

NP-completeness of the Eulerian Walk Problem for a Multiple Graph

A. V. Smirnov¹

DOI: [10.18255/1818-1015-2024-1-102-114](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2024-1-102-114)

¹P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

MSC2020: 05C45, 05C65

Research article

Full text in Russian

Received January 22, 2024

Revised January 29, 2024

Accepted January 31, 2024

In this paper, we study undirected multiple graphs of any natural multiplicity $k > 1$. There are edges of three types: ordinary edges, multiple edges and multi-edges. Each edge of the last two types is a union of k linked edges, which connect 2 or $(k + 1)$ vertices, correspondingly. The linked edges should be used simultaneously. If a vertex is incident to a multiple edge, it can be also incident to other multiple edges and it can be the common end of k linked edges of some multi-edge. If a vertex is the common end of some multi-edge, it cannot be the common end of another multi-edge.

We study the problem of finding the Eulerian walk (the cycle or the trail) in a multiple graph, which generalizes the classical problem for an ordinary graph. We prove that the recognition variant of the multiple eulerian walk problem is NP-complete. For this purpose we first prove NP-completeness of the auxiliary problem of recognising the covering trails with given endpoints in an ordinary graph.

Keywords: multiple graph; multiple path; divisible graph; covering trails; edge-disjoint paths; eulerian trail; eulerian cycle; NP-completeness

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Smirnov, Alexander V. | ORCID iD: [0000-0002-0980-2507](https://orcid.org/0000-0002-0980-2507). E-mail: alexander_sm@mail.ru
(corresponding author) | PhD, Associate Professor

Funding: Yaroslavl State University (project VIP-016).

For citation: A. V. Smirnov, "NP-completeness of the Eulerian walk problem for a multiple graph", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 31, no. 1, pp. 102–114, 2024. DOI: [10.18255/1818-1015-2024-1-102-114](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2024-1-102-114).

NP-полнота задачи об эйлеровом маршруте в кратном графе

А. В. Смирнов¹

DOI: [10.18255/1818-1015-2024-1-102-114](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2024-1-102-114)

¹Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

УДК 519.17+519.161

Научная статья

Полный текст на русском языке

Получена 22 января 2024 г.

После доработки 29 января 2024 г.

Принята к публикации 31 января 2024 г.

В статье рассматриваются неориентированные кратные графы произвольной натуральной кратности $k > 1$. Кратный граф содержит ребра трех типов: обычные, кратные и мультиребра. Ребра последних двух типов представляют собой объединение k связанных ребер, которые соединяют 2 или $(k + 1)$ вершину соответственно. Связанные ребра могут использоваться только согласованно. Если вершина инцидентна кратному ребру, то она может быть инцидентна другим кратным ребрам, а также она может быть общим концом k связанных ребер мультиребра. Если вершина является общим концом мультиребра, то она не может быть общим концом никакого другого мультиребра.

Рассматривается задача об эйлеровом маршруте (цикле или цепи) в кратном графе, которая обобщает классическую задачу для обычного графа. Доказывается, что задача о кратном эйлеровом маршруте в варианте распознавания является NP-полной. Для этого предварительно обосновывается NP-полнота вспомогательной задачи о покрывающих цепях с заданными концами в обычном графе.

Ключевые слова: кратный граф; кратный путь; делимый граф; покрывающие цепи; пути, не пересекающиеся по ребрам; эйлерова цепь; эйлеров цикл; NP-полнота

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Смирнов, Александр Валерьевич | ORCID iD: [0000-0002-0980-2507](https://orcid.org/0000-0002-0980-2507). E-mail: alexander_sm@mail.ru
(автор для корреспонденции) | Канд. физ.-мат. наук, доцент

Финансирование: ЯрГУ (проект VIP-016).

Для цитирования: A. V. Smirnov, “NP-completeness of the Eulerian walk problem for a multiple graph”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 31, no. 1, pp. 102–114, 2024. DOI: [10.18255/1818-1015-2024-1-102-114](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2024-1-102-114).

Введение

В данной статье мы рассмотрим задачу об *эйлеровом маршруте* (цикле или цепи) в кратном графе. Кратные графы содержат три типа ребер (обычные, кратные и мультиребра) и являются обобщением обычных графов — по сути, обычный граф имеет кратность $k = 1$. Определения кратного графа кратности $k > 1$ и делимого кратного графа были сформулированы в статье [1]. Там же были введены понятия кратного пути и кратного цикла.

Отметим, что частным случаем кратного графа является кратная сеть (см. [2, 3]). Задача о наибольшем потоке в кратной сети обобщает классическую задачу (см. [4]) и имеет ряд приложений в сфере экономики, управления, финансов. В частности, кратные сети и потоки используются для поиска решения NP-трудной задачи целочисленного сбалансирования трех- и четырехмерной матрицы (см., например, [5, 6]).

В статье [7] была поставлена задача об эйлеровом маршруте (цепи или цикле) в неориентированном кратном графе. Главное отличие от эйлерова маршрута в обычном графе — необходимость согласования кратного эйлерова маршрута на связанных ребрах, что означает, что в таком маршруте связанные ребра каждого кратного и мультиребра могут проходиться только одновременно и только в одинаковом направлении. Рассмотрены необходимые условия существования эйлерова маршрута в кратном графе, которые, однако, не будут достаточными из-за того, что при их выполнении не всегда возможно обеспечить согласованность всех связанных ребер в маршруте. Предложен экспоненциальный алгоритм решения задачи о кратном эйлеровом маршруте, выделен один полиномиальный подкласс задачи.

Также в работе [7] была выдвинута гипотеза об NP-трудности задачи об эйлеровом маршруте в кратном графе (что также отличает задачу от классической, для которой существуют быстрые полиномиальные алгоритмы, например, алгоритм Хиргольца, см. [8]). В настоящей статье мы покажем, что соответствующая задача распознавания является NP-полной, откуда и будет следовать истинность указанной гипотезы.

Стоит отметить, что, хотя задача об эйлеровом маршруте в классической постановке для обычного графа полиномиальна, при переходе к обобщению обычного графа либо к варианту постановки с введением дополнительных ограничений задача зачастую становится NP-трудной.

Так происходит, например, в случае одного из наиболее популярных обобщений графов — гиперграфов. Напомним, что гиперграф содержит гиперребра, соединяющие k вершин (см. [9]). Понятие гиперребра, таким образом, в какой-то мере родственно понятию мультиребра в кратном графе, исследуемом в данной статье. Однако есть и существенное отличие двух концепций: все вершины гиперребра «равноправны», в то время как мультиребро определяется как множество из k связанных ребер, соединяющих одну вершину — общий конец с k отдельными вершинами. В работе [10] показано, что задача распознавания эйлерова маршрута в гиперграфе NP-полна даже в случае k -однородного гиперграфа ($k > 2$), в котором все ребра соединяют ровно k вершин.

В статье [11] для темпоральных графов рассмотрены различные варианты задачи об эйлеровом маршруте, среди них выделены полиномиальные и NP-полные. В темпоральном графе каждое ребро e доступно лишь в моменты времени, определяемые функцией $\lambda(e) \in 2^\tau$ ($\tau \geq 2$ — это общее время жизни графа), соответственно, любой маршрут должен учитывать это обстоятельство. Отметим, что NP-полной будет задача в постановке, наиболее близкой к классической, когда требуется найти цепь, проходящую каждое ребро темпорального графа ровно один раз. Это справедливо в том числе для $\tau = 2$.

В работе [12] рассмотрена классическая задача об эйлеровом цикле с дополнительным ограничением: граф изображен на плоскости и для каждой вершины все ребра, инцидентные ей, пронумерованы по часовой стрелке; при этом любые два ребра, идущие подряд в эйлеровом цикле, должны

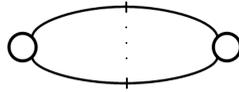


Fig. 1. Multiple edge



Рис. 1. Кратное ребро

иметь соседние номера относительно общей вершины. В указанной статье доказано, что задача распознавания такого эйлерова цикла будет NP-полной даже в случае планарного графа.

Еще один пример классической задачи с дополнительным ограничением — это распознавание эйлерова цикла, в котором каждый подцикл имеет длину не меньше k . В статье [13] обоснована NP-полнота сужения этой задачи, откуда следует NP-полнота общей задачи.

1. Постановка задачи об эйлеровом маршруте в кратном графе

Напомним несколько понятий, связанных с кратными графами и путями. Поскольку данная статья продолжает исследование, описанное в работе [7], здесь будут сформулированы только самые важные определения. Поясняющие примеры и ряд связанных определений были подробно рассмотрены в статьях [1, 7].

Определение 1. *Кратный граф* G произвольной натуральной кратности $k > 1$ — это граф, вершины которого могут соединяться ребрами одного из 3 видов:

1. *Обычное ребро* e^o ; множество обычных ребер обозначим через E^o .
2. *Кратное ребро* e^k между двумя вершинами, которое состоит из k одинаковых связанных ребер; связанные ребра кратного ребра могут использоваться только согласованно; множество кратных ребер обозначим через E^k .
3. *Связанное ребро* e между двумя вершинами, имеющее один общий конец с другим $(k - 1)$ ребром (у любых двух из k связанных ребер только один конец является общим); множество связанных общей вершиной ребер будем называть *мультиребром* e^m ; связанные ребра мультиребра могут использоваться только согласованно; множество мультиребер обозначим через E^m .

Если вершина инцидентна какому-либо кратному ребру, то она может быть инцидентна другим кратным ребрам, а также она может быть общим концом какого-либо мультиребра.

Если вершина является общим концом какого-либо мультиребра, то она не может быть общим концом никакого другого мультиребра.

Если вершина является отдельным концом мультиребра или инцидентна обычному ребру, то она не может быть общим концом мультиребра и не может быть инцидентна кратному ребру.

Множества вершин и ребер графа G обозначим через V и E соответственно. Заметим, что $E = E^o \cup E^k \cup E^m$. Обычное или кратное ребро, соединяющее две вершины x и y , обозначается стандартным образом: $\{x, y\}$. Мультиребро, соединяющее общую вершину x с k отдельными вершинами y_1, \dots, y_k , обозначается так: $e_x^m = \{x, \{y_1, \dots, y_k\}\}$.

Рис. 1 и 2 иллюстрируют определение 1. В левой части рис. 1 кратное ребро представлено в виде объединения k одинаковых ребер между двумя вершинами, что показано штрихами. Равенство (или согласованность) связанных ребер предполагает, что все характеристики этих ребер (например, длина) одинаковы, и эти ребра могут использоваться только одновременно. Так, если осуществляется проход в определенном направлении по одному из связанных ребер, то одновременно с этим все остальные ребра проходятся в том же самом направлении. Кратное ребро может включаться в какие-либо новые структуры только целиком. В дальнейшем мы будем обозначать кратные ребра жирными линиями, как в правой части рис. 1.

В левой части рис. 2 мультиребро $\{x_0, \{x_1, \dots, x_k\}\}$ представлено в виде объединения k одинаковых ребер, связывающих общую вершину x_0 с k разными вершинами x_1, \dots, x_k . Как и на рис. 1, равен-

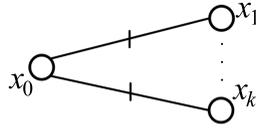


Fig. 2. Multi-edge

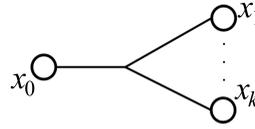


Рис. 2. Мультиребро

ство ребер показано штрихами. Согласованность связанных ребер имеет тот же смысл, что и для кратных ребер. В дальнейшем мультиребра мы будем изображать при помощи расщепляющихся на k частей линий, как в правой части рис. 2.

В данной статье рассматриваются только неориентированные кратные графы.

Определение 2. *Обычной вершиной* назовем вершину, которая инцидентна обычному ребру или является отдельным концом мультиребра.

Кратной вершиной назовем вершину, которая инцидентна кратному ребру или является общим концом мультиребра.

Из определения 1 следует, что множества обычных и кратных вершин не пересекаются. При этом кратная вершина может быть соединена с обычными только посредством мультиребра.

Определение 3. *Делимым кратным графом* назовем такой граф, в котором между двумя концами одного мультиребра не существует пути, проходящего только по обычным ребрам.

При удалении всех мультиребер делимый граф распадется на n компонент связности (связность здесь понимается в том же смысле, что и для обычных графов), каждая из которых содержит только кратные ребра либо только обычные ребра. При этом связанные ребра каждого мультиребра можно пронумеровать от 1 до k таким образом, что каждой компоненте связности, содержащей только обычные ребра, будут инцидентны связанные ребра мультиребер с одинаковыми номерами.

Определение 4. *Частью G_i ($i \in \overline{1, k}$)* делимого графа $G(V, E)$ назовем подграф, содержащий связанные ребра с номером i всех кратных и мультиребер, а также компоненты связности, состоящие из обычных ребер и инцидентные i -ым связанным ребрам всех мультиребер.

Определение 5. $S(x, y) = \cup_{i=1}^k S^i(x, y)$ является *кратным путем* из вершины x в вершину y в графе $G(V, E)$, если выполнены следующие условия:

1. $S^i(x, y) = \left(\{x, v_1^i\}, \{v_1^i, v_2^i\}, \dots, \{v_{l_i-1}^i, v_{l_i}^i\}, \{v_{l_i}^i, y\} \right)$, где $l_i \geq 0$, — последовательность ребер, представляющая собой обычный (некратный) путь из x в y , где каждое ребро $\{a, b\}$ является либо обычным ребром в графе $G(V, E)$, либо i -ым связанным ребром кратного или мультиребра. Значения l_i и l_j ($i \neq j$) не согласовываются и могут быть как равными, так и различными. Если в путь $S(x, y)$ не входит ни одного кратного или мультиребра, то $S^2(x, y) = S^3(x, y) = \dots = S^k(x, y) = \emptyset$.
2. Любая обычная вершина может встретиться в $S^i(x, y)$ несколько раз, то есть $S^i(x, y)$ может содержать циклы.
3. Никакая кратная вершина не может встретиться в $S^i(x, y)$ дважды.
4. Любое обычное ребро может встречаться в $S^i(x, y)$ несколько раз, причем направления, в которых оно проходится в разных вхождениях, могут не совпадать.
5. Обычное ребро, входящее в $S^i(x, y)$, может также входить в любой $S^j(x, y)$, $j \neq i$.
6. Все пути $S^i(x, y)$ согласованы (одинаковы) на общей части. Это условие означает, что если связанное ребро какого-то кратного или мультиребра входит в некоторый путь $S^i(x, y)$, то остальные связанные ребра должны входить во все $S^j(x, y)$, $j \neq i$ (по одному связанному

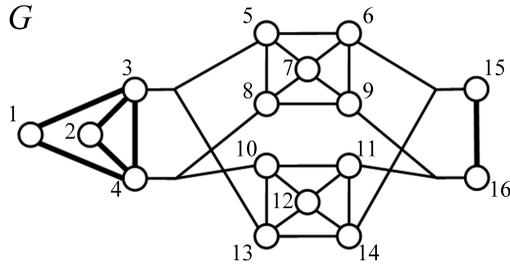


Fig. 3. Divisible graph of multiplicity 2

Рис. 3. Делимый граф кратности 2

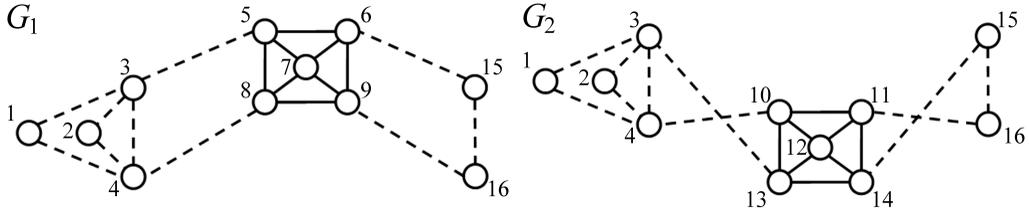


Fig. 4. Partition of a divisible graph

Рис. 4. Части делимого графа

ребру в каждый $S^j(x, y)$). При этом порядок вхождения всех кратных и мультиребер во все $S^i(x, y)$ одинаков.

Фактически это значит, что если e_1 и e_2 — это два ребра пути $S(x, y)$, каждое из которых либо кратное, либо мультиребро, и в проекции $S^i(x, y)$ связанное ребро из e_1 проходится раньше связанного ребра из e_2 , то во всех остальных проекциях $S^j(x, y)$ связанные ребра из e_2 могут проходиться только после связанных ребер из e_1 .

- Если $S(x, y)$ содержит мультиребро $\{x_0, \{x_1, \dots, x_k\}\}$, проходимое в направлении от общего конца, то он не может содержать никакого другого мультиребра $\{y_0, \{x_1, \dots, x_k\}\}$, проходимого в том же направлении. Аналогичное условие должно выполняться и в случае движения к общему концу.

Определение 6. Кратный путь $S(x, y)$ является *кратным циклом*, если $x = y$ и $S(x, y) \neq \emptyset$.

Пример 1. Рассмотрим представленный на рис. 3 кратный граф G кратности 2 со следующими множествами обычных, кратных и мультиребер (вершины будем обозначать их номерами):

$$E^k = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{15, 16\}\};$$

$$E^m = \{\{3, \{5, 13\}\}, \{4, \{8, 10\}\}, \{15, \{6, 14\}\}, \{16, \{9, 11\}\}\};$$

$$E^o = \{\{5, 6\}, \{5, 7\}, \{5, 8\}, \{6, 7\}, \{6, 9\}, \{7, 8\}, \{7, 9\}, \{8, 9\}, \{10, 11\}, \\ \{10, 12\}, \{10, 13\}, \{11, 12\}, \{11, 14\}, \{12, 13\}, \{12, 14\}, \{13, 14\}\}.$$

Граф G является делимым. Части G_1 и G_2 этого графа показаны на рис. 4, связанные ребра всех кратных и мультиребер изображены пунктирными линиями.

Заметим, что граф перестанет быть делимым, если добавить в него обычное ребро между любой парой вершин из множеств $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ и $\{10, 11, 12, 13, 14\}$.

Построим теперь в кратном графе $G(V, E)$ один из многочисленных возможных кратных путей $S(1, 2)$ из вершины 1 в вершину 2. Он состоит из двух обычных путей:

$$S^1(1, 2) = (\underline{\{1, 3\}}, \underline{\{3, 5\}}, \underline{\{5, 6\}}, \underline{\{6, 9\}}, \underline{\{9, 16\}}, \underline{\{16, 15\}}, \underline{\{15, 6\}}, \underline{\{6, 5\}}, \underline{\{5, 7\}}, \underline{\{7, 8\}}, \underline{\{8, 4\}}, \underline{\{4, 2\}});$$

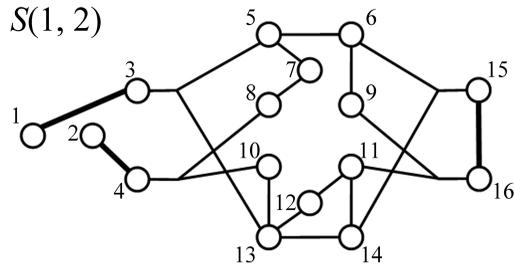


Fig. 5. Multiple path in the divisible graph

Рис. 5. Кратный путь в делимом графе

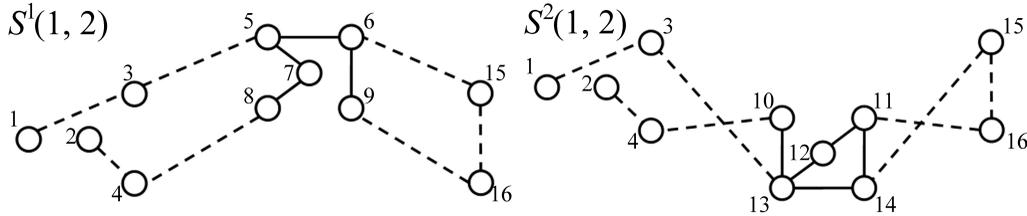


Fig. 6. Partition of the multiple path

Рис. 6. Части кратного пути

$$S^2(1, 2) = (\{1, 3\}, \{3, 13\}, \{13, 14\}, \underline{\{14, 11\}}, \underline{\{11, 16\}}, \\ \underline{\{16, 15\}}, \underline{\{15, 14\}}, \underline{\{14, 11\}}, \{11, 12\}, \{12, 13\}, \{13, 10\}, \underline{\{10, 4\}}, \underline{\{4, 2\}}).$$

Связанные ребра кратных и мультиребер отмечены подчеркиванием. Двойным подчеркиванием в пути $S^1(1, 2)$ отмечено обычное ребро $\{5, 6\}$, которое в этом пути проходится дважды, но в противоположных направлениях. Соответственно, в пути $S^2(1, 2)$ двойным подчеркиванием отмечено обычное ребро $\{14, 11\}$, которое также проходится дважды, но в одном и том же направлении. Таким образом, в пути $S^1(1, 2)$ содержится обычный цикл $(6, 9, 16, 15, 6)$, а в пути $S^2(1, 2)$ содержатся обычные циклы $(14, 11, 16, 15, 14)$ и $(13, 14, 11, 16, 15, 14, 11, 12, 13)$, а вершины 5, 6, 11, 13, 14 проходятся дважды. Однако кратный путь $S(1, 2)$ не содержит в себе кратных циклов, как и должно быть (ни одна кратная вершина не проходится дважды). Полученный кратный путь $S(1, 2)$ показан на рис. 5. Части $S^1(1, 2)$ и $S^2(1, 2)$ этого пути представлены на рис. 6.

Отметим, что при замене в кратном пути $S(1, 2)$ ребра $\{4, 2\}$ на ребро $\{4, 1\}$ мы получим кратный цикл.

Определение 7. Эйлеровым маршрутом μ в кратном графе $G(V, E)$ назовем такой обход графа $G(V, E)$, в котором каждое ребро из E встречается ровно один раз, а связанные ребра каждого кратного и мультиребра из $E^k \cup E^m$ используются только согласованно (одновременно).

Как и в определении 5, для эйлерова маршрута выполнено: $\mu = \cup_{i=1}^k \mu^i$, то есть каждый эйлеров маршрут μ в кратном графе представляет собой объединение k обычных маршрутов μ^i ($i \in \overline{1, k}$), в каждом из которых присутствует ровно одно связанное ребро каждого кратного и мультиребра, причем порядок обхода связанных ребер одинаков во всех μ^i .

Определение 8. Замкнутый эйлеров маршрут в кратном графе (начальная вершина равна конечной) называется эйлеровым циклом.

Незамкнутый эйлеров маршрут в кратном графе называется эйлеровой цепью.

Кратный граф назовем эйлеровым, если в нем существует эйлеров маршрут (цикл или цепь).

Если сравнить определение кратного пути и эйлеровой цепи в кратном графе, можно заметить, что эйлерова цепь — это, по сути, кратный путь, в котором допускается использование нескольких мультиребер с одинаковыми множествами конечных вершин, проходимых в одном направлении,

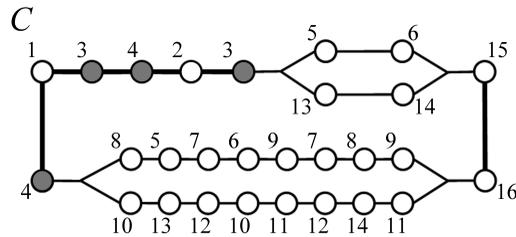


Fig. 7. Eulerian cycle in the multiple graph

Рис. 7. Эйлеров цикл в кратном графе

а также повторное использование кратных вершин, однако не допускается повтор встречавшихся ранее обычных ребер. Точно те же допущения относятся к эйлерову циклу в кратном графе в сравнении с кратным циклом.

Пример 2. Снова рассмотрим кратный граф из примера 1 (рис. 3). Нетрудно убедиться, что в этом графе существует эйлеров цикл C , представленный на рис. 7.

Следует отметить, что в эйлеровом цикле C две кратные вершины 3 и 4 проходятся дважды (на рисунке отмечены серым), поэтому цикл C является эйлеровым маршрутом, но не является кратным циклом согласно определению 6.

Поставим следующую задачу распознавания кратного эйлерова маршрута.

Задача 1 (распознавание эйлерова маршрута в кратном графе).

Дано: связный кратный граф $G(V, E)$.

Вопрос: существует ли в кратном графе $G(V, E)$ эйлеров маршрут (цикл или цепь)?

В дальнейшем мы будем обозначать задачу распознавания 1 как MEW (multiple eulerian walk).

2. Покрывающие цепи с заданными концами в обычном графе

В данном разделе мы докажем NP-полноту задачи о покрывающих цепях с заданными концами в обычном графе (в постановке задачи распознавания). Соответствующая оптимизационная задача решается при построении эйлерова маршрута в кратном графе (см. [7]).

Рассмотрим сначала классическую задачу о путях, не пересекающихся по ребрам (см. [14]).

Задача 2 (пути, не пересекающиеся по ребрам).

Дано: обычный связный граф $G(V, E)$, в котором выделено p начальных вершин s_1, \dots, s_p и p конечных вершин t_1, \dots, t_p .

Вопрос: существуют ли в графе $G(V, E)$ p путей (цепей) $\mu_1(s_1, t_1), \dots, \mu_p(s_p, t_p)$, попарно не пересекающихся по ребрам?

Будем использовать для задачи 2 стандартное обозначение EDP (edge-disjoint paths). В работе [14] доказано, что задача EDP является NP-полной, если параметр p не фиксирован (является частью входных данных задачи).

Часто наряду с графом $G(V, E)$ рассматривают также граф $H(V, F)$, где $F = \{\{s_1, t_1\}, \dots, \{s_p, t_p\}\}$. Тогда для графа $G \cup H$ с множеством вершин V и множеством ребер $E \cup F$ можно рассмотреть следующую задачу распознавания, которая будет эквивалентна задаче EDP: *существует ли в графе $G \cup H$ множество из $|F|$ не пересекающихся по ребрам циклов, каждый из которых содержит ровно одно ребро из F ?*

Пользуясь свойствами графа $G \cup H$, можно выделить различные подклассы исходной задачи EDP. В частности, нас будет интересовать следующая задача.

Задача 3.

Дано: обычный связный граф $G(V, E)$, в котором выделено p начальных вершин s_1, \dots, s_p и p конечных вершин t_1, \dots, t_p . При этом соответствующий граф $G \cup H$ является эйлеровым.

Вопрос: существуют ли в графе $G(V, E)$ p путей (цепей) $\mu_1(s_1, t_1), \dots, \mu_p(s_p, t_p)$, попарно не пересекающихся по ребрам?

Задачу 3 обозначим через EDPE (E — eulerian). NP-полнота задачи EDPE обосновывается в статье [15].

Теперь сформулируем задачу распознавания покрывающих цепей с заданными концами в обычном графе.

Определение 9. *Покрывающими цепями* в обычном графе $G(V, E)$ называется множество цепей, не пересекающихся по ребрам и не содержащих повторяющихся ребер; при этом множество покрывающих цепей содержит все ребра графа.

Задача 4 (покрывающие цепи с заданными концами в обычном графе).

Дано: обычный связный граф $G(V, E)$, в котором выделено p начальных вершин s_1, \dots, s_p и p конечных вершин t_1, \dots, t_p .

Вопрос: существуют ли в графе $G(V, E)$ p покрывающих цепей $\mu_1(s_1, t_1), \dots, \mu_p(s_p, t_p)$?

Задачу 4 обозначим через СТ (covering trails). По аналогии с задачами EDP и EDPE, рассмотрим следующее сужение СТЕ задачи СТ (задача 5).

Задача 5.

Дано: обычный связный граф $G(V, E)$, в котором выделено p начальных вершин s_1, \dots, s_p и p конечных вершин t_1, \dots, t_p . При этом соответствующий граф $G \cup H$ является эйлеровым.

Вопрос: существуют ли в графе $G(V, E)$ p покрывающих цепей $\mu_1(s_1, t_1), \dots, \mu_p(s_p, t_p)$?

Теорема 1. *Задача СТЕ является NP-полной.*

Доказательство. Очевидно, что СТЕ \in NP, так как для проверки соответствующих цепей требуется $O(|E|)$ шагов. Для этого нужно убедиться, что каждое ребро графа принадлежит ровно одной из цепей $\mu_1(s_1, t_1), \dots, \mu_p(s_p, t_p)$ (это можно сделать, извлекая по очереди ребра цепей и помечая их в исходном графе; в итоге в графе $G(V, E)$ не должно быть непомеченных ребер или ребер, помеченных несколько раз).

Для доказательства СТЕ \in NPC покажем, что задача EDPE \in NPC полиномиально сводится к задаче СТЕ. В качестве функции сведения f возьмем тождественную функцию, которая каждой индивидуальной задаче $I \in$ EDPE сопоставляет индивидуальную задачу $f(I) \in$ СТЕ с тем же графом $G(V, E)$, с тем же значением параметра p и с теми же выделенными начальными и конечными вершинами.

Если в задаче I ответом является «нет», это означает, что не существует p путей от начальных вершин к конечным, не пересекающихся по ребрам. Однако покрывающие цепи с заданными концами — это частный случай таких путей. Следовательно, в задаче $f(I)$ ответом тоже будет «нет».

Пусть теперь в задаче I ответом является «да». Покажем, что «да» будет ответом и в задаче $f(I)$.

Найдем попарно не пересекающиеся по ребрам цепи $\mu_1(s_1, t_1), \dots, \mu_p(s_p, t_p)$. Если $\cup_{i=1}^p \mu_i = G(V, E)$, то эти цепи являются покрывающими, что дает ответ «да» в задаче $f(I)$. В противном случае удаление всех цепей μ_i ($i \in \overline{1, p}$) из графа G приведет к тому, что граф распадется на r компонент связности C_1, \dots, C_r (удаляя цепи, мы удаляем ребра; вершина удаляется только в том случае, если не осталось ни одного инцидентного ей ребра). Для каждой компоненты C_j ($j \in \overline{1, r}$) выполнено:

1. Каждая вершина $v \in C_j$ имеет четную степень. Это обусловлено тем, что граф $G \cup H$ эйлеров (все вершины имеют четную степень), а удаление всех цепей μ_i из графа G эквивалентно удалению циклов из графа $G \cup H$, что соответствует уменьшению степеней всех затронутых вершин в графе $G \cup H$ на четную величину. После удаления в графе H не останется ребер, а значит, степени всех вершин в графах G и $G \cup H$ будут одинаковы. Как следствие, в компоненте C_j существует эйлеров цикл.
2. Компонента C_j имеет хотя бы одну общую вершину с какой-то цепью μ_i , что обусловлено связностью исходного графа G .

Найдем в каждой компоненте C_j ($j \in \overline{1, r}$) эйлеров цикл h_j . Далее найдем в цикле h_j вершину $v \in \mu_i$ и перестроим цепь μ_i , встроив в нее цикл h_j , начиная с вершины v .

В результате выполнения описанной процедуры цепи μ_i ($i \in \overline{1, p}$) будут содержать все ребра графа G , то есть они будут покрывающими для него. Это означает, что в задаче $f(I)$ ответом будет «да».

Следовательно, мы получили полиномиальное сведение NP-полной задачи EDPE к задаче СТЕ, а значит, $\text{СТЕ} \in \text{NPC}$. \square

Следствие 1. *Задача СТ является NP-полной.*

Следствие 2. *Соответствующая оптимизационная задача поиска p покрывающих цепей с заданными концами в обычном графе является NP-трудной.*

3. Доказательство NP-полноты задачи об эйлеровом маршруте в кратном графе

В данном разделе обозначения обычных графов мы будем снабжать индексом ord , чтобы отличать их от кратных графов. Тот же индекс будем использовать и для множеств вершин и ребер обычных графов.

Теорема 2. *Задача MEW является NP-полной.*

Доказательство. Очевидно, что $\text{MEW} \in \text{NP}$, так как для проверки эйлеровости маршрута требуется $O(|E|)$ шагов. Для этого нужно убедиться, что каждое ребро кратного графа входит в маршрут ровно один раз (это можно сделать, извлекая по очереди ребра маршрута и помечая их в исходном графе; в итоге в графе $G(V, E)$ не должно быть непомеченных ребер или ребер, помеченных несколько раз).

Будем выполнять полиномиальное сведение задачи СТЕ к задаче MEW.

Пусть произвольная индивидуальная задача $I \in \text{СТЕ}$ для произвольного p определяется обычным графом $G_{ord}(V_{ord}, E_{ord})$, в котором выделено p начальных вершин s_1, \dots, s_p и p конечных вершин t_1, \dots, t_p . При этом по условию задачи соответствующий граф $G_{ord} \cup H_{ord}$ обязательно является эйлеровым.

В качестве функции полиномиального сведения f будем использовать алгоритм, который по входным данным индивидуальной задачи $I \in \text{СТЕ}$ строит кратный граф $G(V, E)$, представляющий собой входные данные индивидуальной задачи $f(I) \in \text{MEW}$. Шаги алгоритма:

1. Установим $k = 2$ (кратность графа $G(V, E)$).
2. Определим множество вершин $V = V_{ord} \cup \{x_1, \dots, x_{3p}\}$, где вершины x_1, \dots, x_{2p} будут кратными, а все остальные — обычными.
3. Определим множество обычных ребер $E^o = E_{ord}$.
4. Определим множество кратных ребер

$$E^k = \{\{x_2, x_3\}, \{x_4, x_5\}, \dots, \{x_{2p-2}, x_{2p-1}\}, \{x_{2p}, x_1\}\}.$$

5. В множество мультиребер поместим $2p$ мультиребер, полученных по правилу:

$$e_{x_{2i-1}}^m = \{x_{2i-1}, \{x_{2p+i}, s_i\}\}, \quad e_{x_{2i}}^m = \{x_{2i}, \{x_{2p+i}, t_i\}\} \quad (i \in \overline{1, p}).$$

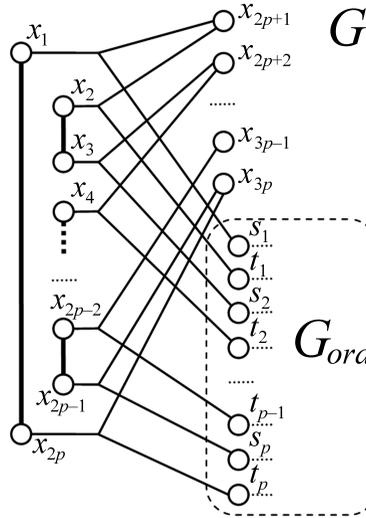


Fig. 8. Multiple graph $G(V, E)$

Рис. 8. Кратный граф $G(V, E)$

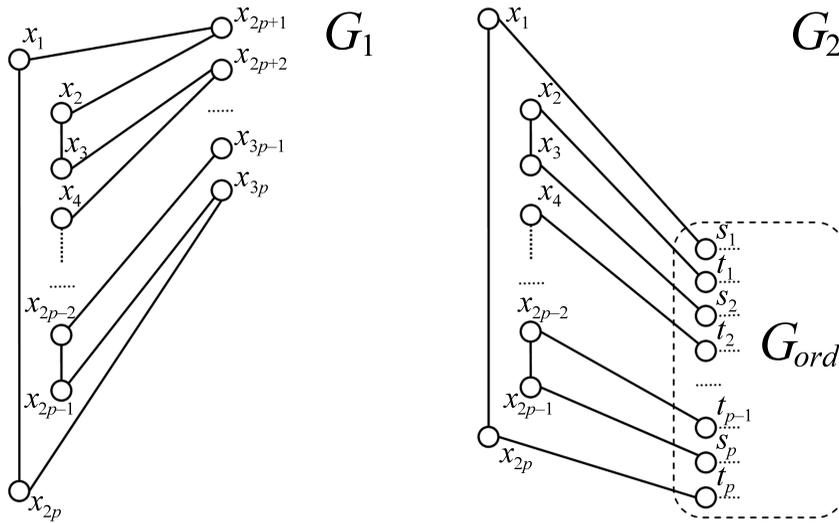


Fig. 9. Partition of the divisible graph $G(V, E)$

Рис. 9. Части делимого графа $G(V, E)$

Полиномиальность описанной процедуры очевидна: все шаги выполняются однократно, каждый шаг при этом содержит $O(p)$ операций добавления вершин или ребер. Полученный в результате кратный граф $G(V, E)$ представлен на рис. 8. Кратные ребра показаны жирными линиями, мультиребра – расщепляющимися линиями. Обычные ребра на рисунке не показаны, так как их расположение зависит от структуры конкретного графа $G_{ord}(V_{ord}, E_{ord})$.

Нетрудно убедиться, что граф G является делимым, его части G_1 и G_2 показаны на рис. 9.

Проанализируем структуру графа $G(V, E)$. Во-первых, заметим, что граф является связным в кратном смысле (каждая часть G_1 и G_2 представляет собой связный обычный граф, при этом между каждой парой кратных вершин существует кратный путь; подробно условия связности кратного графа рассматриваются в [1]).

Во-вторых, оценим степени всех вершин. Степени всех кратных вершин x_i ($i \in \overline{1, 2p}$) представляют собой чётное число, умноженное на кратность графа: $\deg x_i = 4 = k \cdot 2$ (каждое связанное ребро учитывается в значении степени). Степени всех обычных вершин x_i ($i \in \overline{2p+1, 3p}$) чётны: $\deg x_i = 2$. Чётность $\deg v$ для всех $v \in V_{ord}$ следует из того, что граф $G_{ord} \cup H_{ord}$ – эйлеров, а в кратном

графе $G(V, E)$ каждому ребру $\{s_j, t_j\}$ графа H_{ord} соответствует пара связанных ребер, одно из которых инцидентно s_j , а другое инцидентно t_j ($j \in \overline{1, p}$).

Таким образом, для кратного графа $G(V, E)$ выполняется необходимое условие существования эйлерова цикла (см. [7]).

Поскольку часть G_1 кратного графа $G(V, E)$ представляет собой простой цикл, то кратный эйлеров цикл h , если он существует, имеет вид $h = h^1 \cup h^2$, где

$$h^1 = (x_1, x_{2p+1}, x_2, x_3, x_{2p+2}, x_4, \dots, x_{2p-1}, x_{3p}, x_{2p}, x_1),$$

$$h^2 = (x_1, s_1, \mu_1(s_1, t_1), t_1, x_2, x_3, s_2, \mu_2(s_2, t_2), t_2, x_4, \dots, x_{2p-1}, s_p, \mu_p(s_p, t_p), t_p, x_{2p}, x_1),$$

при этом цепи $\mu_1(s_1, t_1), \dots, \mu_p(s_p, t_p)$ должны содержать все обычные ребра из $E^o = E_{ord}$ ровно по одному разу. Это возможно тогда и только тогда, когда данные цепи являются покрывающими цепями с заданными концами в графе $G_{ord}(V_{ord}, E_{ord})$.

Следовательно, задачи I и $f(I)$ дают либо одновременно ответ «да», либо одновременно ответ «нет». Значит, мы построили полиномиальное сведение задачи СТЕ к сужению задачи МЕУ. По теореме 1 задача СТЕ является NP-полной, поэтому NP-полной будет и рассмотренное сужение задачи МЕУ. А отсюда следует, что $MEW \in NPC$. \square

Заметим, что в доказательстве теоремы 2 мы строили кратный граф минимально возможной кратности $k = 2$. Аналогичные рассуждения можно было провести и для любой другой кратности $k > 2$. В этом случае в граф $G(V, E)$ достаточно было бы добавить дополнительные обычные вершины y_3, \dots, y_k , а в каждое мультиребро — $(k-2)$ связанных ребра, соединяющих общую вершину с каждой из y_3, \dots, y_k .

Также заметим, что рассуждения в теореме 2 проведены для ситуации, когда в кратном графе может существовать эйлеров цикл. Если же удалить из множества кратных ребер ребро $\{x_{2p}, x_1\}$, те же самые рассуждения будут соответствовать ситуации возможного существования эйлеровой цепи.

Следствие 3. *Задача МЕУ для делимого кратного графа является NP-полной.*

Справедливость данного утверждения следует из того, что алгоритм из доказательства теоремы 2 всегда будет получать именно делимый кратный граф.

Следствие 4. *Задача поиска эйлерова маршрута (цикла или цепи) является NP-трудной как для произвольного, так и для делимого кратного графа.*

References

- [1] A. V. Smirnov, “The shortest path problem for a multiple graph”, *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 52, no. 7, pp. 625–633, 2018. doi: [10.3103/S0146411618070234](https://doi.org/10.3103/S0146411618070234).
- [2] V. S. Rublev and A. V. Smirnov, “Flows in multiple networks”, *Yaroslavy Pedagogicheskyy Vestnik*, vol. 3, no. 2, pp. 60–68, 2011, in Russian.
- [3] A. V. Smirnov, “The problem of finding the maximum multiple flow in the divisible network and its special cases”, *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 50, no. 7, pp. 527–535, 2016. doi: [10.3103/S0146411616070191](https://doi.org/10.3103/S0146411616070191).
- [4] L. R. Ford and D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*. Princeton University Press, 1962, 216 pp.
- [5] V. S. Rublev and A. V. Smirnov, “The problem of integer-valued balancing of a three-dimensional matrix and algorithms of its solution”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 17, no. 2, pp. 72–98, 2010, in Russian.

- [6] A. V. Smirnov, “Network model for the problem of integer balancing of a four-dimensional matrix”, *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 51, no. 7, pp. 558–566, 2017. DOI: [10.3103/S0146411617070185](https://doi.org/10.3103/S0146411617070185).
- [7] A. V. Smirnov, “The algorithms for the Eulerian cycle and Eulerian trail problems for a multiple graph”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 30, no. 3, pp. 264–282, 2023, in Russian. DOI: [10.18255/1818-1015-2023-3-264-282](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2023-3-264-282).
- [8] C. Hierholzer, “Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren”, *Mathematische Annalen*, vol. 6, no. 1, pp. 30–32, 1873, in German. DOI: [10.1007/BF01442866](https://doi.org/10.1007/BF01442866).
- [9] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*. North-Holland Publishing Company, 1973, 528 pp.
- [10] Z. Lonc and P. Naroski, “On tours that contain all edges of a hypergraph”, *The Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 17, R144, 2010. DOI: [10.37236/416](https://doi.org/10.37236/416).
- [11] A. Marino and A. Silva, “Eulerian walks in temporal graphs”, *Algoritmica*, vol. 85, no. 3, pp. 805–830, 2023. DOI: [10.1007/s00453-022-01021-y](https://doi.org/10.1007/s00453-022-01021-y).
- [12] S. W. Bent and U. Manber, “On non-intersecting Eulerian circuits”, *Discrete Applied Mathematics*, vol. 18, no. 1, pp. 87–94, 1987. DOI: [10.1016/0166-218X\(87\)90045-X](https://doi.org/10.1016/0166-218X(87)90045-X).
- [13] S. Jimbo, “The NP-completeness of Eulerian recurrent length for 4-regular Eulerian graphs”, in *Proceedings of the 2014 4th International Conference on Artificial Intelligence with Applications in Engineering and Technology*, 2014, pp. 155–159. DOI: [10.1109/ICAJET.2014.34](https://doi.org/10.1109/ICAJET.2014.34).
- [14] R. M. Karp, “On the computational complexity of combinatorial problems”, *Networks*, vol. 5, no. 1, pp. 45–68, 1975. DOI: [10.1002/net.1975.5.1.45](https://doi.org/10.1002/net.1975.5.1.45).
- [15] M. Middendorf and F. Pfeiffer, “On the complexity of the disjoint paths problem”, *Combinatorica*, vol. 13, pp. 97–107, 1993. DOI: [10.1007/BF01202792](https://doi.org/10.1007/BF01202792).