $A' = \psi_\zeta(A)$ изометрична плоскому многоугольнику, склеенному из плоских четырёхугольников, близких к прямоугольникам развёртки A , и при малом ζ отрезок γ' , соединяющий ψ_ζ -образы концов геодезической γ , содержится внутри этого многоугольника и делит его на два многоугольника. Триангулируем каждый из этих двух многоугольников-частей непересекающимися диагоналями и сделаем комбинаторно такие же триангуляции многоугольников $A \setminus \gamma$ (с вершинами в ψ_ζ^{-1} -образах вершин триангуляций многоугольников $A' \setminus \gamma'$). Определим кусочно аффинное отображение $\psi_\lambda: A \rightarrow A'$, совпадающее с ψ_ζ на вершинах триангуляции и аффинно отображающее каждый треугольник триангуляции на A в треугольник триангуляции на A' . Ясно, что при достаточно малом ζ отображение ψ_λ будет требуемой λ -изометрией.

Шаг индукции: пусть лемма доказана для сетей с k граничными вершинами, рассмотрим сеть H с $|\partial H| = k + 1$. Найдём в сети H пару висячих вершин, имеющих общую смежную вершину, и обозначим их соответственно p, q, v , а через u обозначим третью вершину, смежную с вершиной v . Обозначим через A_1 объединение всех многоугольников развёртки A , пересекающихся с рёбрами pv, qv, vu , и сделаем изометричное вложение A_1 в плоскость, см. рис. 13 (вложение существует, поскольку три прямоугольника, построенные на сторонах правильного треугольника, не могут перекрывать-ся). На плоскости построим правильный треугольник с основанием pq и третьей вершиной s , лежащей по другую сторону от прямой pq , чем точка v . Согласно известному факту планиметрии (используемому в классическом алгоритме Мелзака), точка v лежит на пересечении отрезка us и меньшей дуги pq окружности, описанной около $\triangle pqs$. Пусть $\Delta(v) = xyz$ — треугольник раз-

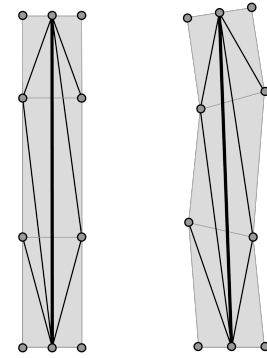


Рис. 12. База: A и A'

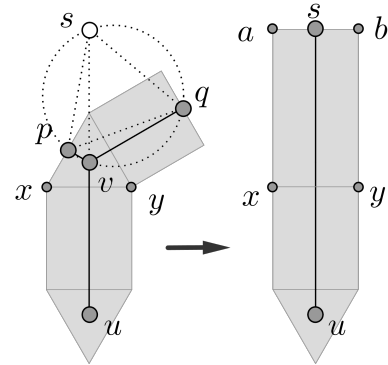


Рис. 13. От A к A_k

вёртки A , содержащий вершину v , причём xu — его основание, пересекающее ребро uv , а M — многоугольник развёртки, приклеенный к $\Delta(v)$ по стороне xu . Удалим из развёртки A все многоугольники, пересекающие рёбра pv, vq и добавим плоский прямоугольник $abux$, в котором s — середина стороны ab , приклеенный по отрезку xu к многоугольнику M так, как это реализовано на плоскости. Новую развёртку обозначим через A_k и рассмотрим на ней сеть, пересечение которой со всеми «старыми» многоугольниками такое же, как у сети H , а пересечение с новым прямоугольником равно его средней линии. Тем самым из сети H удалены рёбра pv, vq , а ребро uv заменено на us . Получившуюся сеть на развёртке A_k обозначим через H_k . Ясно, что развёртка A_k и сеть H_k удовлетворяют условиям леммы и, более того, утверждение леммы для них верно по предположению индукции.

Пусть $\psi_\zeta: A \rightarrow A'$ — ζ -изометрия развёрток (для некоторого ζ , которое мы определим ниже), аффинная на треугольниках из T , рассмотрим $A'_1 = \psi_\zeta(A_1)$ — образ той части развёртки A , которую мы разворачивали на плоскость выше, и сделаем изометричное вложение A'_1 в плоскость. Для точек $p' = \psi_\zeta(p), q' = \psi_\zeta(q)$ строим на плоскости правильный треугольник $p'q's'$ и параллелограмм $a'b'y'x'$ с основанием $x'y'$, для которого s' — середина стороны $a'b'$. Удаляем из A' многоугольники, соответствующие удалённым из A , и добавляем параллелограмм $a'b'y'x'$, приклеенный по $x'y'$; новую развёртку обозначаем через A'_k . Определяем отображение $\psi_{\zeta'}: A_k \rightarrow A'_k$, совпадающее с ψ_ζ на $A_k \cap A$, и аффинно отображающее прямоугольник $abux$ на параллелограмм $a'b'y'x'$. Ясно, что для любого $\zeta' > 0$ можно подобрать $\zeta > 0$ так, что $\psi_{\zeta'}$ будет ζ' -изометрией развёрток A_k и A'_k . По предположению индукции для любого $\lambda' > 0$ существует ζ' такое, что найдётся λ' -изометрия $\psi_{\lambda'}: A_k \rightarrow A'_k$ такая, что $H'_k = \psi_{\lambda'}(H_k)$ — локально минимальное дерево, причём $\psi_{\lambda'}(s) = \psi_{\zeta'}(s) = s'$.

При достаточно малых ζ, ζ' и λ' ребро $s'u'$ дерева H'_k (где $u' = \psi_{\lambda'}(u)$) пересекает меньшую дугу $p'q'$ окружности, описанной около $p's'q'$, в точке, лежащей внутри треугольника $\psi_\zeta(\Delta(v))$ (обозначим эту точку через v') и, более того, отрезки $v'p', v'q'$ на плоскости лежат внутри A'_1 — поскольку аналогичное свойство имеет место для A_1 и сохраняется при непрерывном изменении развёртки. Значит, можно рассмотреть сеть H' на развёртке A' , отличающуюся от сети H'_k заменой ребра $u's'$ на $u'v'$ и добавлением рёбер $p'v', q'v'$. Из свойств вписанных углов вытекает, что все углы при вершине v' равны 120° и потому H' — локально минимальное дерево с требуемой границей. Отображение $\psi_\lambda: A \rightarrow A'$ определим теперь на многоугольниках развёртки A , входящих в развёртку A_k , равным $\psi_{\lambda'}$, а на A_1 — как кусочно аффинное отображение для триангуляций $A_1 \setminus H$ и $A'_1 \setminus H'$ аналогично тому, как это было сделано в базе индукции. Шаг индукции сделан. Лемма доказана.

Очевидно, что развёртка D_0 и сеть Γ_0 удовлетворяют условиям леммы 13. Найдём для $\lambda = 1$ число ζ из этой леммы и рассмотрим ε из леммы 12 такое, что для любого ε -близкого к P многогранника P' отображение $\psi_0: D_0 \rightarrow D'_0$ есть ζ -изометрия. Построим с помощью леммы 13 локально минимальное дерево $\Gamma'_0 = \psi_\lambda(\Gamma_0) \subset D'_0$.

Рассмотрим пару α, β сторон развёртки D_0 , склеиваемых в развёртке D' . По построению отображение ψ_λ , так же как и ψ_0 , отображает отрезки α и β аффинно на некоторые стороны α' и β' развёртки D'_0 . Поэтому любая пара точек сторон α и β , отождествляемая в D , переходит при отображении ψ_λ в пару точек развёртки D'_0 , отождествляемых в развёртке D' . Значит, корректно определено фактор-отображение $\overline{\psi_\lambda}: D \rightarrow D'$. В том числе, две граничные вершины (пусть это вер-

пины $a \in \alpha$ и $b \in \beta$) сети Γ_0 при отождествлении сторон α и β сливаются и превращаются в некоторую точку c на ребре сети Γ , а вершины $a' = \psi_\lambda(a) = \psi_0(a)$ и $b' = \psi_\lambda(b) = \psi_0(b)$ сети Γ'_0 в развёртке D' склеиваются в точку $c' = \psi(c)$.

Ясно, что $\overline{\psi}_\lambda$ является 2λ -изометрией развёрток D и D' , переводящей сеть Γ в некоторую сеть Γ' . Поскольку Γ'_0 — локально минимальное дерево, сеть Γ' обладает свойствами минимальной сети (опр. 4) во всех своих точках, за исключением мест «склейки» — точек c' из предыдущего абзаца. Докажем, что в каждой такой точке $c' = \psi(c)$ угол между двумя рёбрами сети Γ' , инцидентными c' , равен 180° . Найдём в дереве Γ'_0 простой путь, соединяющий a' и b' . В сети Γ' этому пути соответствует замкнутая геодезическая ломаная γ' с концами в c' , ограничивающая некоторый геодезический многоугольник M' . Путь $\overline{\psi}_\lambda^{-1}(\gamma')$ в сети Γ ограничивает многоугольник M , причём по построению все углы многоугольников M и M' одинаковы, за исключением, возможно, углов в точках c и c' (угол многоугольника M в c равен 180° , а про угол M' в c' мы пока ничего не знаем). Но по определению D' и из-за выбора $P, P' \in \mathcal{P}(k_1, \dots, k_n)$ сумма кривизн вершин многогранника P' , попавших в M' , равна сумме кривизн вершин многогранника P , попавших в M . Значит, по формуле Гаусса–Бонне (лемма 2), угол M' в точке c' также равен 180° , что и требовалось. $\square$

8 Благодарности

Автор глубоко благодарен А. О. Иванову и А. А. Тужилину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. Стрелкова Н. П. Устойчивость локально минимальных сетей // Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. 2013. Т. 29. С. 148–170. (*Strelkova N. P. Ustoychivost lokalno minimalnykh setey // Trudy seminaru po vektornomu i tenzornomu analizu s ikh prilozheniyami k geometrii, mekhanike i fizike. 2013. V. 29. S. 148–170. [in Russian].*)
2. Иванов А. О., Тужилин А. А. Теория экстремальных сетей. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. (*Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Teoriya ekstremalnykh setey. Moskva-Izhevsk, Institut kompyuternykh issledovaniy, 2003 [in Russian]; Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Branching solutions to one-dimensional variational problems. World Scientific, Singapore, 2000*)
3. Thurston W. P. Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere // The Epstein birthday schrift, Geom. Topol. Monogr. 1998. V. 1. P. 511–549
4. Птицына И. В. Классификация замкнутых локально минимальных сетей на тетраэдрах // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 5. С. 119–138. (English transl.: *Ptitsyna I. V., Classification of closed minimal networks on tetrahedra, Sci. Sb. Math. 1995. V. 82. No. 1. P. 101–116.*)
5. Стрелкова Н. П. Замкнутые локально минимальные сети на поверхностях тетраэдров // Матем. сб. 2011. Т. 202. № 1. С. 141–160. (English transl.: *Strelkova N. P.*

- Closed locally minimal nets on tetrahedra. 2011. V. 202. No. 1. P. 135–153. DOI : 10.1070/SM2011v202n01ABEH004141.)
6. *Протасов В. Ю.* Замкнутые геодезические на поверхности симплекса // Матем. сб. 2007. Т. 198. № 2. С. 103–120, (English transl.: *Protasov V. Yu.* Closed geodesics on the surface of a simplex // Sbornik: Mathematics. 2007. V. 198, No. 2. P. 243–260)
 7. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. Москва; Ленинград, 1950. (English transl.: *Aleksandrov A. D.* Convex Polyhedra. Springer-Verlag. Berlin, 2005.)
 8. *Стрелкова Н. П.* Реализация плоских графов как замкнутых локально минимальных сетей на выпуклых многогранниках // Доклады РАН. 2010, Т. 435, № 4. С. 1–3. (English transl.: *Strelkova N. P.* Realization of plane graphs as closed locally minimal nets on convex polyhedra // Doklady Mathematics. 2010. V. 82, No. 3. P. 939–941.)
 9. *B. Aronov and J. O'Rourke* Nonoverlap of the star unfolding // Discrete and Computational Geometry. 1992. V. 8. No 1. P. 219–250.
 10. *Melzak Z. A.* On the problem of Steiner // Canad. Math. Bulletin. 1961. V. 4. P. 143–148.
 11. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Геометрия множества минимальных сетей данной топологии с фиксированной границей // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 6. С. 119–152. (English transl.: *Ivanov A. O., Tuzhilin A. A.* The geometry of minimal networks with a given topology and a fixed boundary // Izvestiya: Mathematics. 1997. V. 61. No. 6. P. 1231–1263.)

Closed Locally Minimal Networks on the Surfaces of Convex Polyhedra

Strelkova N. P.

*M.V. Lomonosov Moscow State University
Leninskie Gory, 1, Moscow, 119991, Russia*

Keywords: locally minimal network, geodesic net, convex polyhedron

Closed locally minimal networks can be viewed as “branching” closed geodesics. We study such networks on the surfaces of convex polyhedra and discuss the problem of describing the set of all convex polyhedra that have such networks. A closed locally minimal network on a convex polyhedron is an embedding of a graph provided that all edges are geodesic arcs and at each vertex exactly three edges meet at angles of 120° . In this paper, we do not deal with closed (periodic) geodesics. Among other results, we prove that the natural condition on the curvatures of a polyhedron that is necessary for the polyhedron to have a closed locally minimal network on its surface is not sufficient. We also prove a new stronger necessary condition. We describe all possible combinatorial structures and edge lengths of closed locally minimal networks on convex polyhedra. We prove that almost all convex polyhedra with vertex curvatures divisible by $\frac{\pi}{3}$ have closed locally minimal networks.

Сведения об авторе:

Стрелкова Наталия Павловна,
МГУ им. М. В. Ломоносова, аспирант,
ЯрГУ им. П.Г. Демидова, лаборант Международной лаборатории
“Дискретная и вычислительная геометрия” им. Б.Н. Делоне