MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS, VOL. 31, NO. 3, 2024
journal homepage: www.mais-journal.ru

COMPUTING METHODOLOGIES AND APPLICATIONS

Matrix-qubit Algorithm for Semantic Analysis of Probabilistic Data

I. A. Surov[1]

DOI: 10.18255/1818-1015-2024-3-280-293

[1]ITMO University, Saint-Petersburg, Russia

MSC2020: 68Q09, 15A23
Research article
Full text in Russian

Received July 22, 2024
Revised August 19, 2024
Accepted August 28, 2024

The paper presents a method for semantic data analysis by means of complex-valued matrix decomposition. The method is based on the quantum model of contextual decision-making, according to which observable probabilities are generated by qubit states, representing subjective meaning of the contexts relative to the basis decision. In the simplest three-context case, one of these qubits is decomposed to superposition of the remaining two, mathematically encoding semantic relations between the three contexts. For use in data analysis this model is translated to the matrix form, in which rows and columns correspond to the contexts and instances of experiment. The observable real-valued data then emerge from a complex-valued amplitude matrix, decomposed to a product of a real basis matrix and complex-valued matrix of superposition coefficients. This decomposition reveals stable process-semantic relations between the considered contexts, not captured by other methods of analysis. As a result, the data are approximated with higher precision and fewer parameters than singular and non-negative matrix decompositions, truncated to the same dimension. The model is experimentally approved in descriptive and prognostic regimes. The result opens prospects for development of nature-like computational architectures on novel logical grounds.

Keywords: semantic analysis; behavioral modeling; matrix decomposition; context; quantum probability; quantum logic; qubit

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Surov, Ilya A. (corresponding author) | ORCID iD: 0000-0001-5690-7507. E-mail: ilya.a.surov@itmo.ru
PhD, Senior researcher

Funding: Russian Science Foundation, project No. 23-71-01046.

For citation: I. A. Surov, “Matrix-qubit algorithm for semantic analysis of probabilistic data”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 31, no. 3, pp. 280–293, 2024. DOI: 10.18255/1818-1015-2024-3-280-293.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ, ТОМ 31, № 3, 2024
сайт журнала: www.mais-journal.ru

COMPUTING METHODOLOGIES AND APPLICATIONS

Матрично-кубитный алгоритм семантического анализа вероятностных данных

И. А. Суров[1]

DOI: 10.18255/1818-1015-2024-3-280-293

[1]Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия

УДК 51-77
Научная статья
Полный текст на русском языке

Получена 22 июля 2024 г.
После доработки 19 августа 2024 г.
Принята к публикации 28 августа 2024 г.

В статье представлен метод семантического анализа данных посредством комплекснозначного матричного разложения. Метод основан на квантовой модели контекстно-чувствительных решений, согласно которой наблюдаемые вероятности порождаются кубитными состояниями, представляющими субъективный смысл контекстов для базисного решения. В простейшем трёхконтекстом случае один из кубитов раскладывается в суперпозицию оставшихся двух, математически представляющую смысловые отношения между контекстами. Для использования в задаче анализа данных эта модель представлена в матричной форме так, что строки и столбцы соответствуют контекстам и постановкам эксперимента. При этом наблюдаемые действительные данные порождаются матрицей комплекснозначных амплитуд, раскладываемой на произведение действительной матрицы базисных векторов и комплекснозначной матрицы коэффициентов суперпозиции. Это разложение выявляет устойчивые процессно-смысловые соотношения контекстов, не обнаруживаемые другими методами. В результате данные воспроизводятся более точно и с меньшим числом параметров, чем при использовании сингулярного и неотрицательного матричных разложений той же размерности. Модель успешно испытана в описательном и предсказательном режимах. Результат открывает возможности для разработки природоподобных вычислительных архитектур на новых логических принципах.

Ключевые слова: семантический анализ; поведенческое моделирование; матричное разложение; контекст; квантовая вероятность; квантовая логика; кубит

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Суров, Илья Алексеевич (автор для корреспонденции)	ORCID iD: 0000-0001-5690-7507. E-mail: ilya.a.surov@itmo.ru Канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник

Финансирование: РНФ, проект № 23-71-01046.

Для цитирования: I. A. Surov, “Matrix-qubit algorithm for semantic analysis of probabilistic data”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 31, no. 3, pp. 280–293, 2024. DOI: 10.18255/1818-1015-2024-3-280-293.

Введение

Характерным свойством современных вычислительных систем является большая ресурсоёмкость, для многих практических задач требующая суперкомпьютерных мощностей. В шахматах и го, например, естественное мышление показывает сходные результаты с несравненно меньшим энергопотреблением и объёмом обучающих данных. С другой стороны, современная вычислительная парадигма не позволяет воспроизвести поведение нематоды Caernohabditis elegans, нервная система которого из 302 нейронов полностью картирована 38 лет назад [1]. Эти результаты указывают на принципиальное несовершенство современных имитаций естественного интеллекта, эффективность которого во многих случаях остаётся недостижимой.

Данная трудность мотивирует разработку методов анализа данных на новых логических принципах, более соответствующих работе естественного мышления. В качестве таковых рассматриваются законы оптическо-голографических и квантово-физических процессов, позволяющих использовать новые форматы кодирования и алгоритмы обработки информации [2—4]. В отличие от квантовых вычислений [5], этот подход не всегда требует использования новых типов материальных носителей. Такие системы не ведут к ускорению, характерному для квантовых компьютеров, однако позволяют добиваться прогресса в когнитивно-поведенческом моделировании благодаря лучшему соответствию с принципами естественного мышления [4, 6].

Это преимущество новых вычислительных принципов обусловлено переходом от Булевской «логики множеств» к «логике (когнитивных) волн», представляющих смысловое содержание нейронных возбуждений в естественном мышлении [7]. При этом информация кодируется не только амплитудными, но и фазовыми параметрами квантово-волновых состояний, что соответствует переходу от действительных к комплексным числам. Благодаря фазовым степеням свободы линейное наложение комплекснозначных амплитуд позволяет моделировать нелинейные («интерференционные») закономерности поведенческих данных, выходящие за рамки классической рациональности и теории вероятности Колмогорова [6, 7]. Как и в квантовой физике, такое моделирование поведенческих данных идёт посредством недоступных для прямого наблюдения квантово-волновых объектов, представляющих когнитивно-психические состояния рассматриваемой системы.

Эти преимущества волнового и квантово-подобного подходов указывают на целесообразность их сопряжения с матричной алгеброй современных нейросетевых архитектур. Для этого наиболее удобна матричная формулировка квантовой теории, согласно которой квантовые состояния и наблюдаемые представляются векторами и операторами в многомерном пространстве [8]. В отличие от обычной линейной алгебры нейросетевых тензоров, эти вектора и операторы являются комплекснозначными как того требует волновая природа нейронных возбуждений. При этом фазовые параметры необходимы для «внутренних» вычислений, тогда как последующий переход к действительным наблюдаемым осуществляется путём взятия квадратного модуля от итоговых комплекснозначных величин. Эта операция, известная в квантовой физике как правило Борна и ключевая для отмеченной линеаризации, отличает данный подход от чисто комплекснозначных нейронных сетей [9] и матричных разложений [10], ограниченных работой с комплекснозначными либо двумерно-векторными данными.

Примером сопряжения квантовой логики и матричной алгебры является квантово-подобная модификация сингулярного матричного разложения [11], являющегося прообразом тензорной алгебры современных нейросетей. Как показано в этой работе, структура матриц сингулярного разложения позволяет соотнести их с элементами квантово-подобных поведенческих моделей. Последующее обобщение этих матриц с действительных на комплексные числа повышает точность воспроизведения данных за счёт более эффективного использования того же числа свободных параметров модели (там же). Это свойство, отмеченное ранее для квантово-подобного моделирования семантики естественного языка [12], подтвердило эффективность квантово-волновой алгебры для имитации мышления человека. Ещё раз подчеркнём, что данный подход реализуется средствами классических компьютеров и не имеет прямого отношения к построению квантовых вычислительных систем, хотя сопряжение этих направлений также представляет интерес.

Недостатком работы [11] является отсутствие интерпретации элементов полученного разложения, аналогичной, например, интерпретации элементов неотрицательного разложения [13]. Возможность такой интерпретации, однако, следует из работ [14, 15] где показано, что простейшее квантовое состояние — кубит — можно использовать для математической формализации субъективно-эмоционального смысла. При этом декартовы оси пространства кубитных состояний соответствуют семантическим факторам Ч. Осгуда оценка — сила — активность, тогда как угловые сектора соответствуют главным эмоциональными состояниям. Поскольку в мышлении человека последние выполняют роль естественных смысловых категорий (там же), это соответствие открывает возможности разработки природоподобных вычислительных методов.

По этой причине в данной статье (в отличие от работы [11]) искомое сопряжение матричной алгебры и квантово-подобного моделирования строится со стороны последнего. Используемая для этого интерпретируемая модель вероятностных поведенческих данных представлена в разделе 1. В разделе 2 эта модель приводится к матричной форме, аналогичной неотрицательному разложению. Результаты описательного и прогнозного моделирования представлены в последующих разделах 3 и 4.

1. Кубитная модель контекстно-чувствительных решений

Объектом исходной поведенческой модели являются вероятности осуществления целевого события X в трёх связанных между собой ситуациях — контекстах A, B и C. Классическим примером такой ситуации является так называемая двухэтапная игра, в которой событием X является участие в следующем коне игры в орлянку в ситуациях, когда предыдущий кон выигран (A), проигран (B), или исход этого кона неизвестен (C) [16]. Полученные в ряде экспериментов вероятности этих решений $0 \leqslant p^a, p^b, p^c \leqslant 1$ систематически отклоняются от ожиданий классической рациональности, что позволяет использовать их для испытания методов анализа данных на новых логико-математических принципах [7].

Согласно модели [17, 18], принимая целевое решение X субъект порождает направленное на него двумерное комплекснозначное векторное (гильбертово) пространство, используемое для кодирования эмоционально-смысловых состояний принимающего решение лица. Контексты A, B и C представляются в этом пространстве тройкой векторов, в квантовых обозначениях записываемых как

$$
\begin{aligned}
|\Psi_a\rangle &= \begin{bmatrix} a_0 \\ e^{i\alpha} a_1 \end{bmatrix} = a_0|0\rangle + e^{i\alpha} a_1|1\rangle, \\
|\Psi_b\rangle &= \begin{bmatrix} b_0 \\ e^{i\beta} b_1 \end{bmatrix} = b_0|0\rangle + e^{i\beta} b_1|1\rangle, \\
|\Psi_c\rangle &= \begin{bmatrix} e^{i\gamma_0} c_0 \\ e^{i\gamma_1} c_1 \end{bmatrix} = e^{i\gamma_0} c_0|0\rangle + e^{i\gamma_1} c_1|1\rangle, \quad \gamma_1 - \gamma_0 = \gamma.
\end{aligned} \tag{1}
$$

При этом $0 \leqslant a_k, b_k, c_k \leqslant 1$ есть действительные амплитуды, а $0 \leqslant \alpha, \beta, \gamma_k < 2\pi$ — фазовые параметры каждого из векторов (1), известных в квантовой информатике как кубитные состояния [8][1]. Этим термином обусловлено название «кубитная модель», используемое далее для обозначения модели, представленной в этом разделе.

[1]Специфическая квантовая нотация векторов (1), без потери смысла заменяющаяся на обычные векторные обозначения, использована для соответствия с работами [15, 17, 18]. В последующих разделах статьи эти обозначения практически не используются.

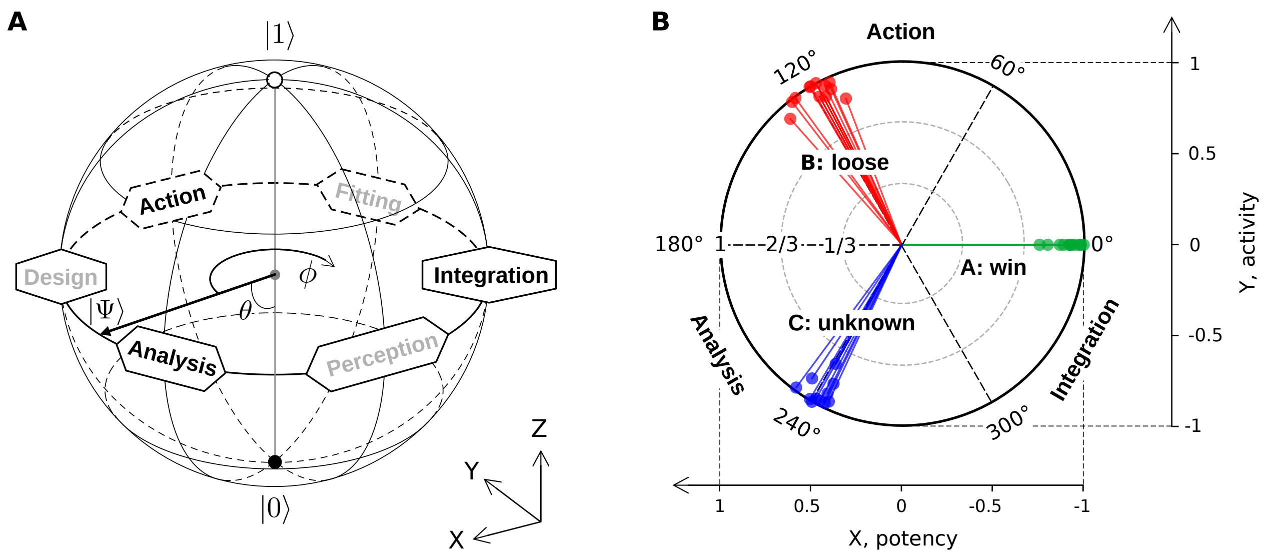

Fig. 1. A: Qubit state space in the Bloch sphere representation. Polar angle θ and azimuthal angle ϕ (α, β, γ) encode favorability and process function of the context in relation to the basis 1/0 decision in subject's cognition. B: 12 triples of states (1) in qubit model of two-stage gamble. Green, red and blue correspond to the contexts A, B and C, respectively.

Рис. 1. A: Пространство кубитных состояний в представлении сферы Блоха. Полярный угол θ и азимутальный угол ϕ (α, β, γ) кодируют благоприятность и процессную функцию контекста относительно базисного решения 1/0 в психике субъекта. B: 12 троек состояний (1) кубитной модели двухэтапной игры. Зелёным, красным и синим показаны контексты A, B и C.

Базисные состояния $|1\rangle$ и $|0\rangle$ соответствуют принятию и не-принятию целевого решения X, а комплекснозначные амплитуды перед ними определяют вероятности осуществления соответствующих альтернатив посредством операции квадратного модуля (правило Борна):

$$\begin{aligned} p^a &= |e^{i\alpha_1} a_1|^2 = a_1^2, & 1 - p^a &= a_0^2, \\ p^b &= |e^{i\beta_1} b_1|^2 = b_1^2, & 1 - p^b &= b_0^2, \\ p^c &= |e^{i\gamma_1} c_1|^2 = c_1^2, & 1 - p^c &= |e^{i\gamma_0} c_0|^2 = c_0^2, \end{aligned} \tag{2}$$

что определяет нормировку векторов (1).

Нормировка (2) позволяет представить двумерные комплекснозначные вектора (1) трёхмерными векторами на единичной сфере в действительном трёхмерном пространстве. При этом $\theta_{a,b,c} = 2\arcsin(a_1, b_1, c_1)$ являются полярными углами, а фазы α, β и $\gamma = \gamma_1 - \gamma_0$ являются азимутальным углами. Согласно модели [14, 18], полярные углы кодирует субъективную благоприятность контекста для базисного решения «1», определяющую вероятности (2). Азимутальные углы α, β, γ кодируют функцию контекста в жизненном цикле деятельности по осуществлению базисного решения X. Этот цикл состоит их последовательности этапов «восприятие», «анализ», «проектирование», «действие», «согласование» и «внедрение» (там же) как показано на рисунке 1A.

В рассматриваемой модели вектор $|\Psi_c\rangle$ «неопределённого» контекста C задаётся суперпозицией оставшихся векторов (1) как

$$|\Psi_c\rangle = N\left(|\Psi_a\rangle + e^{ix}|\Psi_b\rangle\right), \tag{3}$$

где $0 \leqslant x < 2\pi$ есть суперпозиционная фаза, а $N > 0$ — нормировочный множитель[2].

[2]Необходимость фазы γ_0 у нулевой компоненты вектора $|\Psi_c\rangle$, без потери общности положенной нулём в кубитах $|\Psi_a\rangle$ и $|\Psi_b\rangle$, следует из первой строки этого уравнения.

При фиксированном N система уравнений (1), (2), (3) решается в аналитическом виде и позволяет найти тройку векторов (1), представляющих контексты A, B и C в психике лица, принимающего решение X [17]. При этом вероятностные значения чувствительны лишь к относительным углам между векторами (1) на сфере Блоха, в силу чего фазу одного из них можно задать произвольно.

Этот выбор делается на основе процессной функции моделируемых контекстов. Для двухэтапной игры, например, «неопределённый» контекст C соответствует результату первого этапа жизненного цикла «восприятие», на котором из фона вниманием выделяется некоторый объект. Далее следует анализ и объяснение этого объекта в некотором языке, а затем — постановка целей в этом отношении и разработка планов по их осуществлению («проектирование», «design») с учётом состояния среды. Проигрыш предыдущего кона в контексте B соответствует неблагоприятному обстоятельству, преодоление которого происходит на следующих этапах «действие» и «согласование». Их результатом является контекст A — выигрыш. Фаза α соответствующего ему вектора $|\Psi_a\rangle$ фиксировалась на значении 0°. Процессный цикл завершается внедрением («integration») полученного результата в жизнь, например, путём использования выигранной суммы.

С этим условием модель с нормировкой $N = 1$ построена для $n = 12$ постановок двухэтапной игры, результаты которых приведены в таблице 1. Полученные 12 троек кубитных состояний (1) показаны на рисунке 1Б в проекции на экваториальную плоскость сферы Блоха. Согласно положенному значению $\alpha = 0^\circ$ вектора $|\Psi_a\rangle$ контекста A расположены на границе этапов «согласование» и «внедрение». В соответствии с вышеописанным ожиданием состояния $|\Psi_b\rangle$ и $|\Psi_c\rangle$ лежат на границах этапов «проектирование» — «действие» и «восприятие» — «анализ» соответственно. Фазы этих состояний β и γ, а также интерференционная фаза x (3), полученные решением уравнений (1)-(3), лежат в диапазонах

$$x = 111.3 \pm 8.8^\circ, \qquad \beta = 119.5 \pm 5.8^\circ, \qquad \gamma = 241.1 \pm 3.3^\circ. \tag{4}$$

Эта группировка характеризует устойчивость субъективных смысловых соотношений между контекстами принятия базисного решения в анализируемой выборке данных [17].

2. Матричная форма

Для n экспериментов компоненты $|0\rangle$ и $|1\rangle$ векторов (1) характеризуется матрицами комплекснозначных амплитуд размером $3 \times n$, строки которых соответствуют контекстам A, B и C:

$$\mathbf{Q_1} = \begin{bmatrix} a_{11}e^{i\alpha_1} & a_{12}e^{i\alpha_2} & \dots & a_{1n}e^{i\alpha_n} \\ b_{11}e^{i\beta_1} & b_{12}e^{i\beta_2} & \dots & b_{1n}e^{i\beta_n} \\ c_{11}e^{i\gamma_{11}} & c_{12}e^{i\gamma_{12}} & \dots & c_{1n}e^{i\gamma_{1n}} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Q_0} = \begin{bmatrix} a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ b_{01} & b_{12} & \dots & b_{0n} \\ c_{01}e^{i\gamma_{01}} & c_{02}e^{i\gamma_{02}} & \dots & c_{0n}e^{i\gamma_{0n}} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где второй индекс у амплитуд a_k, b_k, c_k и фаз γ_k есть номер эксперимента. Согласно уравнениям (2) первая из этих матриц связана с матрицей исходных данных операцией поэлементного квадратного модуля:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^a \\ \mathbf{p}_1^b \\ \mathbf{p}_1^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1^a & p_2^a & \dots & p_n^a \\ p_1^b & p_2^b & \dots & p_n^b \\ p_1^c & p_2^c & \dots & p_n^c \end{bmatrix} = |\mathbf{Q_1}|^2, \qquad \mathbf{P}_0 = 1 - \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0^a \\ \mathbf{p}_0^b \\ \mathbf{p}_0^c \end{bmatrix} = |\mathbf{Q_0}|^2. \tag{6}$$

Table 1. Results of 12 experiments «two-stage gamble» [7]

Таблица 1. Результаты 12 экспериментов «двухэтапная игра» [7]

p^a	0.69	0.75	0.69	0.60	0.83	0.80	0.68	0.64	0.53	0.73	0.59	0.30
p^b	0.57	0.69	0.59	0.47	0.70	0.37	0.32	0.47	0.38	0.49	0.71	0.24
p^c	0.38	0.73	0.35	0.47	0.62	0.43	0.38	0.38	0.24	0.60	0.70	0.17

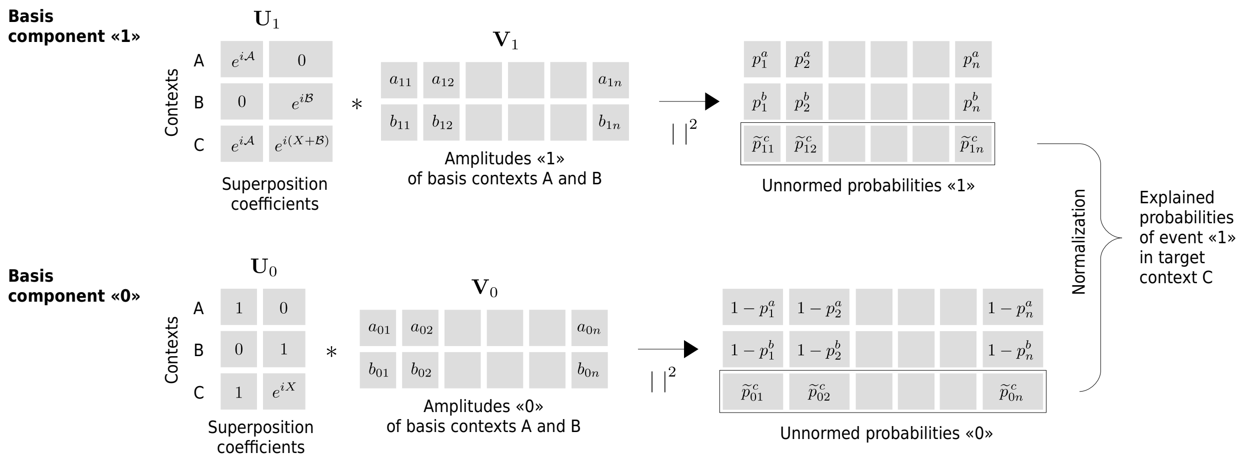

Fig. 2. Schematic of the matrix-qubit model **Рис. 2.** Общая схема матрично-кубитной модели

2.1. Матричное разложение

Соотношение (3) выражает последние строки матриц (5) через суперпозицию пар их первых строк с коэффициентами e^{ix_k} и 1 соответственно. В матричной записи это соотношение принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Q_1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}e^{i\alpha_1} & a_{12}e^{i\alpha_2} & \dots & a_{1n}e^{i\alpha_n} \\ b_{11}e^{i(\beta_1+x_1)} & b_{12}e^{i(\beta_2+x_2)} & \dots & b_{1n}e^{i(\beta_n+x_n)} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Q_0} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ b_{01}e^{ix_1} & b_{02}e^{ix_2} & \dots & b_{0n}e^{ix_n} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7}$$

Кучность значений x_k и β_k в рассматриваемой выборке (4) позволяет заменить их на общие значения X и $\mathcal{B}$. Обозначая произвольные $\alpha_k = \text{const}$ буквой $\mathcal{A}$, соответствующие фазовые множители могут быть перенесены из вторых матриц уравнений (7) в первые как показано на рисунке 2:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{Q}}_\mathbf{1} &= \begin{bmatrix} e^{i\mathcal{A}} & 0 \\ 0 & e^{i\mathcal{B}} \\ e^{i\mathcal{A}} & e^{i(X+\mathcal{B})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \end{bmatrix} = \mathbf{U}_1\mathbf{V}_1 \approx \mathbf{Q_1}, \\ \widetilde{\mathbf{Q}}_\mathbf{0} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & e^{iX} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ b_{01} & b_{02} & \dots & b_{0n} \end{bmatrix} = \mathbf{U}_0\mathbf{V}_0 \approx \mathbf{Q_0}, \end{aligned} \tag{8}$$

где элементы действительных матриц $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_0$ определяются из данных таблицы 1 посредством первых двух строк (2). Таким образом параметрами матричной кубитной модели являются общие фазы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и X, первая из которых фиксируется из тех же соображений, что и при моделировании отдельных экспериментов. В исходной кубитной модели, напротив, пара свободных фаз находится для каждого из n этих экспериментов отдельно. Таким образом для данных по двухэтапной игре матричная форма сокращает количество параметров модели в $n = 12$ раз.

2.2. Нахождение параметров

Из-за такого сокращения числа параметров, разложение (8) точно воспроизводит амплитуды (5) только в «базисных» контекстах A и B. Амплитуды компонент $|0\rangle$ и $|1\rangle$ контексте C, напротив, воспроизводятся лишь приближённо в силу нестрогости последних равенств в уравнениях (8).

Мерами соответствующих отклонения могут служить квадратичные нормы

$$L_1(X,\mathcal{A},\mathcal{B}) = \frac{\|\mathbf{p}_1^c - \widetilde{\mathbf{p}}_1^c\|}{\|\mathbf{p}_1^c\|}, \qquad \widetilde{\mathbf{p}}_1^c = \left|\begin{bmatrix} e^{i\mathcal{A}} & e^{i(X+\mathcal{B})}\end{bmatrix} \mathbf{V}_1\right| \tag{9a}$$

$$L_0(X) = \frac{\|\mathbf{p}_0^c - \widetilde{\mathbf{p}}_0^c\|}{\|\mathbf{p}_0^c\|}, \qquad \widetilde{\mathbf{p}}_0^c = \left|\begin{bmatrix} 1 & e^{iX}\end{bmatrix} \mathbf{V}_0\right|, \tag{9b}$$

которые могут использовалась в качестве функций ошибки для нахождения фаз X и $\mathcal{B}$ методами многомерной оптимизации. При этом величина X может быть найдена напрямую из (9b), после чего $\mathcal{B}$ находится из (9a) с учётом заданного вручную $\mathcal{A}$ как отмечено выше.

Полученные таким образом строки $\widetilde{\mathbf{p}}_1^c$ и $\widetilde{\mathbf{p}}_0^c$ дают в сумме единицу лишь в среднем. Строгая нормировка (2) для каждого эксперимента достигается поэлементным делением каждой из этих строк на их сумму:

$$\mathbf{p}_1^c[\mathrm{mod}] = \frac{\widetilde{\mathbf{p}}_1^c}{\widetilde{\mathbf{p}}_0^c + \widetilde{\mathbf{p}}_1^c}, \qquad \mathbf{p}_0^c[\mathrm{mod}] = \frac{\widetilde{\mathbf{p}}_0^c}{\widetilde{\mathbf{p}}_0^c + \widetilde{\mathbf{p}}_1^c}. \tag{10}$$

Эти вектора являются моделью третьих строк матриц (6) на основе первых двух её строк. Общая точность модели характеризуется нормой

$$L = \frac{\|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_1[\mathrm{mod}]\|}{\|\mathbf{P}_1\|}. \tag{11}$$

3. Испытания в описательном режиме

Представленная модель построена для данных в таблице 1 для трёх вариантов выбора пары базисных контекстов: AB, BC и CA. В первом случае общая для всех экспериментов фаза $\mathcal{A}$ контекста A задаётся равной 0, общая фаза $\mathcal{B}$ контекста B определяется в ходе оптимизации как описано в разделе 2.2, тогда как фазы γ контекста C (1) определяются аргументом комплекснозначных амплитуд в третьих строках матриц $\widetilde{\mathbf{Q}}_0$ и $\widetilde{\mathbf{Q}}_1$ (8). В частности, для первого варианта базисной пары (AB) получено значение $\mathcal{B} = 120.6^\circ$, тогда как среднее значение и среднеквадратическое отклонение фаз γ есть $\mathcal{C} = 240.5 \pm 3.3^\circ$.

Для других вариантов базисных пар обозначения фаз сохраняются. В частности, при базисе BC фаза $\mathcal{B}$ контекста B фиксируется на значении $\mathcal{B} = 120^\circ$ согласно схеме на графике 1B. Общая фаза $\mathcal{C}$ находится посредством оптимизации, тогда как диапазон фаз $\mathcal{A}$ целевого контекста A вычисляется из полученных матриц $\widetilde{\mathbf{Q}}_0$ и $\widetilde{\mathbf{Q}}_1$. Для каждого из вариантов базиса полученные значения фаз контекстов и интерференционных фаз X приведены в столбцах таблицы 2.

Точность полученных моделей приведена в последних строках таблицы. В предпоследней строке указана ошибка воспроизведения целевого контекста (9a), вычисленная после итоговой нормировки (10). В последней строке приведена относительная норма отклонения полной матрицы (11).

Table 2. Parameters and precision of descriptive modeling

Таблица 2. Параметры и точность описательного моделирования

Базисная пара Целевой контекст	AB C	BC A	CA B
X	111.9°	132.5°	118.1°
$\mathcal{A}$	0°	358.3 ± 2.9°	357.7°
$\mathcal{B}$	120.6°	120°	118.7 ± 5.6°
$\mathcal{C}$	240.5 ± 3.3°	236.7°	240°
Ошибка L_1 (9a)	0.21	0.17	0.18
Общая ошибка (11)	0.10	0.12	0.10

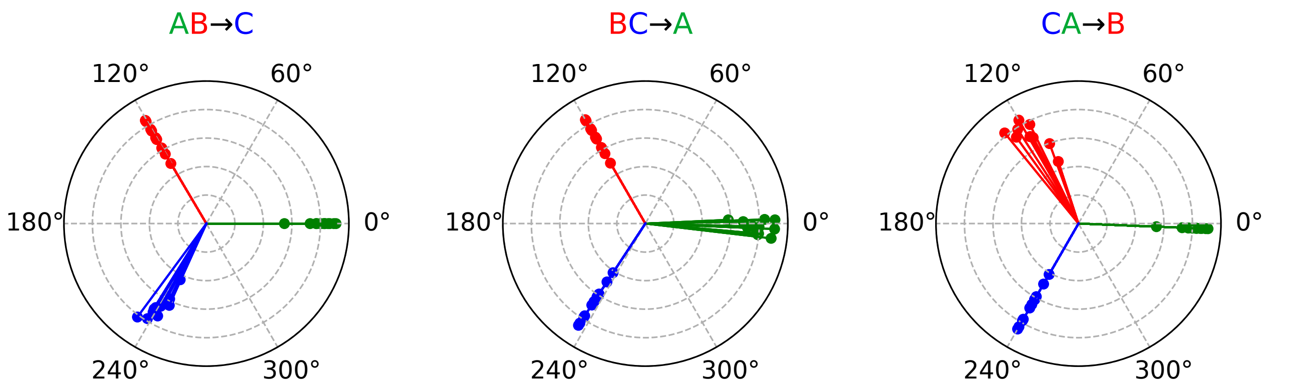

Fig. 3. Qubit states (1) in matrix model, projected onto equatorial plane as in Figure 1. Graphics correspond to three choices for the pair of basis contexts, indicated on top.

Рис. 3. Кубитные состояния (1) матричной модели в проекции на экваториальную плоскость сферы Блоха аналогично рисунку 1. Графики соответствуют трём вариантам базисной пары контекстов, указанной сверху.

Эти величины целесообразно сравнить с аналогичными ошибками моделирования тех же данных с помощью сингулярного (SVD) и неотрицательного (NMF) разложений [19], усечённых до размерности 2. Для обоих разложений функция (11) составила 0.255, что превышает ошибки в последней строке таблицы 2 более чем вдвое. Достигнутое преимущество тем более существенно, что представленная матричная модель имеет всего два свободных параметра (X и одна из фаз $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$). Для сравнения, у сингулярного разложения таких параметров 26, а у неотрицательного — 30.

Каждая из трёх построенных моделей определяет матрицы комплекснозначных амплитуд $\widetilde{\mathbf{Q}}_0$ и $\widetilde{\mathbf{Q}}_1$ (8), порождающие наблюдаемые вероятности согласно формулам (6). После нормировки (10) матрица $\widetilde{\mathbf{Q}}_0$ теряет информативность, тогда как $\widetilde{\mathbf{Q}}_1$ полностью характеризует построенную модель для каждого из целевых экспериментов. Как и в исходной кубитной модели (раздел 1), каждому из экспериментов в таблице 1 соответствует тройка векторов (1), соответствующих контекстам A, B и C. 12 таких троек для каждой из трёх моделей показаны на рисунке 3

Функциональное расположение контекстов в азимутальной плоскости сферы Блоха совпадает с представленным на графике 1B для всех вариантов базиса. В отличие от индивидуальных моделей, фаза не только первого, но и второго из базисных контекстов для всех экспериментов одинакова и определяется результатом оптимизации. Ненулевой разброс имеют только фазы целевого контекста (таблица 2).

4. Прогнозный режим

Представленная модель может быть использована для прогнозирования вероятности целевого решения в некоторых из рассматриваемых контекстов моделируемого набора на основе вероятностей того же решения в оставшихся контекстах. Метод такого прогноза и результаты его апробации на данных двухэтапной игры представлены в разделах 4.1 и 4.2.

4.1. Метод

Метод прогнозирования строится на основе описательной модели, показанной на рисунке 2. В левой части этой схемы отдельным экспериментам соответствуют столбцы матриц $\mathbf{V}_0$ и $\mathbf{V}_1$, тогда как матрицы $\mathbf{U}_0$ и $\mathbf{U}_1$ кодируют общую алгоритмику поведенческой системы, породившей моделируемые данные. Знание этих матриц $\mathbf{U}$, найденных из n «обучающих» экспериментов как описано в разделе 2, и делает возможным использование модели для прогнозирования части вероятностей рассматриваемого решения в новом эксперименте $n+1$. Уточнение «части» здесь означает, что про-

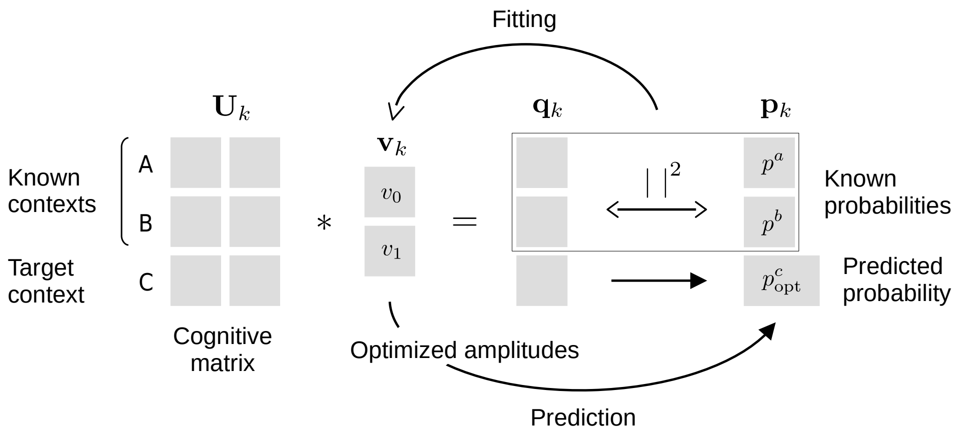

Fig. 4. Prognosis of the basis decision probability in the target context C based on the known contexts A, B and matrices of behavioral algorithmics $\mathbf{U}$ (12)–(13)

Рис. 4. Схема прогнозирования вероятности базисного решения в целевом контексте C на основе известных контекстов A, B и матриц поведенческой алгоритмики $\mathbf{U}$ (12)–(13)

гнозируются вероятности не во всех трёх контекстах A, B и C, а только в одном — целевом — из них; вероятности в остальных двух «известных» контекстах необходимо знать.

Для такого предсказания к матрицам $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_0$ необходимо добавить столбцы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_0$, соответствующие новому эксперименту $n+1$. Согласно схеме 2 и уравнениям (8) перемножение этих столбцов с матрицами $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_0$ добавит к амплитудным матрицам $\widetilde{\mathbf{Q}}_1$ и $\widetilde{\mathbf{Q}}_0$ новые столбцы $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_0$. Квадраты модулей этих амплитуд порождают столбцы прогнозных вероятностей согласно выражениям (6):

$$\mathbf{p}_k^{\rm est} = |\mathbf{U}_k \mathbf{v}_k|^2, \qquad k = 0, 1. \tag{12}$$

В известной паре контекстов эти вероятности должны максимально точно воспроизводить данные значения, что и является критерием для нахождения оптимальных амплитудных столбцов $\mathbf{v}_k$. При этом используются функции ошибок

$$L_k^{\rm fit}(\mathbf{v}_k) = \frac{\|\mathbf{p}_k^{\rm est}[{\rm iz}] - \mathbf{p}_k[{\rm iz}]\|}{\|\mathbf{p}_k[{\rm iz}]\|}, \qquad k = 0, 1, \tag{13}$$

где аргумент [iz] выбирает из векторов строки, соответствующие известным контекстам.

Согласно выражению (12), найденные таким образом амплитуды $\mathbf{v}_k^{\rm opt}$ определяют вероятности $\mathbf{p}_k^{\rm opt}$ базисного решения во всех контекстах, включая целевой [neiz] как показано на схеме 4. Финальные прогнозные значения получаются из этих вероятностей с помощью нормировки, аналогичной (10):

$$p_k^{\rm prog} = \frac{\mathbf{p}_k^{\rm opt}[{\rm neiz}]}{\mathbf{p}_0^{\rm opt}[{\rm neiz}] + \mathbf{p}_1^{\rm opt}[{\rm neiz}]}, \qquad k = 0, 1. \tag{14}$$

Итак, решённая прогнозная задача (12)—(14) состоит в предсказании вероятности базисного решения в одном из рассматриваемых контекстов на основе вероятностей того же решения в остальных контекстах. Для этого необходимо знать матрицы $\mathbf{U}_0$ и $\mathbf{U}_1$, полученные в результате описательного моделирования.

4.2. Испытания

Описанный метод испытан на данных, приведённых в таблице 1. Для каждого из 12 экспериментов прогноз выполнялся для всех трёх вариантов целевого контекста. Необходимые при этом

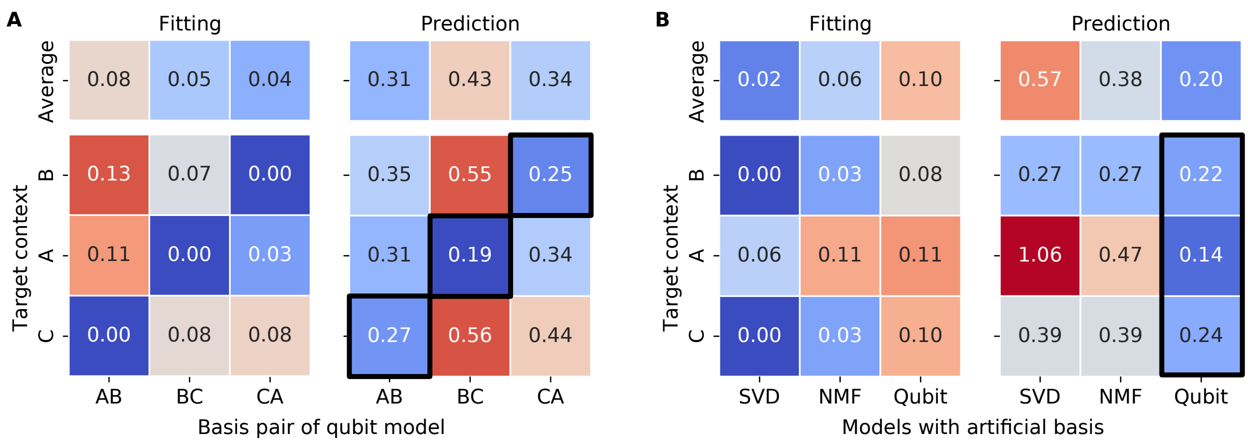

Fig. 5. A: testing of prognostic model for all combinations of the basis context pair and the target context. Fitting: relative standard error (13) of approximation of data in the known contexts. Prediction: prognostic error (15). B: the same values for the prognosis based on singiular value decomposition (SVD), nonnegative matrix factorization (NMF), and on the qubit model with artificial basis. Top row shows average of all columns. Black frame indicates best models with fixed and artificial basis.

Рис. 5. A: результаты прогнозного испытания модели для всех комбинаций базисной пары контекстов и целевого контекста. Аппроксимация: относительная среднеквадратическая ошибка (13) описания известных контекстов. Прогноз: ошибка прогнозирования (15). B: те же величины для прогноза на основе сингулярного (SVD) и неотрицательного (NMF) матричных разложений, а также на основе кубитной модели с искусственным базисом. Среднее по каждому из столбцов показано в верхнем ряду.

матрицы $\mathbf{U}_0$ и $\mathbf{U}_1$ определялись в ходе описательного моделирования 11 оставшихся «обучающих» экспериментов. Как отмечено в разделе 3, эти матрицы могут быть получены на основе любой из трёх пар базисных контекстов: AB, BC и CA (рисунок 3). В итоге, для каждой из 9 комбинаций «целевой контекст x — базисная пара yz» выражение (14) прогнозирует строку вероятностей $\mathbf{p}^x_{yz}[\text{prog}]$ для всех 12 экспериментов таблицы 1. Относительная ошибка прогноза измерялась нормированным среднеквадратическим отклонением

$$\text{STD}^{\text{prog}}(x, yz) = \left\| \frac{\mathbf{p}^x_{yz}[\text{prog}] - \mathbf{p}^x}{\mathbf{p}^x} \right\| / \sqrt{n}, \qquad x, y, z \in A, B, C. \tag{15}$$

Эти значения показаны на правом графике рисунка 5A. Приведённые в верхней строке средние (average) соответствуют относительной ошибке прогноза (prediction) целевой вероятности 36 %. Для каждого целевого контекста (target context), однако, существует кубитная модель, дающая существенно более высокую точность (0.27, 0.19, 0.25). Эти значения на диагонали матрицы (чёрная рамка) соответствует выбору базисной пары контекстов (basis pair), дополняющей целевой контекст до тройки ABC. В этих случаях настроенная в обучающем описательном режиме функция матриц $\mathbf{U}_0$ и $\mathbf{U}_1$ совпадает с требуемой для прогноза. При этом, в отличие от остальных комбинаций (x, yz), ошибки описания известных контекстов (fitting) (13) равны нулю как показано на левом графике.

5. Сравнение с методами на искусственном базисе

Аналогичный прогноз был выполнен на основе сингулярного и неотрицательного разложений. Эти разложения представляют матрицу данных $\mathbf{P}_1$ (6) в виде произведения трёх и двух матриц соответственно. В отличие от кубитной модели, эти методы работают не с амплитудами, а непосредственно с действительнозначными данными. Тем не менее, метод прогнозного моделирования (раздел 4.1) применим к этим описательным моделям.

Для неотрицательного разложения (NMF) первая и вторая матрицы соответствует матрицам **U** и **V** на схеме 2. Соответствующий новому эксперименту дополнительный столбец второй матрицы подбирается по условию наиболее точного воспроизведения данных в известных контекстах аналогично схеме на рисунке 4, однако без квадратного модуля (12). Для сингулярного разложения (SVD) процедура отличается тем, что в качестве второй базисной матрицы берётся произведение второй (сингулярной) и третьей матриц разложения.

В отличие от кубитной модели, базисные матрицы в разложениях NMF и SVD берутся не из данных напрямую, а конструируются искусственно. Соответственно, выбор пары базисных контекстов (таблица 2, горизонтальная ось на рисунке 5A) не требуется, а разложение данной матрицы моделируемых величин является единственным. При этом аналогичные **U** на схеме 2 первые матрицы разложений становятся более информативными и также конструируются для наиболее точного воспроизведения данных. При двух базисных компонентах, относительная норма ошибки описания данных в таблице 1 для обоих методов составила 0.255 (раздел 3). Аналогичная модификация кубитной модели представлена в Приложении.

Точность прогнозных моделей на основе SVD и NMF, а также кубитной модели с искусственным базисом представлена на рисунке 5B. Наихудший прогноз со средней относительной ошибкой 0.57 (15) получен с помощью модели на основе SVD. Прогноз на основе NMF даёт среднюю ошибку 0.38, близкую к средним ошибкам кубитных моделей на рисунке 5A, однако уступает кубитным моделям с наилучшим фиксированным базисом для каждого контекста.

Кубитная модель с искусственным базисом (qubit) позволяет добиться ещё большего преимущества, уменьшая ошибку для каждого из конекстов на 3–5 % (чёрная рамка). Ценой этого преимущества является утрата интерпретируемости матриц (рисунок 2), (16). Строки матриц **V** более не соответствуют исходным контекстам задачи, тогда как получаемые кубитные тройки не несут очевидных фазовых закономерностей, показанных на рисунке 3.

Заключение

Наибольшую ценность для разработки новых вычислительных систем представляет семантика и число параметров представленной модели. В отличие от весов связей в современных нейросетях, параметры полученного разложения (в частности, фазы элементов матриц **U** (8)) интерпретируются в процессно-смысловых категориях естественного мышления (экватор сферы на рисунке 1A); эти категории, в свою очередь, связаны с причинно-следственной логикой и субъективно-эмоциональными состояниями поведенческих систем [15, 20]. На этой основе представленная модель в автоматическом режиме выявила процессно-смысловые отношения между поведенческими контекстами, принципиально отличающиеся от корреляционных закономерностей синтаксического уровня. Подтверждение этого свойства в дальнейших испытаниях будет означать существенный прогресс в разработке природоподобных методов семантического анализа данных.

Число параметров представленной модели с фиксированным базисом не зависит от числа столбцов-постановок $n = 12$ и определяется лишь числом строк-контекстов $k = 3$ матрицы исходных данных. При двух базисных контекстах модель имеет всего $k - 1$ параметр: фаза одного из базисных контекстов и $k - 2$ значений фаз X для каждого из не-базисных контекстов. Для сравнения, усечённое до размерности 2 неотрицательное разложение матрицы размером $k \times n$ зависит от $2(k+n) = 30$ параметров; для сингулярного разложения это число на 4 единицы меньше. При этом точность как описания, так и прогноза может существенно превосходить эти классические аналоги как показано в разделах 3 и 4.2 на примере двухэтапной игры. В переложении на тензорную алгебру нейросетей это свойство представляет интерес для разработки более эффективных вычислительных архитектур.

Вариант модели с искусственным базисом (см. Приложение) позволяет ещё более повысить точность прогноза (рисунок 5B), однако утрачивает преимущество по числу параметров. Новым свойством этой модификации является множественность решений соответствующей оптимизационной задачи. Совместно с отмеченными выше интерпретационными свойствами, получаемые таким образом матричные разложения могут соответствовать альтернативным смысловым моделям одних и тех же фактических данных, выбор между которыми обусловлен субъективизмом когнитивных системы. Таким образом нежелательная на первый взгляд многозначность может соответствовать субъективной многовариантности естественного мышления, не находящей выражения в других парадигмах анализа данных. Возможность такого использования является предметом дальнейших исследований.

References

[1] S. D. Larson, P. Gleeson, and A. E. X. Brown, "Connectome to behaviour: Modelling caenorhabditis elegans at cellular resolution", *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, vol. 373, no. 1758, p. 20 170 366, 2018. DOI: 10.1098/rstb.2017.0366.

[2] O. P. Kuznetsov, "Nonclassical paradigms in the artificial intelligence", *Teoriya i Sistemy Upravleniya*, no. 5, pp. 3–23, 1995, in Russian.

[3] A. Pavlov, "Fourier holography techniques for artificial intelligence", in *Advances in Information Optics and Photonics*, 2010, pp. 251–269. DOI: 10.1117/3.793309.ch13.

[4] D. Widdows, K. Kitto, and T. Cohen, "Quantum mathematics in artificial intelligence", *Journal of Artificial Intelligence Research*, vol. 72, pp. 1307–1341, 2021. DOI: 10.1613/jair.1.12702.

[5] A. Melnikov, M. Kordzanganeh, A. Alodjants, and R.-K. Lee, "Quantum machine learning: From physics to software engineering", *Advances in Physics: X*, vol. 8, no. 1, 2023. DOI: 10.1080/23746149.2023.2165452.

[6] A. Y. Khrennikov, *Ubiquitous Quantum Structure: From Psychology to Finance.* Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010. DOI: 10.1007/978-3-642-05101-2.

[7] I. A. Surov, "Logic of sets and logic of waves in cognitive-behavioral modeling", *Information and Mathematical Technologies in Science and Management*, vol. 32, no. 4, pp. 51–66, 2023. DOI: 10.25729/ESI.2023.32.4.005.

[8] A. K. Guts, *Fundamentals of Quantum Cybernetics.* KAN, 2008, in Russian.

[9] A. Hirose, Ed., *Complex-Valued Neural Networks. Theories and Applications.* World Scientific, 2003.

[10] J. J. Denimal and S. Camiz, "Complex principal component analysis: Theory and geometrical aspects", *Journal of Classification*, vol. 39, no. 2, pp. 376–408, 2022. DOI: 10.1007/s00357-022-09412-0.

[11] S. Kozhisseri and I. A. Surov, "Quantum-probabilistic SVD: Complex-valued factorization of matrix data", *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, vol. 22, no. 3, pp. 567–573, 2022. DOI: 10.17586/2226-1494-2022-22-3-567-573.

[12] B. Wang, Q. Li, M. Melucci, and D. Song, "Semantic Hilbert space for text representation learning", in *Proceedings of the World Wide Web Conference*, ACM Press, 2019, pp. 3293–3299. DOI: 10.1145/3308558.3313516.

[13] D. D. Lee and H. S. Seung, "Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization", *Nature*, vol. 401, no. 6755, pp. 788–791, 1999. DOI: 10.1038/44565.

[14] I. A. Surov, "Natural code of subjective experience", *Biosemiotics*, vol. 15, no. 1, pp. 109–139, 2022. DOI: 10.1007/s12304-022-09487-7.

[15] I. A. Surov, "What is the difference? Pragmatic formalization of meaning", *Artificial intelligence and decision making*, no. 1, pp. 78–89, 2023, in Russian. DOI: 10.14357/20718594230108.

[16] A. Tversky and E. Shafir, "The disjunction effect in choice under uncertainty", *Psychological Science*, vol. 3, no. 5, pp. 305–309, 1992, ISSN: 14679280. DOI: 10.1111/j.1467-9280.1992.tb00678.x.

[17] I. A. Surov, "Quantum cognitive triad: Semantic geometry of context representation", *Foundations of Science*, vol. 26, no. 4, pp. 947–975, 2021. DOI: 10.1007/s10699-020-09712-x.

[18] I. A. Surov, "Probabilistic prediction of "irrational" decisions from semantic composition of contexts", *Journal of Applied Informatics*, vol. 19, no. 1, pp. 125–143, 2024. DOI: 10.37791/2687-0649-2024-19-1-125-143.

[19] N. Gillis, *Nonnegative Matrix Factorization.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 2020. DOI: 10.1137/1.9781611976410.

[20] I. A. Surov, "Life cycle: Semantic matrix of process modeling", *Ontology of designing*, vol. 12, no. 4, pp. 430–453, 2022, in Russian. DOI: 10.18287/2223-9537-2022-12-4-430-453x.

[21] C. Zhu, R. H. Byrd, P. Lu, and J. Nocedal, "Algorithm 778: L-BFGS-B: Fortran subroutines for large-scale bound- constrained optimization", *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 23, no. 4, pp. 550–560, 1997. DOI: 10.1145/279232.279236.

Приложение. Кубитная модель на искусственном базисе

Для моделирования одной из строк матрицы (6) на основе пары других её строк представленная матричная форма избыточна в силу тривиальности первых двух строк матриц $\mathbf{U}_0$, $\mathbf{U}_1$ (8) и совпадения этих строк в матрицах $\widetilde{\mathbf{Q}}_\mathbf{k}$ и $\mathbf{Q}_\mathbf{k}$. Матричная форма, однако, позволяет искать разложение амплитудных матриц (5) более общим образом, когда матрицы $\mathbf{V}_0$ и $\mathbf{V}_1$ не берутся из данных напрямую, а подбираются для получения более точной модели. В этом случае разложения (8) принимают вид

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{Q}}_\mathbf{1} &= \begin{bmatrix} u_{11}e^{i\mathcal{A}} & e^{i(X_a+\mathcal{B})}u_{12} \\ u_{21}e^{i\mathcal{A}} & e^{i(X_b+\mathcal{B})}u_{22} \\ u_{31}e^{i\mathcal{A}} & e^{i(X_c+\mathcal{B})}u_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \end{bmatrix} = \mathbf{U}_1\mathbf{V}_1, \\
\widetilde{\mathbf{Q}}_\mathbf{0} &= \begin{bmatrix} u_{11} & e^{iX_a}u_{12} \\ u_{21} & e^{iX_b}u_{22} \\ u_{31} & e^{iX_c}u_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1-v_{11}^2} & \sqrt{1-v_{12}^2} & \dots & \sqrt{1-v_{1n}^2} \\ \sqrt{1-v_{21}^2} & \sqrt{1-v_{22}^2} & \dots & \sqrt{1-v_{2n}^2} \end{bmatrix} = \mathbf{U}_0\mathbf{V}_0,
\end{aligned} \tag{16}$$

где матрица $\mathbf{U}_0$ имеет 9 параметров, $\mathbf{U}_1$ добавляет к ним фиксированную фазу $\mathcal{A}$ и произвольную $\mathcal{B}$, а $2n$ элементов $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_0$ теперь также являются параметрами модели. Соответственно функции ошибки (9) и нормировки (10) принимают вид

$$L_k(\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k) = \frac{\|\mathbf{P}_k - |\mathbf{U}_k\mathbf{V}_k|^2\|}{\|\mathbf{P}_k\|}, \qquad \mathbf{P}_k[\mathrm{mod}] = \frac{\left|\widetilde{\mathbf{Q}}_\mathbf{k}^{\mathrm{opt}}\right|^2}{\left|\widetilde{\mathbf{Q}}_\mathbf{0}^{\mathrm{opt}}\right|^2 + \left|\widetilde{\mathbf{Q}}_\mathbf{1}^{\mathrm{opt}}\right|^2}, \qquad k \in \{0, 1\}, \tag{17}$$

где матричное деление во втором уравнении выполняется поэлементно, а $\widetilde{\mathbf{Q}}_\mathbf{k}^{\mathrm{opt}}$ есть матрицы (16) с оптимальными параметрами.

Испытания показали, что результат минимизации функции (17) методом L-BFGS-B [21] чувствителен к начальным значениям параметров модели. Соответственно, кубитная модель с искусственным базисом (в отличие от разложений SVD и NMF, а также в отличие от моделей с фиксированным базисом (3)) не является единственной. Модель, результат которой представлен в разделе 5, выбрана из 100 различных решений по критерию наименьшей ошибки прогноза (15).