MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS, VOL. 31, NO. 3, 2024
journal homepage: www.mais-journal.ru

DISCRETE MATHEMATICS IN RELATION TO COMPUTER SCIENCE

Estimation of Interpolation Projectors Using Legendre Polynomials

M. V. Nevskii[1]

DOI: 10.18255/1818-1015-2024-3-316-337

[1]P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

MSC2020: 41A05, 52B55, 52C07
Research article
Full text in Russian

Received August 13, 2024
Revised August 26, 2024
Accepted August 28, 2024

We give some estimates for the minimum projector norm under linear interpolation on a compact set in $\mathbb{R}^n$. Let $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ be the space of polynomials in n variables of degree at most 1, Ω is a compactum in $\mathbb{R}^n$, $K = \mathrm{conv}(\Omega)$. We will assume that $\mathrm{vol}(K) > 0$. Let the points $x^{(j)} \in \Omega$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, be the vertices of an n-dimensional nondegenerate simplex. The interpolation projector $P : C(\Omega) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ with the nodes $x^{(j)}$ is defined by the equations $Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right)$. By $\|P\|_\Omega$ we mean the norm of P as an operator from $C(\Omega)$ to $C(\Omega)$. By $\theta_n(\Omega)$ we denote the minimal norm $\|P\|_\Omega$ of all operators P with nodes belonging to Ω. By $\mathrm{simp}(E)$ we denote the maximal volume of the simplex with vertices in E. We establish the inequalities $\chi_n^{-1}\left(\frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{simp}(\Omega)}\right) \leqslant \theta_n(\Omega) \leqslant n+1$. Here χ_n is the standardized Legendre polynomial of degree n. The lower estimate is proved using the obtained characterization of Legendre polynomials through the volumes of convex polyhedra. More specifically, we show that for every $\gamma \geq 1$ the volume of the set $\left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum |x_j| + \left|1 - \sum x_j\right| \leq \gamma\right\}$ is equal to $\chi_n(\gamma)/n!$. In the case when Ω is an n-dimensional cube or an n-dimensional ball, the lower estimate gives the possibility to obtain the inequalities of the form $\theta_n(\Omega) \geqslant c\sqrt{n}$. Also we formulate some open questions.

Keywords: polynomial interpolation; projector; norm; esimate; Legendre polynomials

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Nevskii, Mikhail V. (corresponding author)	ORCID iD: 0000-0002-6392-7618. E-mail: mnevsk55@yandex.ru Head of the Chair, Dr. Sc., Docent

For citation: M. V. Nevskii, “Estimation of interpolation projectors using Legendre polynomials”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 31, no. 3, pp. 316–337, 2024. DOI: 10.18255/1818-1015-2024-3-316-337.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ, ТОМ 31, № 3, 2024
сайт журнала: www.mais-journal.ru

DISCRETE MATHEMATICS IN RELATION TO COMPUTER SCIENCE

Оценивание интерполяционных проекторов с применением многочленов Лежандра

М. В. Невский[1]

DOI: 10.18255/1818-1015-2024-3-316-337

[1]Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

УДК 514.17+517.51+519.6
Научная статья
Полный текст на русском языке

Получена 13 августа 2024 г.
После доработки 26 августа 2024 г.
Принята к публикации 28 августа 2024 г.

Приводятся оценки для минимальной нормы проектора при линейной интерполяции на компакте в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — пространство многочленов от n переменных степени не выше 1, Ω — компакт в $\mathbb{R}^n$, $K = \operatorname{conv}(E)$. Будем предполагать, что $\operatorname{vol}(K) > 0$. Пусть точки $x^{(j)} \in \Omega$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, являются вершинами n-мерного невырожденного симплекса. Интерполяционный проектор $P : C(\Omega) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ с узлами $x^{(j)}$ определяется равенствами $Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right)$. Под $\|P\|_\Omega$ будем понимать норму P как оператора из $C(\Omega)$ в $C(\Omega$. Через $\theta_n(\Omega)$ обозначим минимальную норму $\|P\|_\Omega$ из всех операторов P с узлами, принадлежащими Ω. Через $\operatorname{simp}(\Omega)$ обозначим максимальный объём симплекса с вершинами в Ω. Устанавливаются неравенства $\chi_n^{-1}\left(\frac{\operatorname{vol}(K)}{\operatorname{simp}(\Omega)}\right) \leqslant \theta_n(\Omega) \leqslant n+1$. Здесь χ_n — стандартизованный многочлен Лежандра степени n. Нижняя оценка доказывается с применением полученной характеризации многочленов Лежандра через объёмы выпуклых многогранников. Именно, мы показываем, что при $\gamma \geq 1$ объём многогранника $\left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum |x_j| + \left|1 - \sum x_j\right| \leq \gamma\right\}$ равен $\chi_n(\gamma)/n!$. В случае, когда Ω — n-мерный куб или n-мерный шар, нижняя оценка даёт возможность получить неравенства вида $\theta_n(\Omega) \geqslant c\sqrt{n}$. Формулируются некоторые открытые вопросы.

Ключевые слова: полиномиальная интерполяция; проектор; норма; оценка; многочлены Лежандра

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Невский, Михаил Викторович (автор для корреспонденции)	ORCID iD: 0000-0002-6392-7618. E-mail: mnevsk55@yandex.ru Заведующий кафедрой, доктор физ.-мат. наук, доцент

Для цитирования: M. V. Nevskii, “Estimation of interpolation projectors using Legendre polynomials”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 31, no. 3, pp. 316–337, 2024. DOI: 10.18255/1818-1015-2024-3-316-337.

Введение

Пусть Ω — компактное подмножество $\mathbb{R}^n$. Для функции $f \in C(\Omega)$ через $E_1(f;\Omega)_{C(\Omega)}$ обозначим величину наилучшего приближения f в $C(\Omega)$-норме многочленами от n переменных степени $\leqslant 1$. Пространство таких многочленов мы обозначаем через $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$. Пусть P — полиномиальный проектор на Ω, т. е. линейный ограниченный оператор из $C(\Omega)$ в $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$, такой что $P(Pf|_\Omega) = Pf$ для любой функции $f \in C(\Omega)$. Тогда выполняются следующие неравенства:

$$E_1(f;\Omega)_{C(\Omega)} \leqslant \|f - Pf\|_{C(\Omega)} \leqslant (1 + \|P\|_\Omega)E_1(f;\Omega)_{C(\Omega)}. \tag{1}$$

Здесь $\|P\|_\Omega = \sup\{\|Pf|_\Omega\|_{C(\Omega)} : \|f\|_{C(\Omega)} \leqslant 1\}$ есть $C(\Omega)$-операторная норма P.

Первое неравенство в (1) является очевидным, поскольку $Pf \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$. Второе неравенство известно в литературе под названием *леммы Лебега, или неравенства Лебега* (см., например, [1]). Это неравенство показывает, что если норма $\|P\|_\Omega$ невелика, то нет существенной потери точности при замене многочлена наилучшего приближения для f на значение Pf, *которое линейно зависит от функции* f. Этот подход даёт простой инструмент для «линеаризации» элемента наилучшего приближения в различных задачах анализа и вычислительной математики, связанных с приближением непрерывных функций на подмножествах $\mathbb{R}^n$.

В приложениях важны как верхние, так и нижние границы операторных норм интерполяционных проекторов. Обычно верхние оценки минимальных норм проекторов получают, рассматривая проекторы некоторого специального типа. Техника получения нижних оценок минимальных норм принципиально иная — в этом случае необходимо доказать нижнюю оценку для произвольного проектора.

Построение и оценка интерполяционных проекторов является классической темой в теории приближений и её приложениях. Эти задачи рассматривались во многих статьях и монографиях (см., например, [2—9]).

Пусть $K = \mathrm{conv}(\Omega)$ имеет ненулевой объём. В настоящей статье мы доказываем, что существует интерполяционный проектор, норма которого не превосходит $n + 1$ (теорема 1). С другой стороны (теорема 6), для любого интерполяционного проектора $P : C(\Omega) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$

$$\|P\|_\Omega \geqslant \chi_n^{-1}\left(\frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{simp_n}(\Omega)}\right). \tag{2}$$

Здесь χ_n — стандартизованный многочлен Лежандра степени n, $\mathrm{simp_n}(\Omega)$ — максимальный объём симплекса с вершинами в Ω.

Ключевым моментом доказательства неравенства (2) является геометрическая характеризация многочленов Лежандра, приведённая в теореме 3. Эта теорема утверждает, что для $\gamma \geqslant 1$ объём множества

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} |x_j| + \left|1 - \sum_{j=1}^{n} x_j\right| \leqslant \gamma\right\}$$

равен $\chi_n(\gamma)/n!$. Указанное свойство позволяет доказать оценку (2) для случая, когда Ω есть выпуклое тело, т. е. $\Omega = K$. В дальнейшем (2) распространяется на произвольный компакт Ω, для которого $\mathrm{simp_n}(\Omega) > 0$.

Когда Ω является n-мерным кубом или шаром, неравенство (2) даёт возможность получить оценки вида $\|P\|_\Omega \geqslant c\sqrt{n}$. Эти оценки неулучшаемы по порядку размерности для всех n, если Ω — n-мерный шар, и по крайней мере для тех n, когда существует матрица Адамара порядка $n + 1$, если Ω — n-мерный куб.

Опишем содержание статьи по разделам. В разделе 1 мы приводим основные обозначения, определения и предварительную информацию. Раздел 2 содержит верхние оценки минимального коэффициента поглощения симплексом компакта Ω, а также минимальной нормы проектора при линейной интерполяции на Ω. В разделе 3 доказывается упомянутая выше теорема 3. В разделе 4 мы доказываем неравенство (2) для $\Omega = K$. Здесь же приводятся некоторые явные нижние границы минимальной нормы проектора, когда K является n-мерным шаром или n-мерным кубом. Раздел 5 содержит неравенства рассматриваемого типа при интерполяции линейными функциями на произвольном компактном множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Наконец, раздел 6 содержит заключительные замечания и открытые вопросы.

Расширенная версия статьи опубликована на сайте arXiv.org [10] (см. также обзор [11]).

1. Основные определения и предварительные сведения

В этой статье $n \in \mathbb{N}$. Для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ через $\|x\|$ обозначается обычная евклидова норма:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}.$$

Здесь и далее для $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ через $\langle x, y\rangle$ обозначается стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

Ниже $Q_n = [0, 1]^n$ — единичный n-мерный куб, B_n — единичный n-мерный шар, задаваемый неравенством $\|x\| \leqslant 1$. Запись $L(n) \asymp M(n)$ означает, что существуют абсолютные константы $c_1, c_2 > 0$, такие что $c_1M(n) \leqslant L(n) \leqslant c_2M(n)$.

Пусть K — *выпуклое тело в* $\mathbb{R}^n$, т. е. компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью. Под σK понимается гомотетическая копия K с центром гомотетии в центре тяжести K и коэффициентом гомотетии σ. Символом $\mathrm{vol}(K)$ обозначается объём K. Если K — выпуклый многогранник, то через $\mathrm{ver}(K)$ мы обозначаем множество вершин K.

Пусть Ω — ограниченное замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$. Под $C(\Omega)$ понимается пространство непрерывных функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ с равномерной нормой

$$\|f\|_{C(\Omega)} := \max_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Ниже часто предполагается, что $\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(\Omega)) > 0$. Это условие эквивалентно тому, что существует n-мерный невырожденный симплекс с вершинами в Ω.

Через $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать пространство многочленов от n переменных степени $\leqslant 1$.

Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Через $\xi(\Omega; S)$ обозначается минимальное $\sigma \geqslant 1$, для которого $\Omega \subset \sigma S$. По нашей терминологии, $\xi(\Omega; S)$ называется *коэффициентом поглощения множества* Ω *симплексом* S. Равенство $\xi(\Omega; S) = 1$ эквивалентно включению $\Omega \subset S$. Заметим, что $\xi(\mathrm{conv}(\Omega); S) = \xi(\Omega; S)$. Обозначим

$$\xi_n(\Omega) = \min\{\xi(\Omega; S) : S - n\text{-мерный симплекс}, \mathrm{ver}(S) \subset \Omega,\ \mathrm{vol}(S) \neq 0\}.$$

Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$ с вершинами $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)$, $1 \leqslant j \leqslant n + 1$. *Матрицей вершин* этого симплекса называется матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица является невырожденной, причём

$$\mathrm{vol}(S) = \frac{|\det(\mathbf{A})|}{n!}. \tag{3}$$

Пусть $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$. Линейные многочлены

$$\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}, \quad j = 1, \ldots, n+1,$$

коэффициенты которых составляют столбцы матрицы $\mathbf{A}^{-1}$, называются *базисными многочленами Лагранжа симплекса* S. Справедливы равенства $\lambda_j\left(x^{(k)}\right) = \delta_j^k$, где δ_j^k — δ-символ Кронекера. Заметим также, что

$$\lambda_j(x) = \frac{\Delta_j(x)}{\Delta}. \tag{4}$$

Здесь $\Delta = \det(\mathbf{A})$, а определитель $\Delta_j(x)$ получается из Δ путём замены j-й строки на строку $(x_1 \ \ldots \ x_n \ 1)$.

Для произвольной точки $x \in \mathbb{R}^n$

$$x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x)x^{(j)}, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1.$$

Поэтому $\lambda_j(x)$ являются *барицентрическими координатами точки* x *относительно симплекса* S. Уравнения $\lambda_j(x) = 0$ задают $(n-1)$-мерные гиперплоскости, содержащие грани S. Следовательно,

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \lambda_j(x) \geqslant 0, \ j = 1, \ldots, n+1\right\}.$$

Коэффициент поглощения $\xi(\Omega; S)$ вычисляется по формуле

$$\xi(\Omega; S) = (n+1) \max_{1\leqslant j\leqslant n+1} \max_{x\in\Omega} (-\lambda_j(x)) + 1. \tag{5}$$

Для выпуклого Ω равенство (5) доказывается в [12]; в общем случае доказательство проводится по той же схеме.

Совокупность из $n+1$ точек Ω называется *допустимым набором узлов* для интерполяции с помощью $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$, если симплекс с вершинами в этих точках является невырожденным. Ниже рассматриваются лишь допустимые наборы узлов и те множества Ω, каждое из которых содержит такой набор.

Пусть $x^{(j)} \in \Omega$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, являются вершинами невырожденного симплекса S. *Интерполяционный проектор* $P : C(\Omega) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ *с узлами* $x^{(j)}$ определяется равенствами $Pf\left(x^{(j)}\right) = f_j = f\left(x^{(j)}\right)$. Будем говорить, что проектор P и симплекс S *соответствуют друг другу* и применять обозначения P_S и S_P.

Для проектора $P = P_S$ справедлив аналог интерполяционной формулы Лагранжа:

$$Pf(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f\left(x^{(j)}\right)\lambda_j(x), \tag{6}$$

где λ_j — базисные многочлены Лагранжа симплекса $S = S_P$. Обозначим через $\|P\|_\Omega$ норму P как оператора из $C(\Omega)$ в $C(\Omega)$. Из (6) имеем:

$$\begin{aligned}
\|P\|_\Omega &= \sup_{\|f\|_{C(\Omega)}=1} \|Pf\|_{C(\Omega)} = \sup_{-1\leqslant f_j\leqslant 1} \max_{x\in\Omega} \left|\sum_{j=1}^{n+1} f_j\lambda_j(x)\right| \\
&= \max_{x\in\Omega} \sup_{-1\leqslant f_j\leqslant 1} \left|\sum_{j=1}^{n+1} f_j\lambda_j(x)\right| = \max_{x\in\Omega} \sup_{-1\leqslant f_j\leqslant 1} \sum_{j=1}^{n+1} f_j\lambda_j(x).
\end{aligned}$$

Выражение $\sum f_j\lambda_j(x)$ линейно по x и $f_1,\ldots,f_{n+1}$, значит,

$$\max_{x\in\Omega}\sup_{-1\leqslant f_j\leqslant 1}\sum_{j=1}^{n+1} f_j\lambda_j(x)=\max_{x\in\Omega}\max_{f_j=\pm 1}\sum_{j=1}^{n+1} f_j\lambda_j(x)=\max_{x\in\Omega}\sum_{j=1}^{n+1}|\lambda_j(x)|.$$

Таким образом,

$$\|P\|_\Omega=\max_{x\in\Omega}\sum_{j=1}^{n+1}|\lambda_j(x)|=\max\left\{\sum_{j=1}^{n+1}|\beta_j|:\ \sum_{j=1}^{n+1}\beta_j=1,\ x=\sum_{j=1}^{n+1}\beta_j x^{(j)}\in\Omega\right\}. \tag{7}$$

Равенство (7) выражает норму проектора P через барицентрические координаты точек множества Ω относительно симплекса с вершинами в узлах интерполяции $x^{(j)}$. Если Ω — выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$ (например, куб), то верны и более простые равенства

$$\|P\|_\Omega=\max_{x\in \mathrm{ver}(\Omega)}\sum_{j=1}^{n+1}|\lambda_j(x)|=\max\left\{\sum_{j=1}^{n+1}|\beta_j|:\ \sum_{j=1}^{n+1}\beta_j=1,\ x=\sum_{j=1}^{n+1}\beta_j x^{(j)}\in \mathrm{ver}(\Omega)\right\}.$$

Обозначим через $\theta_n(\Omega)$ минимальное значение $\|P_S\|_\Omega$ по всем n-мерным невырожденным симплексам S с вершинами в Ω. Интерполяционный проектор $P: C(\Omega)\to\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ называется *минимальным,* если $\|P\|_\Omega=\theta_n(\Omega)$.

В [13] доказано, что для любого интерполяционного проектора $P: C(\Omega)\to\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ и соответствующего симплекса S выполняются неравенства

$$\frac{n+1}{2n}\Big(\|P\|_\Omega-1\Big)+1\leqslant\xi(\Omega;S)\leqslant\frac{n+1}{2}\Big(\|P\|_\Omega-1\Big)+1. \tag{8}$$

Благодаря (8) имеем соотношения

$$\frac{n+1}{2n}\Big(\theta_n(\Omega)-1\Big)+1\leqslant\xi_n(\Omega)\leqslant\frac{n+1}{2}\Big(\theta_n(\Omega)-1\Big)+1. \tag{9}$$

Очевидно, что если проектор P удовлетворяет равенству

$$\xi_n(\Omega)=\frac{n+1}{2}\Big(\|P\|_\Omega-1\Big)+1, \tag{10}$$

то P является минимальным и правое соотношение в (9) становится равенством.

Иногда мы будем рассматривать случай, когда $n+1$ есть *число Адамара.* По определению, это означает, что существует матрица Адамара порядка $n+1$. Напомним, что *матрицей Адамара порядка m* называется квадратная матрица $\mathbf{H}$ с элементами 1 или -1, для которой

$$\mathbf{H}^{-1}=\frac{1}{m}\mathbf{H}^T.$$

Это равенство означает, что строки $\mathbf{H}$ попарно ортогональны относительно стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^m$. Порядок матрицы Адамара равен 1, 2 или кратен 4 (см. [14]). До сих пор неизвестно, существует ли матрица Адамара любого порядка вида $m=4k$. Это одна из самых давних открытых проблем в математике. Порядки ниже 1500, кратные 4, для которых матрицы Адамара пока не известны, суть 668, 716, 892, 956, 1132, 1244, 1388 и 1436 (см., например, [15, 16]).

Обозначим через h_n максимальное значение определителя порядка n с элементами 0 или 1. Пусть ν_n есть максимальный объём n-мерного симплекса, содержащегося в Q_n. Эти числа связаны равенством $h_n=n!\nu_n$ (см. [17]). Для $n>1$

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{\log(4/3)}{\log n}\right)n\log n<\log(2^{n-1}h_{n-1})\leqslant\frac{1}{2}\,n\log n. \tag{11}$$

Правое неравенство в (11) доказано Адамаром [18]; левое неравенство установлено Клементсом и Линдстрёмом [19]. Следовательно, для любого n

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{(n+1)/2}\frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n} < h_n \leqslant \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n}, \tag{12}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{(n+1)/2}\frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n n!} < \nu_n \leqslant \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n n!}. \tag{13}$$

Правое равенство в каждом из соотношений выполняется тогда и только тогда, когда $n+1$ есть число Адамара [17]. Для многих n точные значения ν_n и h_n известны. Первые 12 чисел ν_n равны

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = \frac{1}{2}, \quad \nu_3 = \frac{1}{3}, \quad \nu_4 = \frac{1}{8}, \quad \nu_5 = \frac{1}{24}, \quad \nu_6 = \frac{1}{80}, \quad \nu_7 = \frac{2}{315},$$

$$\nu_8 = \frac{1}{720}, \quad \nu_9 = \frac{1}{2520}, \quad \nu_{10} = \frac{1}{11340}, \quad \nu_{11} = \frac{9}{246400}, \quad \nu_{12} = \frac{3}{394240}.$$

Через $\varkappa_n$ обозначим объём единичного шара B_n, через σ_n — объём правильного n-мерного симплекса, вписанного в B_n. Числа $\varkappa_n$ и σ_n известны для всех n. Именно (см. [12, 20]),

$$\varkappa_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(n/2+1\right)}, \qquad \sigma_n = \frac{1}{n!}\sqrt{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n/2}, \tag{14}$$

$$\varkappa_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}, \qquad \varkappa_{2k+1} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k+1)!!} = \frac{2(k!)(4\pi)^k}{(2k+1)!}. \tag{15}$$

Под $\mathrm{simp_n}(\Omega)$ будем понимать максимальный объём невырожденного n-мерного симплекса с вершинами в Ω. Очевидно, $\mathrm{simp_n}(Q_n) = \nu_n$. Правильный симплекс, вписанный в n-мерный шар, имеет максимальный объём из всех симплексов, содержащихся в этом шаре, причём других симплексов с этим свойством нет (см. [21—23]). Значит, $\mathrm{simp_n}(B_n) = \sigma_n$.

2. Неравенства $\xi_n(\Omega) \leqslant n+2$, $\theta_n(\Omega) \leqslant n+1$

Теорема 1. *Пусть Ω — компакт в $\mathbb{R}^n$, для которого $\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(\Omega)) > 0$, S — симплекс с вершинами в Ω, имеющий максимальный объём. Тогда*

$$\xi(\Omega; S) \leqslant n+2, \quad \|P_S\|_\Omega \leqslant n+1. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть K — произвольное выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. Используя чисто геометрический подход, Лассак [24] показал, что для любого симплекса S' максимального объёма в K справедливы включения

$$S' \subset K \subset (n+2)S'. \tag{17}$$

Отсюда следует, что $\xi(K; S') \leqslant n+2$. Применим это неравенство к выпуклому телу $K = \mathrm{conv}(\Omega)$. В качестве S' возьмём симплекс S из условия теоремы. Поскольку $\mathrm{simp_n}(K) = \mathrm{simp_n}(\Omega)$ (см. ниже доказательство теоремы 6), S является симплексом максимального объёма и в K. Из включения $\Omega \subset K$ имеем $\xi(\Omega; S) \leqslant \xi(K; S) \leqslant n+2$.

Заметим, что левое неравенство в (16) легко следует также из формулы (5). Действительно, так как S имеет максимальный объём из всех симплексов с вершинами в Ω, то $|\Delta_j(x)| \leqslant |\Delta|$ для любых $j = 1, \ldots, n+1$ и $x \in \Omega$. (Это сразу вытекает из (3).) Благодаря (4)

$$-\lambda_j(x) \leqslant |\lambda_j(x)| = \frac{|\Delta_j(x)|}{|\Delta|} \leqslant 1, \quad x \in \Omega. \tag{18}$$

Здесь λ_j — базисные многочлены Лагранжа для S. По формуле (5),

$$\xi(\Omega;S) = (n+1) \max_{1\leqslant j\leqslant n+1} \max_{x\in\Omega} (-\lambda_j(x)) + 1 \leqslant n+2,$$

что доказывает левое неравенство в (16).

Правое неравенство в (16) следует из (7). Поскольку $|\lambda_j(x)| \leqslant 1$, имеем

$$\|P_S\|_\Omega = \max_{x\in\Omega} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| \leqslant n+1.$$

Теорема доказана. □

Теорема 2. *Для произвольного компакта $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, выпуклая оболочка которого имеет ненулевой объём,*

$$\xi_n(\Omega) \leqslant n+2, \qquad \theta_n(\Omega) \leqslant n+1. \tag{19}$$

Сразу следует из теоремы 1.

3. Многочлены Лежандра и мера множества $E_{n,\gamma}$

Стандартизованным многочленом Лежандра степени n называется многочлен

$$\chi_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \left[(t^2-1)^n\right]^{(n)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(формула Родрига). По поводу свойств χ_n см., например, [25, 26]. Многочлены Лежандра ортогональны на отрезке $[-1,1]$ с весом $w(t) \equiv 1$. Первые многочлены Лежандра имеют вид

$$\chi_0(t) = 1, \quad \chi_1(t) = t, \quad \chi_2(t) = \frac{1}{2}\left(3t^2-1\right), \quad \chi_3(t) = \frac{1}{2}\left(5t^3-3t\right),$$

$$\chi_4(t) = \frac{1}{8}\left(35t^4-30t^2+3\right), \quad \chi_5(t) = \frac{1}{8}\left(63t^5-70t^3+15t\right).$$

Справедливо рекуррентное соотношение

$$\chi_{n+1}(t) = \tfrac{2n+1}{n+1}\, t\cdot\chi_n(t) - \tfrac{n}{n+1}\,\chi_{n-1}(t). \tag{20}$$

Отсюда, в частности, $\chi_n(1)=1$. Напомним также, что если $n \geqslant 1$, то $\chi_n(t)$ возрастает при $t \geqslant 1$. Эти свойства легко получаются и из приводимой ниже формулы (22). Через χ_n^{-1} обозначим функцию, обратную к χ_n на полуоси $[1,+\infty)$.

Одним из ключевых утверждений нашего подхода к оцениванию интерполяционных проекторов является формулируемая ниже теорема 3. Эта теорема обнаруживает довольно неожиданные связи между многочленами Лежандра и объёмами выпуклых многогранников.

Для $\gamma \geqslant 1$ определим множество $E_{n,\gamma}$ равенством

$$E_{n,\gamma} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |x_j| + \left|1 - \sum_{j=1}^n x_j\right| \leqslant \gamma \right\}. \tag{21}$$

Теорема 3. *Справедливы соотношения*

$$\mathrm{mes}_n(E_{n,\gamma}) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 (\gamma-1)^{n-i}(\gamma+1)^i = \frac{\chi_n(\gamma)}{n!}. \tag{22}$$

Это утверждение доказано автором в 2003 г. и опубликовано в статье, которая сегодня практически недоступна широкой аудитории. Для удобства читателя мы приводим доказательство ниже.

Доказательство. Сначала докажем левое равенство в (22). Пусть

$$E^{(1)} = \{x \in E_{n,\gamma} : \sum x_i > 1\}, \quad E^{(2)} = \{x \in E_{n,\gamma} : \sum x_i \leqslant 1\}.$$

Получим явные формулы для объёмов $m_1 = \mathrm{mes_n}(E^{(1)})$ и $m_2 = \mathrm{mes_n}(E^{(2)})$.

Зафиксируем k, $1 \leqslant k \leqslant n$, и рассмотрим непустое подмножество $G \subset E^{(1)}$, состоящее из всех $x = (x_1, \ldots, x_n)$, для которых $x_1, \ldots, x_k \geqslant 0$ и $x_{k+1}, \ldots, x_n < 0$. Пусть $y_i = x_i$ для $i = 1, \ldots, k$ и $y_i = -x_i$ для $i = k+1, \ldots, n$. Положим $y = (y_1, \ldots, y_n)$, тогда

$$G = \left\{ y : 1 + y_{k+1} + \ldots + y_n \leqslant y_1 + \ldots + y_k \leqslant \frac{\gamma+1}{2},\ y_i \geqslant 0 \right\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\mathrm{mes_n}(G) &= \int\limits_1^{\alpha} dy_1 \int\limits_1^{\alpha - y_1} dy_2 \ldots \int\limits_1^{\alpha - y_1 - \ldots - y_{k-1}} dy_k \\ &\quad \int\limits_0^{y_1+\ldots+y_k-1} dy_{k+1} \int\limits_0^{y_1+\ldots+y_k-1-y_{k+1}} dy_{k+2} \ldots \int\limits_0^{y_1+\ldots+y_k-1-y_{k+1}-\ldots-y_{n-1}} dy_n.\end{aligned}$$

В нашем доказательстве $\alpha = (\gamma+1)/2$. Если $b > 0$, то

$$\int\limits_0^{b} dz_1 \int\limits_0^{b-z_1} dz_2 \ldots \int\limits_0^{b-z_1-\ldots-z_{l-1}} dz_l = \frac{b^l}{l!}.$$

Значит,

$$\begin{aligned}\mathrm{mes_n}(G) &= \int\limits_1^{\alpha} dy_1 \int\limits_1^{\alpha-y_1} dy_2 \ldots \int\limits_1^{\alpha-y_1-\ldots-y_{k-1}} \frac{1}{(n-k)!}(y_1+\ldots+y_k-1)^{n-k}\, dy_k \\ &= \left(\int\limits_{y_1+\ldots+y_k \leqslant \alpha} - \int\limits_{y_1+\ldots+y_k \leqslant 1} \right) \frac{1}{(n-k)!}(y_1+\ldots+y_k-1)^{n-k}\, dy_1 \ldots dy_k \\ &= J_1 - J_2.\end{aligned}$$

Первый интеграл равен

$$J_1 = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \frac{(\alpha-1)^{n-k+j}}{(n-k+j)!} \frac{\alpha^{k-j}}{(k-j)!} + \frac{(-1)^{n+k}}{n!}.$$

Значение J_2 получается из этого выражения, если вместо α взять 1. Следовательно,

$$\mathrm{mes_n}(G) = J_1 - J_2 = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \frac{(\alpha-1)^{n-k+j}}{(n-k+j)!} \frac{\alpha^{k-j}}{(k-j)!} = \frac{(-1)^{k+1}}{n!} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} (\alpha-1)^{n-i}(-\alpha)^i. \qquad (23)$$

Множество $E^{(1)}$ является объединением всех таких множеств G с различными $k = 1, \dots, n$. Поэтому мера $E^{(1)}$ равна

$$m_1 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{n!} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} (\alpha - 1)^{n-i} (-\alpha)^i.$$

Меняя порядок суммирования и используя тождество

$$\sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^i \binom{n-1}{i} \tag{24}$$

(см., например, [27]), получим

$$m_1 = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (\alpha - 1)^{n-i} (-\alpha)^i \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{n}{k} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \binom{n-1}{i} (\alpha - 1)^{n-i} \alpha^i. \tag{25}$$

Теперь перейдём к $E^{(2)}$. Прежде всего заметим, что $E^{(2)}$ содержит область $S = \{x_i \geqslant 0, \sum x_i \leqslant 1\}$, мера которой равна $1/n!$. Далее, зафиксируем $k \in \{1, \dots, n\}$ и рассмотрим подмножество $G' \subset E^{(2)}$, соответствующее неравенствам $x_1, \dots, x_k < 0$; $x_{k+1}, \dots, x_n \geqslant 0$. Положим $y_1 = -x_1, \dots, y_k = -x_k$; $y_{k+1} = x_{k+1}, \dots, y_n = x_n$. Тогда

$$G' = \{y : y_{k+1} + \ldots + y_n \leqslant 1 + y_1 + \ldots + y_k \leqslant \frac{\gamma - 1}{2},\ y_i \geqslant 0\}.$$

Обозначим $\beta = (\gamma - 1)/2$. Имеют место равенства:

$$\begin{aligned}
\mathrm{mes_n}(G') &= \int\limits_0^{\beta} dy_1 \int\limits_0^{\beta - y_1} dy_2 \ldots \int\limits_0^{\beta - y_1 - \ldots - y_{k-1}} dy_k \\
&\quad \int\limits_0^{1 + y_1 + \ldots + y_k} dy_{k+1} \int\limits_0^{1 + y_1 + \ldots + y_k - y_{k+1}} dy_{k+2} \ldots \int\limits_0^{1 + y_1 + \ldots + y_k - y_{k+1} - \ldots - y_{n-1}} dy_n \\
&= \int\limits_0^{\beta} dy_1 \int\limits_0^{\beta - y_1} dy_2 \ldots \int\limits_0^{\beta - y_1 - \ldots - y_{k-1}} \frac{(1 + y_1 + \ldots + y_k)^{n-k}}{(n-k)!} dy_k \\
&= \left[\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-1-j} \frac{(1+\beta)^{n-j} \beta^j}{(n-j)!\, j!} \right] + \frac{(-1)^k}{n!} = \frac{(-1)^{k+1}}{n!} \left(\left[\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} (1+\beta)^{n-j} (-\beta)^j \right] - 1 \right).
\end{aligned}$$

Множество $E^{(2)}$ есть объединение всех таких множеств G', соответствующих различным $k = 1, \dots, n$, а также симплекса S. Значит,

$$m_2 = \mathrm{mes_n}(E^{(2)}) = \frac{1}{n!} \left(\left\{ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(\left[\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} (1+\beta)^{n-j} (-\beta)^j \right] - 1 \right) \right\} + 1 \right).$$

Заметим, что $1 + \beta = (\gamma + 1)/2 = \alpha$ и $\beta = (\gamma - 1)/2 = \alpha - 1$. Во внутренней сумме сделаем замену $i = n - j$ и учтём, что

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} + 1 = 0.$$

Мы получим следующее:

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{1}{n!}\left(1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\left((-1)^n\sum_{i=n-k+1}^{n}\binom{n}{i}(\alpha-1)^{n-i}(-\alpha)^i-1\right)\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\sum_{i=n-k+1}^{n}\binom{n}{i}(\alpha-1)^{n-i}(-\alpha)^i. \end{aligned}$$

Меняя порядок суммирования, придём к равенству

$$m_2=\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(\alpha-1)^{n-i}(-\alpha)^i\sum_{k=n+1-i}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}.$$

Применяя (24), запишем

$$\sum_{k=n+1-i}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}=\sum_{k=n+1-i}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{n-k}=\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{n-j+1}\binom{n}{j}=(-1)^{n+i}\binom{n-1}{i-1}.$$

Следовательно,

$$m_2=\frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\binom{n-1}{i-1}(\alpha-1)^{n-i}\alpha^i. \tag{26}$$

Равенства (25) и (26) означают, что

$$\begin{aligned} \mathrm{mes_n}(E_{n,\gamma}) &= m_1+m_2\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}\binom{n-1}{i}(\alpha-1)^{n-i}\alpha^i+\frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\binom{n-1}{i-1}(\alpha-1)^{n-i}\alpha^i\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}\left(\binom{n-1}{i}+\binom{n-1}{i-1}\right)(\alpha-1)^{n-i}\alpha^i+\frac{1}{n!}\left((\alpha-1)^n+\alpha^n\right)\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2(\alpha-1)^{n-i}\alpha^i=\frac{1}{2^n n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2(\gamma-1)^{n-i}(\gamma+1)^i. \end{aligned}$$

Мы приняли во внимание, что

$$\binom{n-1}{i}+\binom{n-1}{i-1}=\binom{n}{i}.$$

Левое равенство в (22) доказано.

Правое равенство в (22) следует из тождества

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 t^i=(1-t)^n\chi_n\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

(см. [27]). Положим $t=(\gamma-1)/(\gamma+1)$, тогда

$$(1-t)^n=2^n(\gamma+1)^{-n},\qquad \frac{1+t}{1-t}=\gamma.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathrm{mes_n}(E_{n,\gamma}) &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2(\gamma-1)^{n-i}(\gamma+1)^i=\frac{1}{2^n n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2(\gamma+1)^{n-i}\\ &= \frac{1}{2^n n!}(\gamma+1)^n\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^i=\frac{\chi_n(\gamma)}{n!}. \end{aligned}$$

Теорема 3 полностью доказана. □

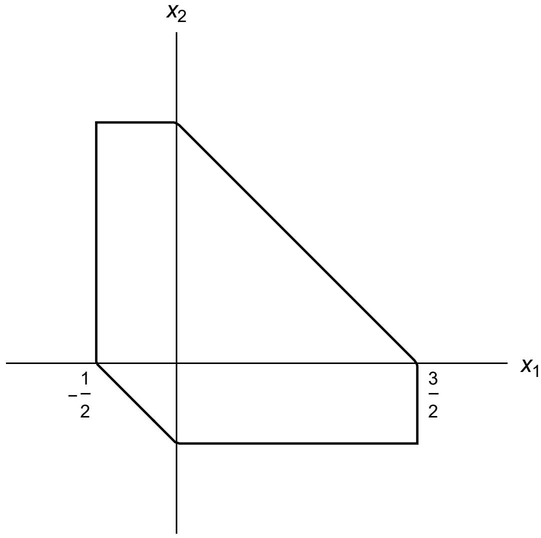

Fig. 1. The set $E_{2,2}$ **Рис. 1.** Множество $E_{2,2}$

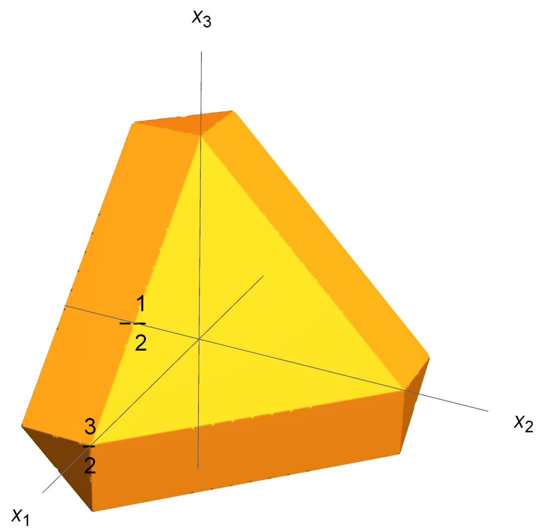

Fig. 2. The set $E_{3,2}$ **Рис. 2.** Множество $E_{3,2}$

Приведём простые примеры. Возьмём $\gamma = 2$. Множество $E_{1,2} = \{x \in \mathbb{R} : |x|+|1-x| \leqslant 2\}$ есть отрезок $[-1/2, 3/2]$ длины $\mathrm{mes}_1(E_{1,2}) = \chi_1(2)/1! = 2$. Множество $E_{2,2} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| + |1 - x_1 - x_2| \leqslant 2\}$ — шестиугольник на плоскости с площадью $\mathrm{mes}_2(E_{2,2}) = \chi_2(2)/2! = 11/4$. См. рис. 1.

Трёхмерная область $E_{3,2} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_1| + |x_2| + |x_3| + |1 - x_1 - x_2 - x_3| \leqslant 2\}$ изображена на рис. 2. Объём этого многогранника $\mathrm{mes}_3(E_{3,2}) = \chi_3(2)/3! = 17/6$.

Отметим интересную открытую проблему, связанную с равенством (22). Наряду с формулой Родрига и другими известными соотношениями, это равенство даёт характеризацию многочленов Лежандра — их можно определить и через объёмы выпуклых многогранников. Именно, для $t \geqslant 1$

$$\chi_n(t) = n!\, \mathrm{mes}_n(E_{n,t}), \tag{27}$$

где $E_{n,t}$ — многогранник, задаваемый соотношением (21). Возникает вопрос об аналогах (27) для других классов ортогональных многочленов, таких как многочлены Чебышёва или, в более общем случае, многочлены Якоби. *Является ли равенство* (27) *проявлением более общей закономерности?* Автор будет благодарен за любую информацию по этому вопросу.

Сделаем ещё одно замечание. Из (27) и (20) следует

$$\mathrm{mes}_{n+1}(E_{n+1,t}) = \frac{2n+1}{(n+1)^2}\, t\, \mathrm{mes}_n(E_{n,t}) - \frac{1}{(n+1)^2}\mathrm{mes}_{n-1}(E_{n-1,t}).$$

Прямое установление этого рекуррентного соотношения для мер множеств $E_{n,t}$ могло бы дать новое доказательство теоремы 3.

4. Неравенство $\theta_n(K) \geqslant \chi_n^{-1}\left(\dfrac{\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(K))}{\mathrm{simp_n}(K)}\right)$

Основываясь на теореме 3, получим нижние оценки для нормы интерполяционного проектора на произвольном выпуклом теле $K \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 4. *Пусть K — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, $P : C(K) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — произвольный интерполяционный проектор. Тогда для соответствующих симплекса $S_P \subset K$ и матрицы узлов* **A** *выполняются соотношения*

$$\|P\|_K \geqslant \chi_n^{-1}\left(\frac{n!\mathrm{vol}(K)}{|\det(\mathbf{A})|}\right) = \chi_n^{-1}\left(\frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{vol}(S_P)}\right). \tag{28}$$

Доказательство. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ вычтем из i-й строки матрицы **A** её $(n+1)$-ю строку. Обозначим через **B** квадратную подматрицу порядка n, стоящую в первых n строках и столбцах получившейся матрицы. Справедливы равенства

$$|\det(\mathbf{B})| = |\det(\mathbf{A})| = n!\mathrm{vol}(S_P) \leqslant n!\mathrm{vol}(K),$$

поэтому

$$\frac{|\det(\mathbf{B})|}{n!\mathrm{vol}(K)} \leqslant 1. \tag{29}$$

Пусть $x^{(j)}$ — вершины, λ_j — базисные многочлены Лагранжа симплекса S_P. По формуле (7),

$$\|P\|_K = \max_{x\in K}\sum_{j=1}^{n+1}|\lambda_j(x)| = \max\left\{\sum_{j=1}^{n+1}|\beta_j| : \sum_{j=1}^{n+1}\beta_j = 1,\ \sum_{j=1}^{n+1}\beta_j x^{(j)} \in K\right\}.$$

Заменим β_{n+1} на равное значение $1 - \sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j$. Условие $\sum\limits_{j=1}^{n+1}\beta_j x^{(j)} \in K$ эквивалентно условию

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j(x^{(j)} - x^{(n+1)}) \in K' = K - x^{(n+1)}.$$

Значит,

$$\|P\|_K = \max\left\{\sum_{j=1}^{n}\left|\beta_j\right| + \left|1 - \sum_{j=1}^{n}\beta_j\right|\right\}, \tag{30}$$

где максимум берётся по всем β_j, таким что $\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j(x^{(j)} - x^{(n+1)}) \in K'$. Очевидно, $\mathrm{vol}(K') = \mathrm{vol}(K)$.

Рассмотрим невырожденный линейный оператор $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, который ставит в соответствие точке $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ точку $x = F(\beta)$ в соответствии с правилом

$$x = \sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(x^{(j)} - x^{(n+1)}\right).$$

Справедливо матричное равенство

$$F(\beta) = (\beta_1, \ldots, \beta_n)\mathbf{B},$$

где $\mathbf{B}$ — введённая выше матрица порядка n с элементами $b_{ij} = x_j^{(i)} - x_j^{(n+1)}$. Обозначим

$$\gamma^* = \chi_n^{-1}\left(\frac{n!\mathrm{vol}(K)}{|\det \mathbf{B}|}\right).$$

Благодаря (29) $n!\mathrm{vol}(K)/|\det(\mathbf{B})| \geqslant 1$, поэтому число γ^* определено корректно. Заметим также, что $\chi_n(\gamma^*) = n!\mathrm{vol}(K)/|\det(\mathbf{B})|$.

Для данного $\gamma \geqslant 1$ введём в рассмотрение множество

$$E_{n,\gamma} = \left\{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} |\beta_j| + \left|1 - \sum_{j=1}^{n} \beta_j\right| \leqslant \gamma\right\}.$$

Покажем, что при $\gamma < \gamma^*$ выполняется $K' \not\subset F(E_{n,\gamma})$. Достаточно убедиться в справедливости неравенства $\mathrm{mes_n}(F(E_{n,\gamma})) < \mathrm{vol}(K')$. По теореме 3 $\mathrm{mes_n}(E_{n,\gamma^*}) = \chi_n(\gamma^*)/n!$, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathrm{mes_n}(F(E_{n,\gamma})) &< \mathrm{mes_n}(F(E_{n,\gamma^*})) = |\det \mathbf{B}| \cdot \mathrm{mes_n}(E_{n,\gamma^*}) \\ &= |\det \mathbf{B}| \cdot \frac{\chi_n(\gamma^*)}{n!} = \mathrm{vol}(K) = \mathrm{vol}(K'). \end{aligned}$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $z^{(\varepsilon)}$ со свойствами:

$$z^{(\varepsilon)} = \sum \beta_j^{(\varepsilon)}\left(x^{(j)} - x^{(n+1)}\right) \in K' \quad \text{и} \quad \left|\sum \beta_j^{(\varepsilon)}\right| + \left|1 - \sum \beta_j^{(\varepsilon)}\right| \geqslant \gamma^* - \varepsilon.$$

В связи с (30) это означает, что $\|P\|_K \geqslant \gamma^* - \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ — произвольно, мы получаем

$$\|P\|_K \geqslant \gamma^* = \chi_n^{-1}\left(\frac{n!\mathrm{vol}(K)}{|\det(\mathbf{B})|}\right) = \chi_n^{-1}\left(\frac{n!\mathrm{vol}(K)}{|\det(\mathbf{A})|}\right) = \chi_n^{-1}\left(\frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{vol}(S_P)}\right).$$

Теорема доказана. □

Напомним, что $\mathrm{simp_n}(K)$ обозначает максимальный объём симплекса с вершинами в K.

Теорема 5. *Пусть K — произвольное выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\theta_n(K) \geqslant \chi_n^{-1}\left(\frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{simp_n}(K)}\right). \tag{31}$$

Доказательство. Из (28) следует, что для любого проектора $P : C(K) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$

$$\|P\|_K \geqslant \chi_n^{-1}\left(\frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{vol}(S_P)}\right) \geqslant \chi_n^{-1}\left(\frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{simp_n}(K)}\right).$$

Это немедленно даёт (31). □

Если симплекс $S \subset K$ имеет максимальный объём, то $K \subset (n+2)S$ (см. (17)), значит,

$$\mathrm{vol}(K) \leqslant (n+2)^n\mathrm{vol}(S) \leqslant (n+2)^n\mathrm{simp_n}(K).$$

Следовательно, отношение $\mathrm{vol}(K)/\mathrm{simp_n}(K)$ в правой части (31) ограничено сверху величиной $(n+2)^n$.

Приведём здесь следствия оценки (31) для куба и шара. Сначала отметим доказанные автором неравенства для $\chi_n^{-1}(s)$ (см. [12]). Если n — чётное, то

$$\chi_n^{-1}(s) > \left(\frac{s\,((n/2)!)^2}{n!}\right)^{1/n}. \tag{32}$$

Если же n — нечётное, то

$$\chi_n^{-1}(s) > \left(\frac{s\,\frac{n+1}{2}!\,\frac{n-1}{2}!}{n!}\right)^{1/n}. \tag{33}$$

Пусть K есть куб $Q_n = [0,1]^n$. Тогда $\mathrm{vol}(K) = 1, \mathrm{simp_n}(K) = \nu_n$, поэтому (31) даёт

$$\theta_n(Q_n) \geqslant \chi_n^{-1}\left(\frac{1}{\nu_n}\right). \tag{34}$$

Величина ν_n может быть оценена сверху с помощью неравенства (13). Применение (32) и (33) позволяет получить из (34) следующий результат (см. [12]).

Следствие 1. *Для всех n*

$$\theta_n(Q_n) > \frac{\sqrt{n-1}}{e}.$$

Отсюда получается, что $\theta_n(Q_n) > c\sqrt{n}$. Например, как отмечено в [10], выполняется

$$\theta_n(Q_n) > \frac{2\sqrt{2}}{3e}\,\sqrt{n}.$$

Заметим, что $\dfrac{2\sqrt{2}}{3e} = 0.3468\ldots$. Оценка $\theta_n(Q_n) > c\sqrt{n}$ точна по n по крайней мере в случае, когда $n+1$ есть число Адамара: для таких n верно $\theta_n(Q_n) \asymp \sqrt{n}$.

Перейдём к случаю, когда K есть единичный шар B_n. Здесь $\mathrm{vol}(K) = \varkappa_n, \mathrm{simp_n}(K) = \sigma_n$, Тем самым (31) принимает вид

$$\theta_n(B_n) \geqslant \chi_n^{-1}\left(\frac{\varkappa_n}{\sigma_n}\right). \tag{35}$$

Применяя (32), (33), (14) и (15), получаем из (35) такую оценку (см. [28]).

Следствие 2. *Существует абсолютная константа $c > 0$, для которой $\theta_n(B_n) > c\sqrt{n}$. Подходящим значением c является*

$$c = \frac{\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt{12e}\cdot\sqrt[6]{3}} = 0.2135\ldots$$

Оценка $\theta_n(B_n) > c\sqrt{n}$ является точной по размерности n. Именно, имеет место соотношение $\theta_n(B_n) \asymp \sqrt{n}$. Точное значение $\theta_n(B_n)$ найдено в [29]. При этом установлено, что $\theta_n(B_n) \geqslant \sqrt{n}$ с равенством только при $n = 1$. См. подробнее раздел 6.

5. Линейная интерполяция на произвольном компакте

Перейдём к обобщению неравенства (31) на (необязательно выпуклое) компактное множество. Пусть Ω — компакт в $\mathbb{R}^n$. Всюду далее в этом разделе через K обозначается выпуклая оболочка Ω. Будем предполагать, что $\mathrm{vol}(K) > 0$.

Нам понадобится следующая элементарная лемма.

Лемма 1. *Если $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — выпуклая непрерывная функция, то $\max\limits_K \varphi = \max\limits_\Omega \varphi$.*

Доказательство. Максимум из условия леммы существует, поскольку φ — непрерывная функция. Так как $K = \mathrm{conv}(\Omega)$, для любого $y \in K$ существуют натуральное m, точки $y^{(1)}, \ldots, y^{(m)} \in \Omega$ и числа $\mu_1, \ldots, \mu_m$, такие что

$$y = \sum_{i=1}^{m} \mu_i y^{(i)}, \quad \mu_i \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1.$$

Очевидно, $\varphi(y^{(i)}) \leqslant \max\limits_{\Omega} \varphi$. Из выпуклости φ следует

$$\varphi(y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i y^{(i)}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \mu_i \varphi(y^{(i)}) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i\right) \max_{\Omega} \varphi = \max_{\Omega} \varphi.$$

Поэтому $\max\limits_{K} \varphi \leqslant \max\limits_{\Omega} \varphi$. Обратное неравенство тривиально. □

Результат леммы 1 известен. Он сразу получается из следующего максимального принципа Бауэра [30]. *Любая выпуклая непрерывная функция, заданная на выпуклом компактном множестве, достигает максимума в некоторой экстремальной точке этого множества.* Следовательно, максимум φ на $K = \mathrm{conv}(\Omega)$ достигается в экстремальной точке Ω.

Теорема 6. *Пусть Ω — произвольный компакт в $\mathbb{R}^n$ с условием* $\mathrm{vol}(K) > 0$, *где* $K = \mathrm{conv}(\Omega)$. *Тогда*

$$\theta_n(\Omega) \geqslant \chi_n^{-1}\left(\frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{simp_n}(\Omega)}\right). \tag{36}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что для произвольного многочлена $p \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$

$$\|p\|_{\Omega} = \|p\|_K. \tag{37}$$

Это немедленно следует из леммы 1 для выпуклой непрерывной функции $\varphi(x) = |p(x)|$.

Пусть $P : C(\Omega) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — произвольный интерполяционный проектор с узлами в Ω. Будем рассматривать P также как оператор на $C(K)$. Из (37) следует, что $\|P\|_{\Omega} = \|P\|_K$. Значит, $\theta_n(\Omega)$ не меньше, чем $\theta_n(K)$. Применяя неравенство (31) теоремы 5, получаем

$$\theta_n(\Omega) \geqslant \theta_n(K) \geqslant \chi_n^{-1}\left(\frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{simp_n}(K)}\right).$$

Остаётся заметить, что $\mathrm{simp_n}(K) = \mathrm{simp_n}(\Omega)$. Для доказательства рассмотрим любой симплекс $S \subset K$ с некоторой вершиной $x \notin \Omega$. Не изменяя других вершин, мы можем заменить x на вершину $x' \in \Omega$ так, что объём получившегося симплекса не уменьшится. Действительно, этот объём возрастает вместе с $\mathrm{dist}(x; \Gamma)$, где Γ — $(n-1)$-мерная гиперплоскость, содержащая все вершины симплекса, за исключением x. Пусть Γ задаётся уравнением $q(z) = \langle a, z\rangle + a_0 = 0$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $a_0 \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\mathrm{dist}(x; \Gamma) = \frac{|q(x)|}{\|a\|},$$

очевидно, есть выпуклая непрерывная функция. По лемме 1, максимум $\mathrm{dist}(x; \Gamma)$ на K достигается в точке $x' \in \Omega$. Применяя эту процедуру последовательно ко всем вершинам симплекса, не принадлежащим Ω, мы построим новый симплекс с вершинами в Ω без уменьшения первоначального объёма. Таким образом, $\mathrm{simp_n}(K) = \mathrm{simp_n}(\Omega)$. Это завершает доказательство теоремы. □

Объединим неравенство (36) теоремы 6 с правым неравенством (19) теоремы 2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное компактное множество, удовлетворяющее условию $\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(\Omega)) > 0$. Для минимальной нормы интерполяционного проектора с узлами в Ω справедливы оценки

$$\chi_n^{-1}\left(\frac{\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(\Omega))}{\mathrm{simp_n}(\Omega)}\right) \leqslant \theta_n(\Omega) \leqslant n+1. \tag{38}$$

По схеме, изложенной в [12], неравенства (38) переносятся на интерполяцию с помощью многочленов из пространств, более широких, чем $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$. В настоящей статье эта тематика не рассматривается.

6. Заключительные замечания и открытые вопросы

Коротко отметим некоторые результаты о числах $\theta_n(K)$ и $\xi_n(K)$ для $K = Q_n$ и $K = B_n$. В случае, когда K есть n-мерный куб, в этой тематике имеются интересные открытые вопросы. Более детальный обзор даётся в [10].

Несмотря на простоту формулировки, задача нахождения точных значений $\theta_n(Q_n)$ очень трудна. С 2006 г. они известны только для четырёх размерностей n, а именно для $n = 1, 2, 3$ и 7 (см. [12]):

$$\theta_1(Q_1) = 1, \quad \theta_2(Q_2) = \frac{2\sqrt{5}}{5} + 1 = 1.8944\ldots, \quad \theta_3(Q_3) = 2, \quad \theta_7(Q_7) = \frac{5}{2}.$$

Соответствующие числа $\xi(Q_n)$ суть

$$\xi_1(Q_1) = 1, \quad \xi_2(Q_2) = \frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 = 2.3416\ldots, \quad \xi_3(Q_3) = 3, \quad \xi_7(Q_7) = 7.$$

Для $n = 1, 2, 3, 7$ правое соотношение в (9) является равенством:

$$\xi_n(Q_n) = \frac{n+1}{2}\left(\theta_n(Q_n) - 1\right) + 1. \tag{39}$$

Всегда $\xi_n(Q_n) \geqslant n$; если $n+1$ — число Адамара, то $\xi_n(Q_n) = n$ (см. [12, 31, 32]). Благодаря (9) неравенство $\xi_n(Q_n) \geqslant n$ даёт

$$\theta_n(Q_n) \geqslant 3 - \frac{4}{n+1}. \tag{40}$$

Если $n = 1, 3$ или 7, то в (40) выполняется равенство. Для $1 \leqslant n \leqslant 3$ и $n = 7$ симплексы, соответствующие минимальным проекторам, в точности те же, что и симплексы, экстремальные относительно $\xi_n(Q_n)$ (см. [12, 33], а также недавний обзор [11]).

Пусть $n+1$ — число Адамара и S — n-мерный правильный симплекс, вершины которого совпадают с вершинами куба Q_n. Тогда для соответствующего проектора $P_S : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ выполняется

$$\|P_S\|_{Q_n} \leqslant \sqrt{n+1}. \tag{41}$$

Различные доказательства даются в [12]. Статья [34] содержит доказательство (41), существенно использующее структуру матрицы Адамара. Интересно заметить, что равенство $\|P_S\|_{Q_n} = \sqrt{n+1}$ может выполняться как для всех правильных симплексов с вершинами в вершинах куба ($n = 1, n = 3$), так и для части из них ($n = 15$), а может и не выполняться вовсе.

В следствии 1 отмечалось, что для любого n верно $\theta_n(Q_n) \geqslant (1/e)\sqrt{n-1}$. Поэтому, если $n+1$ — число Адамара, то

$$\frac{\sqrt{n-1}}{e} \leqslant \theta_n(Q_n) \leqslant \sqrt{n+1}.$$

Другими словами, верхняя оценка $\theta_n(Q_n) \geqslant c\sqrt{n}$ является точной по n по крайней мере, когда $n+1$ есть число Адамара. Для этих размерностей $\theta_n(Q_n) \asymp \sqrt{n}$.

Верхние оценки чисел $\theta_n(Q_n)$ для конкретных n были улучшены А. Ю. Ухаловым и его учениками с применением компьютерных методов. Для этого, в частности, обсчитывались симплексы максимального объёма в кубе. Во всех ситуациях, когда $n+1$ — число Адамара, осуществлялся перебор всех известных матриц Адамара соответствующего порядка. Например, для получения оценки $\theta_{23}(Q_{23})$ рассматривались все описанные 60 матриц Адамара порядка 24. Для оценивания $\theta_{27}(Q_{27})$ были рассмотрены 487 матриц Адамара порядка 28. Лучшие верхние оценки для $1 \leqslant n \leqslant 27$ приведены в [35]. Вот эти оценки (для краткости мы пишем $\theta_n = \theta_n(Q_n)$):

$$\theta_1 = 1, \quad \theta_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5} + 1, \quad \theta_3 = 2, \quad \theta_4 \leqslant \frac{3(4+\sqrt{2})}{7}, \quad \theta_5 \leqslant 2.448804,$$

$$\theta_6 \leqslant 2.6000\ldots, \quad \theta_7 = \frac{5}{2}, \quad \theta_8 \leqslant \frac{22}{7}, \quad \theta_9 \leqslant 3, \quad \theta_{10} \leqslant \frac{19}{5}, \quad \theta_{11} \leqslant 3,$$

$$\theta_{12} \leqslant \frac{17}{5}, \quad \theta_{13} \leqslant \frac{49}{13}, \quad \theta_{14} \leqslant \frac{21}{5}, \quad \theta_{15} \leqslant \frac{7}{2}, \quad \theta_{16} \leqslant \frac{21}{5}, \quad \theta_{17} \leqslant \frac{139}{34},$$

$$\theta_{18} \leqslant 5.1400\ldots, \quad \theta_{19} \leqslant 4, \quad \theta_{20} \leqslant 4.68879\ldots, \quad \theta_{21} \leqslant \frac{251}{50}, \quad \theta_{22} \leqslant \frac{1817}{335},$$

$$\theta_{23} \leqslant \frac{9}{2}, \quad \theta_{24} \leqslant \frac{103}{21}, \quad \theta_{25} \leqslant 5, \quad \theta_{26} \leqslant \frac{474}{91}, \quad \theta_{27} \leqslant 5.$$

Лучшая известная нижняя оценка чисел $\theta_n(Q_n)$ для всех n имеет вид

$$\theta_n(Q_n) \geqslant \max\left[3 - \frac{4}{n+1}, \ \chi_n^{-1}\left(\frac{1}{\nu_n}\right)\right], \tag{42}$$

где χ_n — стандартизованный многочлен Лежандра степени n. Значения правой части (42) для $1 \leqslant n \leqslant 54$ даются в [35].

Как отмечалось выше (см. (9)), для всех n

$$\xi_n(Q_n) \leqslant \frac{n+1}{2}\left(\theta_n(Q_n) - 1\right) + 1. \tag{43}$$

До сих пор известны только четыре значения n, для которых это соотношение становится равенством: $n = 1, 2, 3$ и 7. Это как раз те случаи, в которых точные значения $\theta_n(Q_n)$ и $\xi_n(Q_n)$ известны одновременно. Вполне возможно, что минимальное n, для которого неравенство (43) является строгим, равно 4, но это остаётся открытой проблемой.

Приведённая выше оценка $\xi_n(Q_n) \geqslant n$ является точной по порядку n. Если $n > 2$, то

$$\xi_n(Q_n) \leqslant \frac{n^2 - 3}{n - 1} \tag{44}$$

(см. [12]). При $n > 1$ правая часть (44) строго меньше $n+1$. Неравенство $\xi_n < n+1$ верно также и для $n = 1, 2$. Поэтому всегда $n \leqslant \xi_n(Q_n) < n+1$, т. е. $\xi_n(Q_n) - n \in [0, 1)$. Вместе с тем точные значения константы $\xi_n(Q_n)$ пока удалось найти лишь для тех n, когда $n+1$ — число Адамара, а также для $n = 2$, $n = 5$ и $n = 9$. Во всех этих случаях, кроме $n = 2$, выполняется равенство $\xi_n(Q_n) = n$. В [32] даётся доказательство, существенно использующее структуру матрицы Адамара порядка $n+1$. Там же найдены точные значения $\xi_n(Q_n)$ для $n = 5$ и $n = 9$, а также построены бесконечные семейства экстремальных симплексов для $n = 5, 7, 9$.

Подчеркнём, что пока $n = 2$ является единственной известной размерностью, когда $\xi_n(Q_n) > n$. Далее, для нечётных $1 \leqslant n \leqslant 11$ верно $\xi_n(Q_n) = n$. Неясно, так ли это для всех нечётных n.

Благодаря эквивалентности $\xi_n(Q_n) \asymp n$ и неравенству $\theta_n \geqslant c\sqrt{n}$, для всех достаточно больших n

$$\xi_n(Q_n) < \frac{n+1}{2}\,(\theta_n(Q_n) - 1) + 1. \tag{45}$$

Обозначим через n_0 минимальное натуральное число, такое что для $n \geqslant n_0$ выполняется (45). Задача о точном значении n_0 также является трудной. Известные нижняя и верхняя границы n_0 различаются весьма значительно. Из предыдущего имеем $n_0 \geqslant 8$. В 2009 г. автор показал, что $n_0 \leqslant 57$ (см. [12, 33]). Достаточным условием для справедливости (45) для $n > 2$ является неравенство

$$\chi_n\left(\frac{3n-5}{n-1}\right) \cdot \nu_n < 1. \tag{46}$$

В [33] установлено, что (46) выполняется при $n \leqslant 57$. Более поздние вычисления позволили несколько понизить верхнюю границу для n_0. Именно, в [36] отмечается, что $n_0 \leqslant 53$. Таким образом, сегодня мы знаем, что $8 \leqslant n_0 \leqslant 53$. Уточнение интервала для n_0 — актуальная задача.

Перейдём теперь к шару B_n. По сравнению с кубом Q_n здесь наблюдается разительный контраст, поскольку *значения $\theta_n(B_n)$ и $\xi_n(B_n)$ найдены точно для любого n.*

В [37] показано, что $\xi_n(B_n) = n$. Более того, для симплекса $S \subset B_n$ равенство $\xi(B_n; S) = n$ эквивалентно тому, что S — правильный симплекс, вписанный в шар. Из (8) следует, что для любого интерполяционного проектора $P : C(B_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$

$$\|P\|_{B_n} \geqslant 3 - \frac{4}{n+1}. \tag{47}$$

Правое равенство в (9), т. е. равенство

$$\xi_n(B_n) = \frac{n+1}{2}\Big(\theta_n(B_n) - 1\Big) + 1, \tag{48}$$

равносильно

$$\theta_n(B_n) = 3 - \frac{4}{n+1}. \tag{49}$$

Как показано в [38], равенства (48) и (49) имеют место при $1 \leqslant n \leqslant 4$, а начиная с $n = 5$ выполняется строгое неравенство

$$\xi_n(B_n) < \frac{n+1}{2}\Big(\theta_n(B_n) - 1\Big) + 1.$$

Для $1 \leqslant n \leqslant 4$ равенство в (47) верно только если S_P — правильный вписанный симплекс.

То, что нижняя оценка $\theta_n(B_n) > c\sqrt{n}$, отмеченная в следствии 2, точна по размерности n, было впервые установлено в [38]: *имеет место эквивалентность $\theta_n(B_n) \asymp \sqrt{n}$.*

Полное решение задачи о точном значении $\theta_n(B_n)$ дано в [29]. Опишем эти результаты. Пусть функция $\psi : [0, n+1] \to \mathbb{R}$ задаётся равенством

$$\psi(t) = \frac{2\sqrt{n}}{n+1}\Big(t(n+1-t)\Big)^{1/2} + \left|1 - \frac{2t}{n+1}\right|.$$

Обозначим

$$a = a_n = \left\lfloor \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} \right\rfloor.$$

Пусть S — правильный симплекс, вписанный в B_n, p_n — $C(B_n)$-операторная норма проектора P_S. В [38] доказано, что $p_n = \max\{\psi(a), \psi(a+1)\}$ и справедливы неравенства $\sqrt{n} \leqslant p_n \leqslant \sqrt{n+1}$. Более того, $p_n = \sqrt{n}$ только для $n = 1$ и $p_n = \sqrt{n+1}$ тогда и только тогда, когда $\sqrt{n+1}$ — целое число.

Равенство $\theta_n(B_n) = p_n$ было получено сначала для $1 \leqslant n \leqslant 4$ (различные доказательства даются в [38] и [39]). В качестве гипотезы для всех n это утверждение было сформулировано в [39]. Наконец, в [29] был применён новый геометрический подход, который позволил доказать эту гипотезу, т. е. равенство $\theta_n(B_n) = p_n$, для произвольного n. В частности, имеем $\sqrt{n} \leqslant \theta_n(B_n) \leqslant \sqrt{n+1}$. Минимальным является проектор, соответствующий правильному симплексу, вписанному в граничную сферу, и других минимальных проекторов не существует.

Пусть k_n совпадает с тем из чисел a_n и $a_n + 1$, на котором $\psi(t)$ принимает большее значение. Числа k_n растут с n, но не строго монотонно. Если $n \geqslant 2$, то $k_n \leqslant n/2$. В качестве примера приведём числа k_n для $1 \leqslant n \leqslant 15$, $n = 50$, $n = 100$ и $n = 1000$ ([38]):

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1, \quad k_5 = k_6 = 2, \quad k_7 = k_8 = k_9 = 3, \quad k_{10} = k_{11} = 4,$$

$$k_{12} = k_{13} = 5, \quad k_{14} = k_{15} = 6, \quad k_{50} = 22, \quad k_{100} = 45, \quad k_{1000} = 485.$$

Отметим, что равенство (48) выполняется для тех и только тех размерностей n, когда $k_n = 1$.

Благодарности

Автор выражает благодарность П. А. Шварцману за полезные замечания и предложения.

References

[1] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*. Springer-Verlag: Berlin – Heidelberg, 1993.

[2] V. Barthelmann, E. Novak, and K. Ritter, "High dimensional polynomial interpolation on sparse grids", *Advances in Computational Mathematics*, vol. 12, no. 4, pp. 273–288, 2000. DOI: 10.1023/A:1018977404843.

[3] C. De Boor, "Polynomial interpolation in several variables", in *Studies in Computer Science*, Plenum Press, 1994, pp. 87–119.

[4] S. De Marchi, *Lectures on Multivariate Polynomial Interpolation*. Göttingen – Padova, 2015.

[5] M. Gasca and R. Sauer, "Polynomial interpolation in several variables", *Advances in Computational Mathematics*, vol. 12, no. 4, pp. 377–410, 2000. DOI: 10.1023/A:1018981505752.

[6] M. Gunzburger and A. Teckentrup, *Optimal point sets for total degree polynomial interpolation in moderate dimensions*, 2014. arXiv: 1407.3291 [math.NA]. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/1407.3291.

[7] V. Kaarnioja, *On applying the maximum volume principle to a basis selection problem in multivariate polynomial interpolation*, 2017. arXiv: 1512.07424 [math.NA]. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/1512.07424.

[8] S. Pashkovskij, *Vychislitel'nye Primeneniya Mnogochlenov i Ryadov Chebysheva*. Nauka, 1983, in Russian.

[9] T. J. Rivlin, *The Chebyshev Polynomials*. John Wiley & Sons, 1974.

[10] M. Nevskii, *Optimal lagrange interpolation projectors and legendre polynomials*, 2024. arXiv: 2405.01254 [math.MG]. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2405.01254.

[11] M. Nevskii, *Geometric estimates in linear interpolation on a cube and a ball*, 2024. arXiv: 2402.11611 [math.CA]. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2402.11611.

[12] M. V. Nevskii, *Geometricheskie Ocenki v Polinomial'noj Interpolyacii*. P. G. Demidov Yaroslavl State University, 2012, 218 pp., in Russian.

[13] M. V. Nevskii, “Inequalities for the norms of interpolation projectors”, *Modeling and Analysis of Information Systems.*, vol. 15, no. 3, pp. 28–37, 2008, in Russian.

[14] M. Hall Jr., *Combinatorial Theory*. Blaisdall Publishing Company, 1967.

[15] K. J. Horadam, *Hadamard Matrices and Their Applications*. Princeton University Press, 2007.

[16] P. K. Manjhi and M. K. Rama, “Some new examples of circulant partial Hadamard matrices of type $4-H(k\times n)$”, *Advances and Applications in Mathematical Sciences*, vol. 21, no. 5, pp. 2559–2564, 2022.

[17] M. Hudelson, V. Klee, and D. Larman, “Largest j-simplices in d-cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem”, *Linear Algebra and its Applications*, vol. 241–243, pp. 519–598, 1996.

[18] J. Hadamard, “Résolution d’une question relative aux déterminants”, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, vol. 2, pp. 240–246, 1893.

[19] G. F. Clements and B. Lindström, “A sequence of (± 1) determinants with large values”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 16, no. 3, pp. 548–550, 1965.

[20] G. M. Fikhtengol’ts, *Kurs Differencial’nogo i Integral’nogo Ischisleniya. Tom 3*. Moskva: Fizmatlit, 2001, in Russian.

[21] L. Fejes Tót, *Regular Figures*. New York: Macmillan/Pergamon, 1964.

[22] D. Slepian, “The content of some extreme simplices”, *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 31, pp. 795–808, 1969.

[23] D. Vandev, “A minimal volume ellipsoid around a simplex”, *Proceedings of the Bulgarian Academy of Sciences*, vol. 45, no. 6, pp. 37–40, 1992.

[24] M. Lassak, “Approximation of convex bodies by inscribed simplices of maximum volume”, *Beiträge zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry*, vol. 52, pp. 389–394, 2011. DOI: 10.1007/s13366-011-0026-x.

[25] P. K. Suetin, *Klassicheskie ortogonal’nye mnogochleny*. Nauka, 1979, in Russian.

[26] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society: Providence, 1975.

[27] A. P. Prudnikov, Y. A. Brychkov, and O. I. Marichev, *Integraly i Ryady*. Nauka, 2002, in Russian.

[28] M. V. Nevskii, “Geometric estimates in interpolation on an n-dimensional ball”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 26, no. 3, pp. 441–449, 2019, in Russian. DOI: 10.18255/1818-1015-2019-3-441-449.

[29] M. V. Nevskii, “On the minimal norm of the projection operator for linear interpolation on an n-dimensional ball”, *Matematicheskie Zametki*, vol. 114, no. 3, pp. 477–480, 2023, in Russian. DOI: 10.4213/mzm14044.

[30] H. Bauer, “Minimalstellen von funktionen und extremal punkte”, *Archiv der Mathematik*, vol. 9, no. 4, pp. 389–393, 1958, in German. DOI: 10.1023/A:1018977404843.

[31] M. Nevskii, “Properties of axial diameters of a simplex”, *Discrete & Computational Geometry*, vol. 46, no. 2, pp. 301–312, 2011. DOI: 10.1007/s00454-011-9355-7.

[32] M. Nevskii and A. Ukhalov, “Perfect simplices in $\mathbb{R}^5$”, *Beiträge zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry*, vol. 59, no. 3, pp. 501–521, 2018. DOI: 10.1007/s13366-018-0386-6.

[33] M. V. Nevskii, “On a certain relation for the minimal norm of an interpolation projector”, *Modeling and Analysis of Information Systems.*, vol. 16, no. 1, pp. 24–43, 2009, in Russian.

[34] M. V. Nevskii, "On some estimate for the norm of an interpolation projector", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 29, no. 2, pp. 92–103, 2022, in Russian. DOI: 10.18255/1818-1015-2022-2-92-103.

[35] M. V. Nevskii and A. Y. Ukhalov, *Izbrannye Zadachi Analiza i Vychislitel'noj Geometrii. Chast' 2.* P. G. Demidov Yaroslavl State University, 2022, in Russian.

[36] M. V. Nevskii and A. Y. Ukhalov, "On optimal interpolation by linear functions on an n-dimensional cube", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 25, no. 3, pp. 291–311, 2018, in Russian. DOI: 10.18255/1818-1015-2018-3-291-311.

[37] M. V. Nevskii, "On some problems for a simplex and a ball in $\mathbb{R}^n$", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 25, no. 6, pp. 680–691, 2018, in Russian. DOI: 10.18255/1818-1015-2018-6-680-691.

[38] M. V. Nevskii and A. Y. Ukhalov, "Linear interpolation on a Euclidean ball in $\mathbb{R}^n$", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 26, no. 2, pp. 279–296, 2019, in Russian. DOI: 10.18255/1818-1015-2019-2-279-296.

[39] M. V. Nevskii, "On properties of a regular simplex inscribed into a ball", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 28, no. 2, pp. 186–197, 2021, in Russian. DOI: 10.18255/1818-1015-2021-2-186-197.