

On a geometric approach to the estimation of interpolation projectors

M. V. Nevskii¹, A. Y. Ukhalov¹

DOI: [10.18255/1818-1015-2023-3-246-257](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2023-3-246-257)

¹P.G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia.

MSC2020: 41A05, 52B55, 52C07

Research article

Full text in Russian

Received July 4, 2023

After revision August 11, 2023

Accepted August 16, 2023

Suppose Ω is a closed bounded subset of $\mathbb{R}^n$, S is an n -dimensional non-degenerate simplex, $\xi(\Omega; S) := \min \{ \sigma \geq 1 : \Omega \subset \sigma S \}$. Here σS is the result of homothety of S with respect to the center of gravity with coefficient σ . Let $d \geq n+1$, $\varphi_1(x), \dots, \varphi_d(x)$ be linearly independent monomials in n variables, and $\varphi_1(x) \equiv 1$, $\varphi_2(x) = x_1, \dots, \varphi_{n+1}(x) = x_n$. Put $\Pi := \text{lin}(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$. The interpolation projector $P : C(\Omega) \rightarrow \Pi$ with a set of nodes $x^{(1)}, \dots, x^{(d)} \in \Omega$ is defined by equalities $Pf(x^{(j)}) = f(x^{(j)})$. Denote by $\|P\|_\Omega$ the norm of P as an operator from $C(\Omega)$ to $C(\Omega)$. Consider the mapping $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ of the form $T(x) := (\varphi_2(x), \dots, \varphi_d(x))$. We have $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{d-1} \right) (\|P\|_\Omega - 1) + 1 \leq \xi(T(\Omega); S) \leq \frac{d}{2} (\|P\|_\Omega - 1) + 1$, where S is a $(d-1)$ -dimensional simplex with vertices $T(x^{(j)})$. We discuss this and other relations for polynomial interpolation of functions continuous on a segment. Some results of numerical analysis are presented.

Keywords: polynomial interpolation; projector; norm; absorption coefficient; esimation

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mikhail V. Nevskii	orcid.org/0000-0002-6392-7618 . E-mail: mnevsk55@yandex.ru
corresponding author	Head of the Chair, Doctor of Science, Docent.

Alexey Y. Ukhalov	orcid.org/0000-0001-6551-5118 . E-mail: alex-uhalov@yandex.ru
	Assistant Professor, Cand. of Science, Docent.

For citation: M. V. Nevskii and A. Y. Ukhalov, "On a geometric approach to the estimation of interpolation projectors", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 30, no. 3, pp. 246-257, 2023.

О геометрическом подходе к оцениванию интерполяционных проекторов

М. В. Невский¹, А. Ю. Ухалов¹

DOI: [10.18255/1818-1015-2023-3-246-257](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2023-3-246-257)

¹Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, Ярославль, 150003, Россия.

УДК 514.17, 517.51, 519.6

Научная статья

Полный текст на русском языке

Получена 4 июля 2023 г.

После доработки 11 августа 2023 г.

Принята к публикации 16 августа 2023 г.

Пусть Ω — замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$, S — n -мерный невырожденный симплекс, $\xi(\Omega; S) := \min \{ \sigma \geq 1 : \Omega \subset \sigma S \}$. Здесь σS есть результат гомотетии S относительно центра тяжести с коэффициентом σ . Пусть $d \geq n + 1$, $\varphi_1(x), \dots, \varphi_d(x)$ — линейно независимые мономы от n переменных, причём $\varphi_1(x) \equiv 1$, $\varphi_2(x) = x_1, \dots, \varphi_{n+1}(x) = x_n$. Положим $\Pi := \text{lin}(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$. Интерполяционный проектор $P : C(\Omega) \rightarrow \Pi$ по набору узлов $x^{(1)}, \dots, x^{(d)} \in \Omega$ определяется с помощью равенств $Pf(x^{(j)}) = f(x^{(j)})$. Обозначим через $\|P\|_\Omega$ норму P как оператора из $C(\Omega)$ в $C(\Omega)$. Рассмотрим отображение $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$, имеющее вид $T(x) := (\varphi_2(x), \dots, \varphi_d(x))$. Справедливы неравенства $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{d-1} \right) (\|P\|_\Omega - 1) + 1 \leq \xi(T(\Omega); S) \leq \frac{d}{2} (\|P\|_\Omega - 1) + 1$, где S — $(d-1)$ -мерный симплекс с вершинами $T(x^{(j)})$. В статье это и другие соотношения обсуждаются для полиномиальной интерполяции функций, непрерывных на отрезке. Приводятся некоторые результаты численного анализа.

Ключевые слова: полиномиальная интерполяция; проектор; норма; коэффициент поглощения; оценивание

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Михаил Викторович Невский | orcid.org/0000-0002-6392-7618. E-mail: mnevsk55@yandex.ru
автор для корреспонденции | Заведующий кафедрой, доктор физ.-мат. наук, доцент.

Алексей Юрьевич Ухалов | orcid.org/0000-0001-6551-5118. E-mail: alex-uhalov@yandex.ru
Доцент, кандидат физ.-мат. наук, доцент.

Для цитирования: M. V. Nevskii and A. Y. Ukhlov, "On a geometric approach to the estimation of interpolation projectors", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 30, no. 3, pp. 246-257, 2023.

1. Основные определения и соотношения

Пусть Ω — замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$. Под $C(\Omega)$ понимается пространство непрерывных функций $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ с равномерной нормой

$$\|f\|_{C(\Omega)} := \max_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Для невырожденного симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$ через σS обозначим результат гомотетии S относительно центра тяжести с коэффициентом σ . Положим $\xi(\Omega; S) := \min \{\sigma \geq 1 : \Omega \subset \sigma S\}$. Включение $\Omega \subset S$ эквивалентно равенству $\xi(\Omega; S) = 1$. По нашей терминологии величина $\xi(\Omega; S)$ называется *коэффициентом поглощения множества Ω симплексом S* . Ниже $\text{ver}(S)$ есть совокупность вершин S .

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $d \geq n + 1$; $\varphi_1(x), \dots, \varphi_d(x)$ — линейно независимые функции, представляющие собой мономы от n переменных вида $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$. Здесь $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Предполагается, что $\varphi_1(x) \equiv 1$, $\varphi_2(x) = x_1$, $\dots$, $\varphi_{n+1}(x) = x_n$. Под d -мерным пространством многочленов от n переменных будем понимать совокупность $\Pi := \text{lin}(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$. Отметим важные варианты $\Pi = \Pi_k(\mathbb{R}^n)$ — пространство многочленов общей степени $\leq k$ ($k \in \mathbb{N}$) и $\Pi = \Pi_\alpha(\mathbb{R}^n)$ — пространство многочленов степени $\leq \alpha_i$ по x_i ($\alpha \in \mathbb{N}^n$).

Совокупность точек $x^{(1)}, \dots, x^{(d)} \in \Omega$ называется *допустимым набором узлов* для интерполяции функций из $C(\Omega)$ с помощью многочленов из Π , если $\Delta := \det(A) \neq 0$. Здесь и ниже A есть $(d \times d)$ -матрица

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \varphi_2(x^{(1)}) & \dots & \varphi_d(x^{(1)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varphi_2(x^{(d)}) & \dots & \varphi_d(x^{(d)}) \end{pmatrix}.$$

Интерполяционный проектор $P : C(\Omega) \rightarrow \Pi$ по этому набору узлов определяется с помощью равенств $Pf(x^{(j)}) = f(x^{(j)})$, $j = 1, \dots, d$. Аналогом интерполяционной формулы Лагранжа является представление

$$Pf(x) = \sum_{j=1}^d f(x^{(j)}) \lambda_j(x), \quad \lambda_j(x) := \frac{\Delta_j(x)}{\Delta}, \quad (1)$$

где $\Delta_j(x)$ — определитель, который получается из Δ заменой j -й строки на строку $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_d(x))$. Многочлены $\lambda_j \in \Pi$ обладают свойством $\lambda_j(x^{(k)}) = \delta_j^k$. Их коэффициенты в базисе $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ составляют столбцы матрицы A^{-1} . Мы называем λ_j *базисными многочленами Лагранжа* проектора P .

В случае $\Pi = \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, $d = n + 1$ и $\varphi_j(x) = x_{j-1}$ ($j = 2, \dots, d$) многочлены λ_j также называются *базисными многочленами Лагранжа симплекса S с вершинами в узлах интерполяции*. В этой ситуации, если $\Omega \not\subset S$,

$$\xi(\Omega; S) = (n + 1) \max_{1 \leq k \leq n+1} \max_{x \in \Omega} (-\lambda_k(x)) + 1. \quad (2)$$

Для выпуклого Ω равенство (2) доказывается в [1]; в общем случае доказательство проводится по той же схеме. Заметим, что $\xi(\text{conv}(\Omega); S) = \xi(\Omega; S)$.

Ниже рассматриваются лишь допустимые наборы узлов и те множества Ω , каждое из которых содержит такой набор.

Обозначим через $\|P\|_\Omega$ норму P как оператора из $C(\Omega)$ в $C(\Omega)$. Из (1) следует, что

$$\|P\|_\Omega = \max_{x \in \Omega} \sum_{j=1}^d |\lambda_j(x)|. \quad (3)$$

Равенства $\lambda_j(x) = \frac{\Delta_j(x)}{\Delta}$ эквивалентны матричному соотношению

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varphi_2(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \dots & \varphi_2(x^{(d)}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_d(x^{(1)}) & \varphi_d(x^{(2)}) & \dots & \varphi_d(x^{(d)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_d(x) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

В дальнейшем важную роль будет играть отображение $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$, определяемое равенством

$$y = T(x) := (\varphi_2(x), \dots, \varphi_d(x)) = (x_1, \dots, x_n, \varphi_{n+1}(x), \dots, \varphi_d(x)).$$

Мы будем рассматривать T на множестве Ω . Отмеченный выше выбор первых мономов $\varphi_j(x)$ обеспечивает обратимость T . Обозначим $y^{(j)} := T(x^{(j)})$. Соотношение (4) равносильно

$$\lambda_1 y^{(1)} + \dots + \lambda_d y^{(d)} = y, \quad \sum_{j=1}^d \lambda_j = 1.$$

Это означает, что числа $\lambda_j(x)$ являются барицентрическими координатами точки $y = T(x)$ относительно $(d-1)$ -мерного симплекса с вершинами $y^{(j)}$. Поэтому

$$\|P\|_{\Omega} = \max_{x \in \Omega} \sum_{j=1}^d |\lambda_j(x)| = \max \left\{ \sum_{j=1}^d |\beta_j| : \sum_{j=1}^d \beta_j = 1, y = \sum_{j=1}^d \beta_j y^{(j)} \in T(\Omega) \right\}. \quad (5)$$

Правое равенство в (5) выражает норму проектора P через барицентрические координаты точек множества $T(\Omega)$ относительно невырожденного $(d-1)$ -мерного симплекса с вершинами $y^{(j)}$.

Через $\theta(\Pi; \Omega)$ обозначим минимальную величину нормы проектора $P : C(\Omega) \rightarrow \Pi$ при условии, что соответствующие P узлы интерполяции принадлежат Ω :

$$\theta(\Pi; \Omega) := \min_{x^{(j)} \in \Omega} \|P\|_{\Omega}.$$

Проектор, норма которого равна $\theta(\Pi; \Omega)$, будем называть *минимальным*. Введём в рассмотрение следующую числовую характеристику множества Ω , представляющую собой *минимальный коэффициент поглощения* этого множества невырожденными симплексами с вершинами в Ω :

$$\xi_n(\Omega) := \min \{ \xi(\Omega; S) : S - n\text{-мерный симплекс, } \text{ver}(S) \subset \Omega, \text{vol}(S) \neq 0 \}.$$

Пусть $x^{(1)}, \dots, x^{(d)}$ — допустимый набор узлов интерполяции функций из $C(\Omega)$ с помощью многочленов из Π , $P : C(\Omega) \rightarrow \Pi$ — соответствующий проектор. Тогда точки $y^{(j)} = T(x^{(j)})$ составляют допустимый набор узлов интерполяции функций из $C(T(\Omega))$ с помощью многочленов из $\Pi_1(\mathbb{R}^{d-1})$. Рассмотрим интерполяционный проектор $\bar{P} : C(T(\Omega)) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^{d-1})$ по системе узлов $y^{(1)}, \dots, y^{(d)}$. Если $f \in C(\Omega)$, $g \in C(T(\Omega))$ и $g(y) = f(x)$ при $y = T(x)$, то равенствам $Pf(x^{(j)}) = f_j$ соответствуют равенства $\bar{P}g(y^{(j)}) = g_j := g(y^{(j)})$. Поэтому интерполяционные многочлены $p \in \Pi$ и $q \in \Pi_1(\mathbb{R}^{d-1})$ также связаны соотношением $p(x) = q(y)$. Пусть $\lambda_j \in \Pi$ — базисные многочлены Лагранжа проектора P , μ_j — базисные многочлены Лагранжа проектора $\bar{P}$ (или симплекса $S = \text{conv}(y^{(1)}, \dots, y^{(d)}) \subset \mathbb{R}^{d-1}$), то $\mu(y) = \mu(T(x)) = \lambda_j(x)$. Следовательно,

$$\|\bar{P}\|_{T(\Omega)} = \|P\|_{\Omega}.$$

В связи с этим при оценивании нормы $\|P\|_\Omega$ оказывается возможным применить геометрические неравенства для нормы проектора $\bar{P}$ при линейной интерполяции на $(d-1)$ -мерном множестве $T(\Omega)$. Этот подход был предложен М. В. Невским; полученные им результаты содержатся в статьях [2], [3] и монографии [1]. Приведём нужные нам утверждения.

Для проектора $P : C(\Omega) \rightarrow \Pi$ с узлами $x^{(j)}$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{d-1} \right) (\|P\|_\Omega - 1) + 1 \leq \xi(T(\Omega); S) \leq \frac{d}{2} (\|P\|_\Omega - 1) + 1, \quad (6)$$

где $S - (d-1)$ -мерный симплекс с вершинами $T(x^{(j)})$. Справедливы соотношения

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{d-1} \right) (\theta(\Pi; \Omega) - 1) + 1 \leq \xi_{d-1}(T(\Omega)) \leq \frac{d}{2} (\theta(\Pi; \Omega) - 1) + 1. \quad (7)$$

Если $\|P\|_\Omega \neq 1$, то (6) можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{d-1} \right) \leq \frac{\xi(T(\Omega); S) - 1}{\|P\|_\Omega - 1} \leq \frac{d}{2}. \quad (8)$$

При $\theta(\Pi; \Omega) \neq 1$ соотношение (7) равносильно

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{d-1} \right) \leq \frac{\xi_{d-1}(T(\Omega)) - 1}{\theta(\Pi; \Omega) - 1} \leq \frac{d}{2}. \quad (9)$$

Точку $y = T(x) \in T(\Omega)$ назовём 1-точкой относительно симплекса $S = \text{conv}(y^{(1)}, \dots, y^{(d)})$, если

$$\|P\|_\Omega = \sum_{j=1}^d |\lambda_j(x)|$$

и среди чисел $\lambda_j(x)$ имеется ровно одно отрицательное. Если такая точка существует, то правое неравенство в (6) становится равенством. Последнее утверждение доказано в [2] в эквивалентном виде. Понятия 1-вершины куба и 1-точки произвольного множества были введены соответственно в [3] и [4].

Если 1-точка множества $T(\Omega)$ существует для симплекса $S = \text{conv}(T(x^{(1)}), \dots, T(x^{(d)}))$ такого, что $\xi(T(\Omega); S) = \xi_{d-1}(T(\Omega))$, то правое соотношение в (7) является равенством и проектор $P : C(\Omega) \rightarrow \Pi$ с узлами $x^{(j)}$ является минимальным.

Случай $\Pi = \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ подробно исследовался в цикле работ авторов (см., например, [3], [1], [5], [4] и библиографию в этих работах). В этой ситуации $d = \dim \Pi_1(\mathbb{R}^n) = n + 1$; отображение T является тождественным. Наиболее интересные результаты были получены в случае, когда $\Omega - n$ -мерный куб или n -мерный евклидов шар.

В настоящей статье соотношения (6)–(9) обсуждаются для полиномиальной интерполяции на отрезке. Всюду далее $n = 1$, $\Pi = \Pi_k(\mathbb{R}^1)$, $k \geq 1$, $d = \dim \Pi_k(\mathbb{R}^1) = k + 1$, $\varphi_j(x) = x^j$ ($1 \leq j \leq k$). Возьмём $\Omega = [-1, 1]$, тогда

$$T(\Omega) = T([-1, 1]) = \{(x, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^k : -1 \leq x \leq 1\}.$$

В пунктах 2–4 рассматриваются случаи $k = 2, 3, 4$. В пункте 5 собраны численные оценки величин $\theta(\Pi_k(\mathbb{R}^1); [-1, 1])$ и $\xi_k(T([-1, 1]))$ при $1 \leq k \leq 10$. Наконец, в пунктах 6–7 приводится материал, касающийся равномерных узлов и узлов Чебышёва. В статье отмечаются все найденные случаи, когда справа в (6)–(9) выполняются равенства.

Численные результаты получены А. Ю. Ухаловым, подробные вычислительные данные размещены в базе Mendeley Data [6]. При проведении вычислений применялась система компьютерной математики Wolfram Mathematica (см., например, [7], [8], [9]). Использовались также специально написанные программы на языке C++. Для обращения матриц и решения экстремальных задач использовались функции библиотеки DLIB (см. [10]).

2. Квадратичная интерполяция на отрезке

Простейший случай интерполяции многочленами степени выше первой — квадратичная интерполяция на отрезке. Аналитическое решение задачи о минимальном проекторе при указанном геометрическом подходе дано в [2], компьютерные методы применялись в [11]. Рассмотрим этот случай в качестве иллюстрации.

Известно (см., например, [12]), что минимальная величина нормы интерполяционного проектора в этой ситуации равна $5/4$ и эта величина реализуется для равномерных узлов. Покажем, как отмеченный результат получается с помощью (6)–(7). Дополнительно получается, что минимальных проекторов здесь бесконечно много.

Пусть $\Pi = \Pi_2(\mathbb{R}^1)$. Тогда $d = \dim \Pi = 3$, т. е. $k = d - 1 = 2$. Отображение T имеет вид $x \mapsto (x, x^2)$, и множество $T(\Omega) = T([-1, 1]) = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}$ есть часть параболы. Для узлов интерполяции $-1 \leq r < s < t \leq 1$ имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & r & r^2 \\ 1 & s & s^2 \\ 1 & t & t^2 \end{pmatrix},$$

симплекс S представляет собой треугольник с вершинами (r, r^2) , (s, s^2) , (t, t^2) , расположенными на этой части параболы. Процесс поглощения таким треугольником параболического сектора изображён на рис. 1.

Из выпуклости функции $\psi(x) = x^2$ следует, что 1-точка множества $T([-1, 1])$ относительно симплекса S существует для любых узлов. Значит, справа в (6) имеет место равенство:

$$\xi(T(\Omega); S) = \frac{3}{2} (\|P\|_\Omega - 1) + 1 = \frac{3\|P\|_\Omega - 1}{2}. \quad (10)$$

Поскольку (10) справедливо для любого проектора $P : C[-1, 1] \rightarrow \Pi_2(\mathbb{R}^1)$, то имеет место и равенство справа в (7):

$$\xi_2(T(\Omega)) = \frac{3\theta(\Pi; \Omega) - 1}{2}.$$

Таким образом, в квадратичном случае нахождение минимальной нормы проектора $\theta(\Pi; \Omega)$ эквивалентно вычислению $\xi_2(T(\Omega))$, т. е. минимального коэффициента поглощения треугольником указанной части параболы. В качестве узлов минимального проектора надо взять первые координаты вершин обнаруженного в итоге треугольника. Техническим путём задача редуцируется к треугольнику S с вершинами $(-r, r^2)$, $(0, 0)$, (r, r^2) , $0 < r \leq 1$. Для него экстремальными точками $y \in T(\Omega)$ могут быть лишь $(\pm 1, 1)$, $(\pm \frac{r}{2}, \frac{r^2}{4})$. Две последние точки определяются тем, что в каждой из них касательная к параболе параллельна боковой стороне S . Вычисления дают

$$\xi(T(\Omega); S) = \max \left(\frac{11}{8}, \frac{3}{r^2} - 2 \right), \quad \|P\|_\Omega = \max \left(\frac{5}{4}, \frac{2}{r^2} - 1 \right).$$

Интересно, что при

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} = 0.942809 \dots \leq r \leq 1$$

эти величины не зависят от r и равны соответственно $11/8$ и $5/4$, причём это минимальные возможные значения. Значит,

$$\xi_2(T(\Omega)) = \frac{11}{8}, \quad \theta(\Pi; \Omega) = \frac{5}{4}.$$

Минимальным является любой проектор с узлами $-r, 0, r$ при $r \in \left[\frac{2\sqrt{2}}{3}, 1 \right]$. Других минимальных проекторов в этом случае нет. Заметим, что соотношения (7) и (9) записываются соответственно как

$$\frac{11}{16} < \frac{11}{8} = \frac{11}{8}, \quad \frac{3}{4} < \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

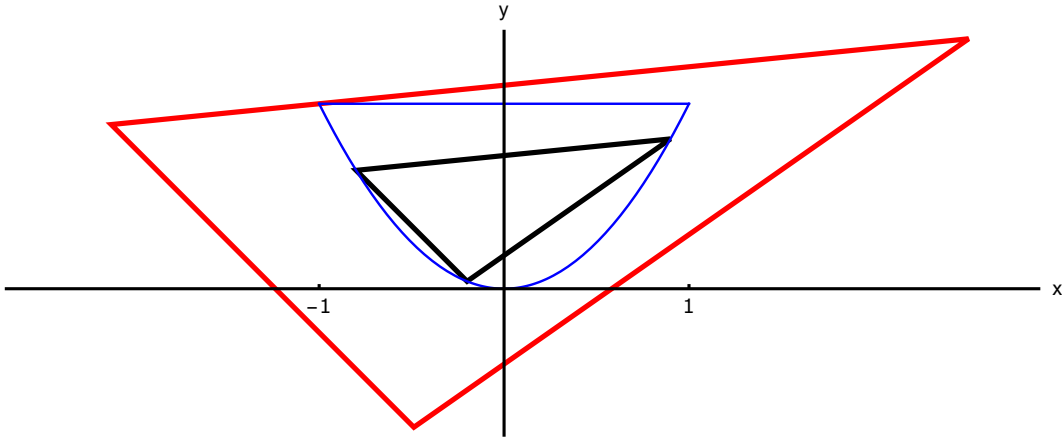


Fig. 1. The absorption of the parabolic sector by a triangle

Рис. 1. Поглощение параболического сектора треугольником

3. Кубическая интерполяция на отрезке

В случае $\Pi = \Pi_3(\mathbb{R}^1)$ верно $d = \dim \Pi = 4$, $k = d - 1 = 3$. Отображение T имеет вид $x \mapsto (x, x^2, x^3)$, поэтому множество $T(\Omega) = T([-1, 1]) = \{(x, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1\}$. Это трёхмерная линия с концами в точках $(-1, 1, -1)$ и $(1, 1, 1)$, проекции которой на координатные плоскости конгруэнтны кривым $Y = X^2$, $Y = X^3$ и $X(t) = t^2$, $Y(t) = t^3$; последняя имеет нулевой угол в точке $X = Y = 0$.

Для узлов $-1 \leq r < s < t < u \leq 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & r & r^2 & r^3 \\ 1 & s & s^2 & s^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \\ 1 & u & u^2 & u^3 \end{pmatrix},$$

симплекс S представляет собой тетраэдр с вершинами

$$(r, r^2, r^3), \quad (s, s^2, s^3), \quad (t, t^2, t^3), \quad (u, u^2, u^3), \quad (11)$$

принадлежащими $T(\Omega)$. Поглощение множества $T(\Omega)$ тетраэдром S иллюстрируется на рис. 2.

Минимальные значения $\|P\|_\Omega$ и $\xi(T(\Omega); S)$ были найдены с помощью компьютера. Минимум $\|P\|_\Omega$, равный $1.422919\dots$, достигается на симметричных узлах

$$-1, \quad -0.417791\dots, \quad 0.417791\dots, \quad 1. \quad (12)$$

Минимум $\xi(T(\Omega); S)$, равный $1.635778\dots$, доставляет тетраэдр, вершины которого получаются после применения преобразования T к точкам $-1, -0.481618\dots, 0.481618\dots, 1$.

Итак, компьютерные вычисления дают $\theta(\Pi; \Omega) = 1.422919\dots$, $\xi_3(T(\Omega)) = 1.635778\dots$. При таких значениях оба неравенства в (7) являются строгими и имеют вид $1.28194\dots < 1.63577\dots < 1.84583\dots$. Соотношение (9) записывается как $\frac{2}{3} < 1.503307\dots < 2$.

Как отмечалось в пункте 2, при квадратичной интерполяции 1-точка множества $T(\Omega)$ существует для любого проектора. В рассматриваемом случае это не так. Например, пусть

$$r = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad s = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \quad t = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \quad u = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Эти точки являются корнями многочлена Чебышёва четвёртой степени $8x^4 - 8x^2 + 1$, поэтому называются *узлами Чебышёва*. Тогда $\|P\|_\Omega = \sqrt{2+\sqrt{2}} = 1.847759\dots$, $\xi(T(\Omega); S) = 2.496605\dots$, и неравенство (6) имеет вид $1.5651727\dots < 2.496605\dots < 2.695518\dots$. Поскольку правое соотношение в (6) равенством не является, 1-точки множества $T(\Omega)$ относительно симплекса S с вершинами (11) в данном случае не существует.

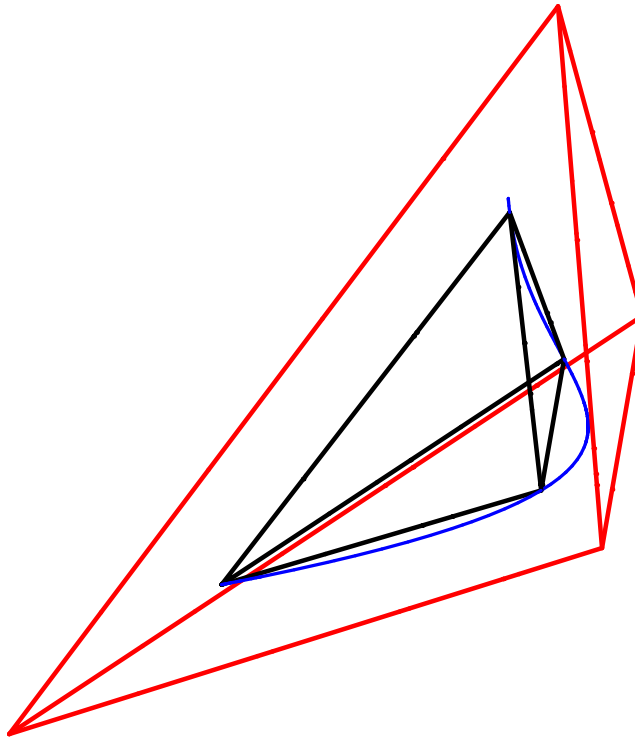


Fig. 2. The absorption of the set $T([-1, 1])$ by a tetrahedron

Рис. 2. Поглощение множества $T([-1, 1])$ тетраэдром

Тем не менее, как показывают наши вычисления, для некоторых наборов узлов правое соотношение в (6) обращается в равенство (с точностью не менее 10^{-11}). Указанным свойством обладают равномерные узлы, а также узлы (12) минимального проектора.

Для равномерных узлов имеем $\|P\|_\Omega = 1.63113030\dots$, $\xi(T(\Omega); S) = 2.26226061\dots$, соотношение (6) принимает вид $1.420753\dots < 2.262260\dots = 2.262260\dots$. Отметим, что вычисление $\|P\|_\Omega$ и $\xi(T(\Omega); S)$ производилось с помощью двух различных программ. Однако последнее равенство выполняется с точностью не менее чем 10^{-18} .

Для узлов (12) норма проектора минимальна: $\|P\|_{\Omega} = \theta(\Pi; \Omega) = 1.422919\dots$, коэффициент поглощения $\xi(T(\Omega); S) = 1.845839\dots$, а соотношение (6) записывается как $1.281946\dots < 1.845839\dots = 1.845839\dots$.

Разумеется, приближённые вычисления даже с большой точностью не гарантируют наличия справа в (6) равенства. Строгое доказательство этого равенства даёт использование подхода с применением понятия 1-точки (см. пункт 1). Приведём данные для двух рассматриваемых случаев.

Для равномерных узлов

$$x^{(1)} = -1, \quad x^{(2)} = -\frac{1}{3}, \quad x^{(3)} = \frac{1}{3}, \quad x^{(4)} = 1$$

и точки $x^* = -0.699055\dots$ выполняются равенства $\|P\|_{\Omega} = 1.631130\dots = \sum |\lambda_j(x^*)|$, причём

$$\lambda_1(x^*) = 0.890801\dots, \quad \lambda_2(x^*) = -0.315565\dots, \quad \lambda_3(x^*) = 0.360848\dots, \quad \lambda_4(x^*) = 0.063915\dots$$

Следовательно, $y^* = T(x^*)$ является 1-точкой множества $T(\Omega)$ относительно тетраэдра с вершинами $T(x^{(j)})$. В соответствии со сказанным в пункте 1 правое соотношение в (6) обращается в равенство. Заметим, что $\det(A) = 1.053497\dots$.

Для узлов

$$x^{(1)} = -1, \quad x^{(2)} = -0.417791\dots, \quad x^{(3)} = 0.417791\dots, \quad x^{(4)} = 1$$

при $x^{**} = -0.733172\dots$ имеем $\|P\|_{\Omega} = 1.422919\dots = \sum |\lambda_j(x^{**})|$. Так как

$$\lambda_1(x^{**}) = -0.211459\dots, \quad \lambda_2(x^{**}) = 0.771708\dots, \quad \lambda_3(x^{**}) = 0.381082\dots, \quad \lambda_4(x^{**}) = 0.058668\dots,$$

то $y^{**} = T(x^{**})$ является 1-точкой множества $T(\Omega)$ относительно тетраэдра с вершинами $T(x^{(j)})$. Наличие 1-точки означает, что и в этом случае справа в (6) имеет место равенство. Здесь $\det(A) = -1.138679\dots$.

4. Интерполяция многочленами из $\Pi_4(\mathbb{R}^1)$

При $\Pi = \Pi_4(\mathbb{R}^1)$ имеем $d = \dim \Pi = 5$, $k = d - 1 = 4$. Отображение T имеет вид $x \mapsto (x, x^2, x^3, x^4)$, множество $T(\Omega) = T([-1, 1]) = \{(x, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 : -1 \leq x \leq 1\}$. Для узлов $-1 \leq r < s < t < u < v \leq 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 \\ 1 & s & s^2 & s^3 & s^4 \\ 1 & t & t^2 & t^3 & t^4 \\ 1 & u & u^2 & u^3 & u^4 \\ 1 & v & v^2 & v^3 & v^4 \end{pmatrix}.$$

Координаты вершин симплекса $S \subset \mathbb{R}^4$ записаны в матрицу A построчно, начиная со второго столбца.

Узлы Чебышёва, т. е. корни многочлена Чебышёва пятой степени $16x^5 - 20x^3 + 5x$, имеют вид

$$r = -\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \quad s = -\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \quad t = 0, \quad u = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \quad v = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}.$$

В этом случае $\|P\|_{\Omega} = \frac{1+4\sqrt{5}}{5} = 1.988854\dots$, но это не наименьшее возможное значение.

Приведём результаты компьютерных вычислений. Минимум $\|P\|_{\Omega}$, равный $1.559490\dots$, достигается на симметричных узлах $-1, -0.620911\dots, 0, 0.620911\dots, 1$. Минимум $\xi(T(\Omega); S)$, равный $1.981193\dots$, доставляет симплекс, вершины которого получаются после применения оператора T к точкам $-1, -0.650738\dots, 0, 0.650738\dots, 1$.

Таким образом, компьютер даёт $\theta(\Pi; \Omega) = 1.559490\dots$, $\xi_4(T(\Omega)) = 1.981193\dots$. С этими значениями неравенства (7) являются строгими и имеют вид $1.349681\dots < 1.981193\dots < 2.398725\dots$.

5. Оценки величин $\theta(\Pi_k(\mathbb{R}^1); [-1, 1])$ и $\xi_k(T([-1, 1]))$ при $1 \leq k \leq 10$

В этом пункте приводятся полученные численным путём оценки минимальных норм интерполяционных проекторов, действующих из $C[-1, 1]$ на пространства $\Pi_k(\mathbb{R}^1)$ при $1 \leq k \leq 10$, и минимальных коэффициентов поглощения в тех же случаях. Для краткости мы обозначили $\theta_k := \theta(\Pi_k(\mathbb{R}^1); [-1, 1])$, $\xi_k := \xi_k(T([-1, 1]))$.

Table 1. Minimal norms of projectors and corresponding absorption coefficients

Таблица 1. Минимальные нормы проекторов и соответствующие коэффициенты поглощения

k	$\theta_k \leq$	$\xi(S)$
1	1	1
2	1.25	1.375
3	1.422919...	1.845839...
4	1.559490...	2.224196...
5	1.672210...	2.574785...
6	1.768134...	2.911143...
7	1.851599...	3.239031...
8	1.925457...	3.561425...
9	1.991685...	3.880036...
10	2.051705...	4.195926...

Table 2. Minimal absorption coefficients and corresponding norms of projectors

Таблица 2. Минимальные коэффициенты поглощения и соответствующие нормы проекторов

k	$\xi_k \leq$	$\ P\ $
1	1	1
2	1.375000...	1.250000...
3	1.635778...	1.604018...
4	1.981193...	1.626067...
5	2.210535...	1.782786...
6	2.455130...	1.858521...
7	2.678509...	1.962845...
8	2.907301...	2.029565...
9	3.128316...	2.108072...
10	3.351866...	2.164915...

В таблице 1 даются значения k (степень интерполяционного многочлена), верхняя оценка θ_k и величина $\xi(S) := \xi(T([-1, 1]); S)$ коэффициента поглощения множества $T([-1, 1])$ симплексом с вершинами в точках $T(x^{(j)})$, где $x^{(j)}$ — узлы интерполяционного проектора, на котором получена приведённая оценка θ_k . Значения $\theta_1 = 1$ и $\theta_2 = 1.25$ являются точными. Равенство справа в (6) выполняется при $k = 1, 2, 3$.

В таблице 2 приводятся верхние оценки минимальных коэффициентов поглощения ξ_k и нормы $\|P\| := \|P\|_{[-1, 1]}$ тех проекторов, узлы которых восстанавливаются из вершин экстремальных симплексов. Значения $\xi_1 = 1$ и $\xi_2 = 1.375$ являются точными. Правое равенство в (6) имеет место при $k = 1, 2$.

Найденные численно узлы минимальных проекторов и параметрические координаты вершин экстремальных симплексов приведены в [6]. Там же можно найти значения оценок для θ_k и ξ_k с большим числом знаков после запятой.

6. Равномерные узлы

Компьютерные вычисления коэффициентов поглощения и норм проекторов для равномерных узлов (см. таблицу 3) осложняются быстрым уменьшением модуля определителя матрицы A . Например, для $k = 11$ имеем $\det(A) = 3.63581 \cdot 10^{-14}$. Далее, с ростом k , абсолютное значение определителя быстро убывает. При вычислениях на системах со стандартным представлением чисел с плавающей точкой трудно гарантировать точность результатов. По этой причине мы приводим значения рассматриваемых величин только для $1 \leq k \leq 10$. Заметим, что правое равенство в (6) выполняется при $k = 1, 2, 3$.

Table 3. Absorption coefficients and norms of projectors for regular nodes

Таблица 3. Коэффициенты поглощения и нормы проекторов для равномерных узлов

k	$\xi(S)$	$\ P\ $
1	1	1
2	1.375	1.25
3	2.262260...	1.631130...
4	3.812500...	2.207824...
5	6.167317...	3.106301...
6	9.461457...	4.549341...
7	13.824447...	6.929739...
8	21.876588...	10.945645...
9	41.283675...	17.848612...
10	72.576233...	29.899955...

Table 4. Absorption coefficients and norms of projectors for Chebyshev nodes

Таблица 4. Коэффициенты поглощения и нормы проекторов для чебышёвских узлов

k	$\xi(S)$	$\ P\ $
1	1.414213...	1.414213...
2	2.000000...	1.666666...
3	2.496605...	1.847759...
4	2.962610...	1.988854...
5	3.414213...	2.104397...
6	3.857835...	2.202214...
7	4.296558...	2.287016...
8	4.732050...	2.361856...
9	5.165299...	2.428829...
10	5.596925...	2.489430...
11	6.027339...	2.544766...
12	6.456823...	2.595678...

7. Узлы Чебышёва

В таблице 4 приводятся результаты вычислений коэффициентов поглощения и норм проекторов для узлов Чебышёва, то есть узлов, совпадающих с нулями многочлена Чебышёва нужной степени. Правое равенство в (6) выполняется при $k = 1, 2$.

Как и в случае равномерных узлов, за точность вычислений коэффициентов поглощения на компьютере можно ручаться только при небольших k . Мы приводим значения только для $1 \leq k \leq 12$. Уже для $k = 12$ имеем $\det(A) = 3.68529 \cdot 10^{-15}$. При возрастании k определители становятся еще меньше по модулю, что может приводить к снижению точности при использовании переменных типа `double` языка C++. Нормы проектора для чебышёвских узлов вычислялись нами по точной формуле (см., например, [12]), поэтому на значения норм данное замечание не распространяется.

Отметим, что используемая нами для вычисления норм проекторов программа на C++ даёт удовлетворительное совпадение значений с точной формулой по крайней мере при $k \leq 30$.

References

- [1] M. V. Nevskii, *Geometricheskie Ocenki v Polinomial'noj Interpolyacii*. P. G. Demidov Yaroslavl State University, 2012, 218 pp., in Russian.
- [2] M. V. Nevskii, "Inequalities for the norms of interpolation projectors", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 15, no. 3, pp. 28–37, 2008.
- [3] M. V. Nevskii, "On a certain relation for the minimal norm of an interpolation projector", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 16, no. 1, pp. 24–43, 2009.
- [4] M. V. Nevskii and A. Y. Ukhalov, "Linear interpolation on a Euclidean ball in $\mathbb{R}^n$ ", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 26, no. 2, pp. 279–296, 2019.
- [5] M. V. Nevskii and A. Y. Ukhalov, "On optimal interpolation by linear functions on an n -dimensional cube", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 25, no. 3, pp. 291–311, 2018.
- [6] A. Ukhalov, "Supplementary materials for the article "On a geometric approach to the estimation of interpolation projectors"", *Mendeley Data*, V1, 2023. DOI: [10.17632/snh5m99yxr.1](https://doi.org/10.17632/snh5m99yxr.1).
- [7] P. Wellin, *Essentials of Programming in Mathematica*. Cambridge University Press, 2016, 436 pp.
- [8] S. Mangano, *Mathematica Cookbook: Building Blocks for Science, Engineering, Finance, Music, and More*. O'Reilly Media Inc., 2010, 830 pp.
- [9] S. Wolfram, *An Elementary Introduction to the Wolfram Language*. Wolfram Media, Inc., 2017, 340 pp.
- [10] D. E. King, "Dlib-ml: A machine learning toolkit", *Journal of Machine Learning Research*, vol. 10, pp. 1755–1758, 2009.
- [11] N. S. Bogomolova, "Kvadratichnaya interpolyaciya i zadacha o pogloshchenii treugol'nikom parabolicheskogo sektora", in *Put' v Nauku. Matematika. Tezisy Dokladov Vserossiyskoy Molodezhnoi Konferencii*, in Russian, 2022, pp. 39–41.
- [12] S. Pashkovskij, *Vychislitel'nye Primeneniya Mnogochlenov i Ryadov Chebysheva*. Nauka, 1983, 384 pp., in Russian.