

Some Polynomial Subclasses of the Eulerian Walk Problem for a Multiple Graph

A. V. Smirnov¹DOI: [10.18255/1818-1015-2024-3-338-356](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2024-3-338-356)¹P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

MSC2020: 05C45, 05C65, 05C85

Research article

Full text in Russian

Received August 3, 2024

Revised August 16, 2024

Accepted August 21, 2024

In this paper, we study undirected multiple graphs of any natural multiplicity $k > 1$. There are edges of three types: ordinary edges, multiple edges and multi-edges. Each edge of the last two types is a union of k linked edges, which connect 2 or $(k + 1)$ vertices, correspondingly. The linked edges should be used simultaneously. If a vertex is incident to a multiple edge, it can be also incident to other multiple edges and it can be the common end of k linked edges of some multi-edge. If a vertex is the common end of some multi-edge, it cannot be the common end of another multi-edge.

We study the problem of finding the Eulerian walk (the cycle or the trail) in a multiple graph, which generalizes the classical problem for an ordinary graph. The multiple Eulerian walk problem is NP-hard. We prove the polynomiality of two subclasses of the multiple Eulerian walk problem and elaborate the polynomial algorithms. In the first subclass, we set a constraint on the ordinary edges reachability sets, which are the subsets of vertices joined by ordinary edges only. In the second subclass, we set a constraint on the quasi-vertices degrees in the graph with quasi-vertices. The structure of this ordinary graph reflects the structure of the multiple graph, and each quasi-vertex is determined by k indices of the ordinary edges reachability sets, which are incident to some multi-edge.

Keywords: multiple graph; divisible graph; covering trails; edge-disjoint paths; eulerian trail; eulerian cycle; graph with quasi-vertices; ordinary edges reachability set; polynomial subclass

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Smirnov, Alexander V. (corresponding author)	ORCID iD: 0000-0002-0980-2507 . E-mail: alexander-sm@mail.ru PhD, Associate Professor
---	--

Funding: Yaroslavl State University (project VIP-016).

For citation: A. V. Smirnov, "Some polynomial subclasses of the Eulerian walk problem for a multiple graph", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 31, no. 3, pp. 338–356, 2024. DOI: [10.18255/1818-1015-2024-3-338-356](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2024-3-338-356).

Некоторые полиномиальные подклассы задачи об эйлеровом маршруте в кратном графе

А. В. Смирнов¹

DOI: [10.18255/1818-1015-2024-3-338-356](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2024-3-338-356)

¹Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

УДК 519.17+519.161

Научная статья

Полный текст на русском языке

Получена 3 августа 2024 г.

После доработки 16 августа 2024 г.

Принята к публикации 21 августа 2024 г.

В статье рассматриваются неориентированные кратные графы произвольной натуральной кратности $k > 1$. Кратный граф содержит ребра трех типов: обычные, кратные и мультиребра. Ребра последних двух типов представляют собой объединение k связанных ребер, которые соединяют 2 или $(k + 1)$ вершину соответственно. Связанные ребра могут использоваться только согласованно. Если вершина инцидентна кратному ребру, то она может быть инцидентна другим кратным ребрам, а также она может быть общим концом k связанных ребер мультиребра. Если вершина является общим концом мультиребра, то она не может быть общим концом никакого другого мультиребра.

Рассматривается задача об эйлеровом маршруте (цикле или цепи) в кратном графе, которая обобщает классическую задачу для обычного графа. Задача о кратном эйлеровом маршруте является NP-трудной. Обоснована полиномиальность двух подклассов задачи о кратном эйлеровом маршруте, разработаны полиномиальные алгоритмы. В первом подклассе задано ограничение на множества достижимости по обычным ребрам, которые представляют собой подмножества вершин, соединенных только обычными ребрами. Во втором подклассе задано ограничение на степень квазивершин в графе с квазивершинами. Структура этого обычного графа отражает структуру кратного графа, а каждая квазивершина определяется k индексами множеств достижимости по обычным ребрам, которые инцидентны какому-то мультиребру.

Ключевые слова: кратный граф; делимый граф; покрывающие цепи; пути, не пересекающиеся по ребрам; эйлерова цепь; эйлеров цикл; граф с квазивершинами; множество достижимости по обычным ребрам; полиномиальный подкласс

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Смирнов, Александр Валерьевич
(автор для корреспонденции)

ORCID iD: [0000-0002-0980-2507](https://orcid.org/0000-0002-0980-2507). E-mail: alexander_sm@mail.ru
Канд. физ.-мат. наук, доцент

Финансирование: ЯрГУ (проект VIP-016).

Для цитирования: A. V. Smirnov, "Some polynomial subclasses of the Eulerian walk problem for a multiple graph", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 31, no. 3, pp. 338–356, 2024. DOI: [10.18255/1818-1015-2024-3-338-356](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2024-3-338-356).

Введение

В данной статье мы рассмотрим задачу об *эйлеровом маршруте* (цикле или цепи) в кратном графе. Кратные графы содержат три типа ребер (обычные, кратные и мультиребра) и являются обобщением обычных графов — по сути, обычный граф имеет кратность $k = 1$. Определения кратного графа кратности $k > 1$ и делимого кратного графа были сформулированы в статье [1]. Там же были введены понятия кратного пути и кратного цикла.

Отметим, что частным случаем кратного графа является кратная сеть (см. [2, 3]). Задача о наибольшем потоке в кратной сети обобщает классическую задачу (см. [4]) и имеет ряд приложений в сфере экономики, управления, финансов. В частности, кратные сети и потоки используются для поиска решения NP-трудной задачи целочисленного сбалансирования трех- и четырехмерной матрицы (см., например, [5, 6]).

В статье [7] была поставлена задача об эйлеровом маршруте (цепи или цикле) в неориентированном кратном графе. Главное отличие от эйлерова маршрута в обычном графе — необходимость согласования кратного эйлерова маршрута на связанных ребрах, что означает, что в таком маршруте связанные ребра каждого кратного и мультиребра могут проходиться только одновременно и только в одинаковом направлении. Рассмотрены необходимые условия существования эйлерова маршрута в кратном графе, которые, однако, не будут достаточными из-за того, что при их выполнении не всегда возможно обеспечить согласованность всех связанных ребер в маршруте. Предложен экспоненциальный алгоритм решения задачи о кратном эйлеровом маршруте, выделен один полиномиальный подкласс задачи.

Задача об эйлеровом маршруте в классической постановке для обычного графа полиномиальна; для нее существуют быстрые полиномиальные алгоритмы, например, описанный в работе [8] алгоритм Хиргольцера. Однако при переходе к обобщению обычного графа либо к варианту постановки с введением дополнительных ограничений задача зачастую становится NP-трудной.

Так происходит, например, в случае одного из наиболее популярных обобщений графов — гиперграфов. Напомним, что гиперграф содержит гиперребра, соединяющие k вершин (см. [9]). Понятие гиперребра, таким образом, в какой-то мере родственно понятию мультиребра в кратном графе, исследуемом в данной статье. Однако есть и существенное отличие двух концепций: все вершины гиперребра «равноправны», в то время как мультиребро определяется как множество из k связанных ребер, соединяющих одну вершину — общий конец с k отдельными вершинами. В работе [10] показано, что задача распознавания эйлерова маршрута в гиперграфе NP-полна даже в случае k -однородного гиперграфа ($k > 2$), в котором все ребра соединяют ровно k вершин.

В статье [11] для темпоральных графов рассмотрены различные варианты задачи об эйлеровом маршруте, среди них выделены полиномиальные и NP-полные. В темпоральном графе каждое ребро e доступно лишь в моменты времени, определяемые функцией $\lambda(e) \in 2^\tau$ ($\tau \geq 2$ — это общее время жизни графа), соответственно, любой маршрут должен учитывать это обстоятельство. Отметим, что NP-полной будет задача в постановке, наиболее близкой к классической, когда требуется найти цепь, проходящую каждое ребро темпорального графа ровно один раз. Это справедливо в том числе для $\tau = 2$.

В работе [12] рассмотрена классическая задача об эйлеровом цикле с дополнительным ограничением: граф изображен на плоскости и для каждой вершины все ребра, инцидентные ей, пронумерованы по часовой стрелке; при этом любые два ребра, идущие подряд в эйлеровом цикле, должны иметь соседние номера относительно общей вершины. В указанной статье доказано, что задача распознавания такого эйлерова цикла будет NP-полной даже в случае планарного графа.

Еще один пример классической задачи с дополнительным ограничением — это распознавание эйлерова цикла, в котором каждый подцикл имеет длину не меньше k . В статье [13] обоснована NP-полнота сужения этой задачи, откуда следует NP-полнота общей задачи.

Точно так же задача об эйлеровом маршруте становится труднорешаемой и в случае кратных графов. NP-полнота соответствующей задачи распознавания доказана в [14]. При этом задача будет NP-полной для любой кратности $k \geq 2$ даже для специального класса кратных графов — делимых графов. Этот класс характеризуется тем, что кратный граф может быть представлен в виде объединения k обычных графов, каждый из которых содержит ровно одно связанное ребро каждого кратного и мультиребра.

В данной статье мы выделим два полиномиальных подкласса задачи об эйлеровом маршруте в кратном графе и получим полиномиальные алгоритмы для них.

1. Необходимые определения и постановка задачи об эйлеровом маршруте в кратном графе

Напомним несколько понятий, связанных с кратными графами. Поскольку данная статья продолжает исследование, описанное в работах [7, 14], здесь будут сформулированы только самые важные определения. Поясняющие примеры и ряд связанных определений были подробно рассмотрены в статьях [1, 7].

Определение 1. *Кратный граф* G произвольной натуральной кратности $k > 1$ — это граф, вершины которого могут соединяться ребрами одного из 3 видов:

1. *Обычное ребро* e^o ; множество обычных ребер обозначим через E^o .
2. *Кратное ребро* e^k между двумя вершинами, которое состоит из k одинаковых связанных ребер; связанные ребра кратного ребра могут использоваться только согласованно; множество кратных ребер обозначим через E^k .
3. *Связанное ребро* e между двумя вершинами, имеющее один общий конец с другим $(k - 1)$ ребром (у любых двух из k связанных ребер только один конец является общим); множество связанных общей вершиной ребер будем называть *мультиребром* e^m ; связанные ребра мультиребра могут использоваться только согласованно; множество мультиребер обозначим через E^m .

Если вершина инцидентна какому-либо кратному ребру, то она может быть инцидентна другим кратным ребрам, а также она может быть общим концом какого-либо мультиребра.

Если вершина является общим концом какого-либо мультиребра, то она не может быть общим концом никакого другого мультиребра.

Если вершина является отдельным концом мультиребра или инцидентна обычному ребру, то она не может быть общим концом мультиребра и не может быть инцидентна кратному ребру.

Множества вершин и ребер графа G обозначим через V и E соответственно. Заметим, что $E = E^o \cup E^k \cup E^m$. Обычное или кратное ребро, соединяющее две вершины x и y , обозначается стандартным образом: $\{x, y\}$. Мультиребро, соединяющее общую вершину x с k отдельными вершинами $y_1, \dots, y_k$, обозначается так: $e_x^m = \{x, \{y_1, \dots, y_k\}\}$.

Рис. 1 и 2 иллюстрируют определение 1. В левой части рис. 1 кратное ребро представлено в виде объединения k одинаковых ребер между двумя вершинами, что показано штрихами. Равенство (или согласованность) связанных ребер предполагает, что все характеристики этих ребер (например, длина) одинаковы, и эти ребра могут использоваться только одновременно. Так, если осуществляется проход в определенном направлении по одному из связанных ребер, то одновременно с этим все остальные ребра проходятся в том же самом направлении. Кратное ребро может включаться в какие-либо новые структуры только целиком. В дальнейшем мы будем обозначать кратные ребра жирными линиями, как в правой части рис. 1.

В левой части рис. 2 мультиребро $\{x_0, \{x_1, \dots, x_k\}\}$ представлено в виде объединения k одинаковых ребер, связывающих общую вершину x_0 с k разными вершинами $x_1, \dots, x_k$. Как и на рис. 1, равенство ребер показано штрихами. Согласованность связанных ребер имеет тот же смысл,

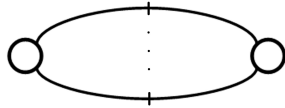


Fig. 1. Multiple edge



Рис. 1. Кратное ребро

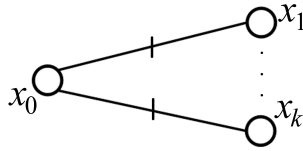


Fig. 2. Multi-edge

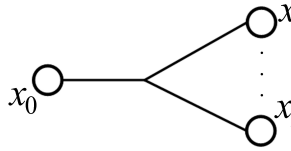


Рис. 2. Мультиребро

что и для кратных ребер. В дальнейшем мультиребра мы будем изображать при помощи расщепляющихся на k частей линий, как в правой части рис. 2.

В данной статье рассматриваются только неориентированные кратные графы.

Определение 2. *Обычной вершиной* назовем вершину, которая инцидентна обычному ребру или является отдельным концом мультиребра.

Кратной вершиной назовем вершину, которая инцидентна кратному ребру или является общим концом мультиребра.

Из определения 1 следует, что множества обычных и кратных вершин не пересекаются. При этом кратная вершина может быть соединена с обычными только посредством мультиребра.

Определение 3. Для любой вершины $x \in V$ определена ее *степень* $\deg x$ — количество обычных или связанных ребер инцидентных x .

Таким образом, каждое обычное ребро вида $\{x, y\}$ добавляет 1 к $\deg x$, каждое кратное ребро вида $\{x, y\}$ добавляет k к $\deg x$, а каждое мультиребро вида $\{x, \{y_1, \dots, y_k\}\}$ добавляет k к $\deg x$ и 1 к каждому из $\deg y_i$. Очевидно, что степень любой кратной вершины будет кратна k .

Определение 4. *Делимым кратным графом* назовем такой граф, в котором между двумя концами одного мультиребра не существует пути, проходящего только по обычным ребрам.

При удалении всех мультиребер делимый граф распадется на n компонент связности (связность здесь понимается в том же смысле, что и для обычных графов), каждая из которых содержит только кратные ребра либо только обычные ребра. При этом связанные ребра каждого мультиребра можно пронумеровать от 1 до k таким образом, что каждой компоненте связности, содержащей только обычные ребра, будут инцидентны связанные ребра мультиребер с одинаковыми номерами.

Определение 5. *Частью* G_i ($i \in \overline{1, k}$) делимого графа $G(V, E)$ назовем подграф, содержащий связанные ребра с номером i всех кратных и мультиребер, а также компоненты связности, состоящие из обычных ребер и инцидентные i -ым связанным ребрам всех мультиребер.

В статье [1] вводится понятие *кратного пути из вершины x в вершину y* . В данной работе нам не потребуется получать кратные пути, поэтому не будем приводить определение полностью, напомним лишь основные особенности кратного пути:

- кратный путь представляет собой объединение k обычных (некратных) путей, где связанные ребра кратных и мультиребер используются согласованно: в каждом из обычных путей встречается ровно одно связанное ребро используемого кратного или мультиребра, причем порядок вхождения связанных ребер разных кратных и мультиребер одинаков во всех k путях;

- обычные вершины и ребра могут встречаться многократно;
- каждая кратная вершина встречается не более одного раза.

В отличие от обычных графов, *связность* кратного графа не предполагает наличие кратных путей из каждой вершины в каждую. Фактически в связном кратном графе между каждой парой вершин должен существовать обычный (некратный) путь, использующий связанные ребра кратных и мультиребер несогласованно, а кратные пути обязательно должны существовать только для пар кратных вершин. Критерий связности кратного графа и полиномиальный алгоритм его проверки подробно рассматривались в работе [1].

Эйлеров маршрут отличается от кратного пути тем, что кратные вершины можно использовать повторно, но каждое ребро используется только один раз. Эйлеров маршрут может быть найден только в связном кратном графе, поэтому далее по умолчанию предполагается связность рассматриваемого графа.

Определение 6. *Эйлеровым маршрутом* h в кратном графе $G(V, E)$ назовем такой обход графа $G(V, E)$, в котором каждое ребро из E встречается ровно один раз, а связанные ребра каждого кратного и мультиребра из $E^k \cup E^m$ используются только согласованно (одновременно).

Для эйлерова маршрута выполнено: $h = \bigcup_{i=1}^k h^i$, то есть каждый эйлеров маршрут h в кратном графе представляет собой объединение k обычных маршрутов h^i ($i \in \overline{1, k}$), в каждом из которых присутствует ровно одно связанное ребро каждого кратного и мультиребра, причем порядок обхода связанных ребер одинаков во всех h^i .

Фактически это значит, что если e_1 и e_2 — это два ребра маршрута h , каждое из которых либо кратное, либо мультиребро, и в проекции h^i связанное ребро из e_1 проходится раньше связанного ребра из e_2 , то во всех остальных проекциях h^j связанные ребра из e_2 могут проходить только после связанных ребер из e_1 .

Определение 7. Замкнутый эйлеров маршрут в кратном графе (начальная вершина равна конечной) называется *эйлеровым циклом*.

Незамкнутый эйлеров маршрут в кратном графе называется *эйлеровой цепью*.

Кратный граф назовем *эйлеровым*, если в нем существует эйлеров маршрут (цикл или цепь).

Пример 1. Рассмотрим представленный на рис. 3 кратный граф G кратности 2 со следующими множествами обычных, кратных и мультиребер (вершины будем обозначать их номерами):

$$E^k = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{15, 16\}\};$$

$$E^m = \{\{3, \{5, 13\}\}, \{4, \{8, 10\}\}, \{15, \{6, 14\}\}, \{16, \{9, 11\}\}\};$$

$$E^o = \{\{5, 6\}, \{5, 7\}, \{5, 8\}, \{6, 7\}, \{6, 9\}, \{7, 8\}, \{7, 9\}, \{8, 9\}, \{10, 11\},$$

$$\{10, 12\}, \{10, 13\}, \{11, 12\}, \{11, 14\}, \{12, 13\}, \{12, 14\}, \{13, 14\}\}.$$

Граф G является делимым. Части G_1 и G_2 этого графа показаны на рис. 4, связанные ребра всех кратных и мультиребер изображены пунктирными линиями.

Заметим, что граф перестанет быть делимым, если добавить в него обычное ребро между любой парой вершин из множеств $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ и $\{10, 11, 12, 13, 14\}$.

Нетрудно убедиться, что в этом графе существует эйлеров цикл h , представленный на рис. 5.

Следует отметить, что в эйлеровом цикле h две кратные вершины 3 и 4 проходятся дважды (на рисунке отмечены серым), поэтому цикл h является эйлеровым маршрутом, но не является кратным циклом.

Задача 1 (эйлеров маршрут в кратном графе). Для данного кратного графа $G(V, E)$ установить, существует ли в нем эйлеров маршрут (цикл или цепь), и найти этот маршрут.

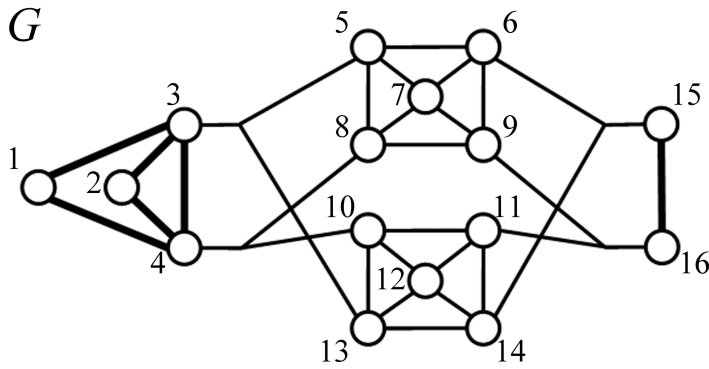


Fig. 3. Divisible graph of multiplicity 2

Рис. 3. Делимый граф кратности 2

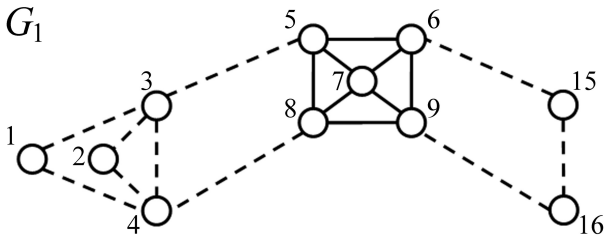


Fig. 4. Partition of the divisible graph

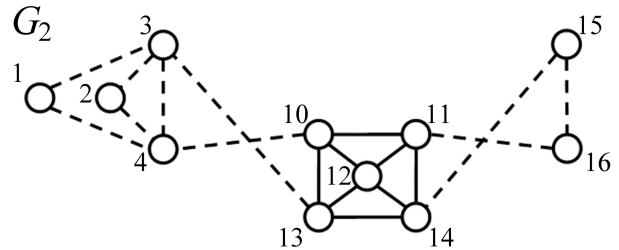


Рис. 4. Части делимого графа

В дальнейшем мы будем обозначать задачу 1 как MEW (multiple eulerian walk).

Определение 8. Множеством достижимости по обычным ребрам для некоторой обычной вершины x назовем множество R_x^o всех вершин y таких, что существует путь из x в y , проходящий только по обычным ребрам.

Будем обозначать через G_x^o подграф, образованный всеми вершинами из R_x^o и всеми обычными ребрами $e \in E^o$, которые соединяют вершины из R_x^o .

Если $y \in R_x^o$, то $R_y^o = R_x^o$, поэтому для удобства будем выбирать вершину с минимальным номером для задания индекса x каждого R_x^o .

Напомним необходимые условия существования кратного эйлера цикла. Условия подробно рассматривались и обосновывались в статье [7], там же показано, что в общем случае необходимые условия не являются достаточными, что также отличает задачу для кратного графа от классической.

Теорема 1. Если в кратном графе $G(V, E)$ существует эйлеров цикл, то все его обычные вершины имеют четную степень, а степень каждой кратной вершины v может быть представлена как $\deg v = k \cdot a_v$, где k — это кратность графа, a_v — четное число.

Теорема 2. Если в делимом кратном графе $G(V, E)$ существует эйлерова цепь, то одновременно выполнены следующие условия:

- все обычные вершины имеют четную степень;
- степень двух кратных вершин x, y представляется в виде $\deg x = k \cdot a$, $\deg y = k \cdot b$, где k — это кратность графа, a и b — нечетные числа;
- степень всех остальных кратных вершин v представляется в виде $\deg v = k \cdot c_v$, где k — это кратность графа, c_v — четное число.

Теорема 3. Если в неделимом кратном графе $G(V, E)$ существует эйлерова цепь, то найдутся две вершины x, y , для которых выполняется одно из условий:

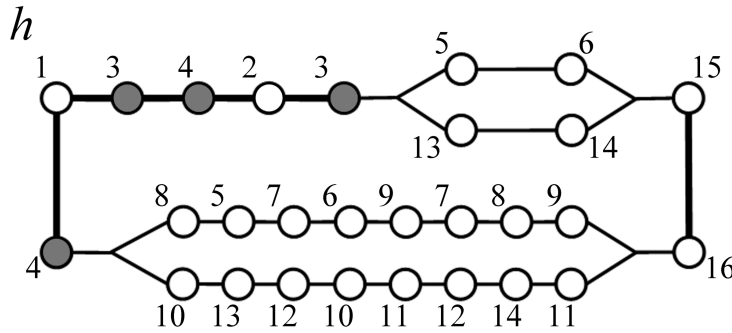


Fig. 5. Eulerian cycle in the multiple graph

Рис. 5. Эйлеров цикл в кратном графе

1. x, y — кратные вершины; $\deg x = k \cdot a$, $\deg y = k \cdot b$, где k — это кратность графа, а a и b — нечетные числа.
2. x — кратная вершина, y — обычная вершина и найдется мультиребро $\{y_0, \{y_1, \dots, y_k\}\} \in E^m$ такое, что $y_i \in R_y^0$ ($i \in \overline{1, k}$); $\deg x = k \cdot a$, $\deg y = k + b$, где k — это кратность графа, a — нечетное число, b — четное неотрицательное число.
3. x, y — обычные вершины и найдутся два мультиребра $\{x_0, \{x_1, \dots, x_k\}\}, \{y_0, \{y_1, \dots, y_k\}\} \in E^m$ такие, что $x_i \in R_x^0$, $y_i \in R_y^0$ ($i \in \overline{1, k}$); $\deg x = k + a$, $\deg y = k + b$, где k — это кратность графа, а a и b — четные неотрицательные числа.

Степень всех остальных обычных вершин четна, а степень всех остальных кратных вершин v представляется в виде $\deg v = k \cdot c_v$, где k — это кратность графа, c_v — четное число.

Условия 1–3 теоремы 3 определяют выбор начальной и конечной вершины кратной эйлеровой цепи (вершины x и y) в случае, когда граф не является делимым.

2. Граф с квазивершинами и задача о покрывающих цепях

В статье [7] показано, что кратный граф $G(V, E)$ можно свести к обычному графу $G_{ord}(V_{ord}, E_{ord})$, структура которого будет отражать структуру исходного графа. Часть вершин будут соответствовать множествам подграфов G_x^0 . Такие вершины называются *квазивершинами*, а граф G_{ord} — *графом с квазивершинами*. Преобразование выполняется с помощью простого полиномиального алгоритма, который трансформирует все кратные вершины и ребра в обычные, а затем создает квазивершины и ребра инцидентные им. Для каждого мультиребра $e^m = \{x_0, \{x_1, \dots, x_k\}\} \in E^m$ находятся множества достижимости $R_{y_i}^0$ такие, что $x_i \in R_{y_i}^0$ ($i \in \overline{1, k}$). Номера этих множеств достижимости определяют квазивершину $q_{y_1, \dots, y_k} \in V_{ord}$, а мультиребро e^m определяет обычное ребро $\{x_0, q_{y_1, \dots, y_k}\} \in E_{ord}$.

Из необходимых условий существования кратного эйлерова цикла следует, что если кратный граф $G(V, E)$ является эйлеровым, то эйлеровым является и граф с квазивершинами $G_{ord}(V_{ord}, E_{ord})$, причем каждому эйлерову маршруту в исходном кратном графе соответствует эйлеров маршрут в графе с квазивершинами. Обратное в общем случае неверно: граф с квазивершинами может быть эйлеровым, тогда как исходный граф не эйлеров; также в графе $G_{ord}(V_{ord}, E_{ord})$ может существовать эйлеров цикл или цепь, которым не соответствует эйлеров цикл или цепь в графе $G(V, E)$.

Пример 2. Снова рассмотрим кратный граф из примера 1 (рис. 3). Нетрудно заметить, что в этом графе всего два множества достижимости по обычным ребрам:

$$R_5^0 = \{5, 6, 7, 8, 9\}, \quad R_{10}^0 = \{10, 11, 12, 13, 14\}.$$

При этом все мультиребра имеют ровно по одному концу в каждом из R_5^0 и R_{10}^0 , следовательно, потребуется создать только одну квазивершину $q_{5,10}$, а граф $G_{ord}(V_{ord}, E_{ord})$ будет иметь простую структуру (см. рис. 6). Квазивершина отмечена на рисунке серым.

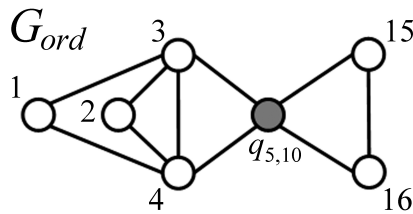


Fig. 6. Graph with a quasi-vertex

Рис. 6. Граф с квазивершиной

Кратному эйлерову циклу, представленному на рис. 5, будет соответствовать обычный эйлеров цикл $h_{ord} = (1, 3, 4, 2, 3, q_{5,10}, 15, 16, q_{5,10}, 4, 1)$ в графе G_{ord} .

Определение 9. *Покрывающими цепями* в обычном графе $G^o(V^o, E^o)$ называется множество цепей, не пересекающихся по ребрам и не содержащих повторяющихся ребер; при этом множество покрывающих цепей содержит все ребра графа.

Задача 2 (покрывающие цепи с заданными концами в обычном графе). *Дан обычный связный граф $G^o(V^o, E^o)$, в котором выделено p начальных вершин $s_1, \dots, s_p$ и p конечных вершин $t_1, \dots, t_p$. Требуется установить, существуют ли в графе $G^o(V^o, E^o)$ p покрывающих цепей $\mu_1(s_1, t_1), \dots, \mu_p(s_p, t_p)$, и найти эти цепи.*

Задачу 2 обозначим через СТ (covering trails). Начальные и конечные вершины будем также называть *терминальными*.

В статье [7] показано, что каждый эйлеров маршрут в графе с квазивершинами $G_{ord}(V_{ord}, E_{ord})$ определяет задачу СТ в каждом подграфе G_x^o исходного кратного графа $G(V, E)$. Если каждая такая задача СТ имеет решение, то эти решения в объединении с найденным эйлеровым маршрутом в графе $G_{ord}(V_{ord}, E_{ord})$ порождают кратный эйлеров маршрут в графе $G(V, E)$. В указанной статье предложен точный алгоритм поиска кратного эйлерова маршрута, который последовательно перебирает все возможные эйлеровы маршруты в графе G_{ord} (для этого используется описанная в работе [15] операция *каппа-трансформации*) и пытается решить возникающие при этом задачи СТ для графов G_x^o . Однако и построение всех возможных эйлеровых маршрутов, и решение задач СТ в общем случае требуют экспоненциального количества шагов. Поэтому при поиске полиномиальных подклассов задачи MEW нам нужно выделить случаи, где указанные подзадачи могут быть решены за полиномиальное время.

Напомним также классическую задачу о путях, не пересекающихся по ребрам (см. [16]), которая близка к задаче СТ.

Задача 3 (пути, не пересекающиеся по ребрам). *Дан обычный связный граф $G^o(V^o, E^o)$, в котором выделено p начальных вершин $s_1, \dots, s_p$ и p конечных вершин $t_1, \dots, t_p$. Требуется установить, существуют ли в графе $G^o(V^o, E^o)$ p путей (цепей) $\mu_1(s_1, t_1), \dots, \mu_p(s_p, t_p)$, попарно не пересекающихся по ребрам, и найти эти пути.*

Будем использовать для задачи 3 стандартное обозначение EDP (edge-disjoint paths). В работе [16] доказано, что задача EDP является NP-трудной, если параметр p не фиксирован (является частью входных данных задачи).

Часто наряду с графом $G^o(V^o, E^o)$ рассматривают граф $H^o(V^o, F^o)$, где $F^o = \{\{s_1, t_1\}, \dots, \{s_p, t_p\}\}$. Тогда для графа $G^o \cup H^o$ с множеством вершин V^o и множеством ребер $E^o \cup F^o$ можно рассмотреть следующую задачу, которая будет эквивалентна задаче EDP: *найти в графе $G^o \cup H^o$ множество из $|F^o|$ не пересекающихся по ребрам циклов, каждый из которых содержит ровно одно ребро из F^o .*

Пользуясь свойствами графа $G^o \cup H^o$, можно выделить различные подклассы исходной задачи EDP. В частности, нас будет интересовать случай, когда граф $G^o \cup H^o$ эйлеров.

3. Графы с ограничением на множества достижимости по обычным ребрам

Лемма 1. Пусть для связного обычного графа G^o соответствующий граф $G^o \cup H^o$ является эйлеровым. Тогда задача СТ для него всегда имеет решение при $p = 1$ или $p = 2$, которое может быть найдено за полиномиальное время.

Доказательство. В случае $p = 1$ утверждение очевидно: задача СТ сводится к поиску эйлерова цикла в графе $G^o \cup H^o$, который по условию является эйлеровым. Для этого можно использовать любой из известных полиномиальных алгоритмов, например, алгоритм Хиргольца.

Пусть $p = 2$. Заметим, что если $s_1 = t_1$ или $s_2 = t_2$, задача сводится к случаю $p = 1$. Поэтому будем считать, что $s_1 \neq t_1$ и $s_2 \neq t_2$.

Пусть сначала вершины s_1, s_2, t_1, t_2 попарно различны. В силу эйлеровости все степени вершин графа $G^o \cup H^o$ четны, а в графе G^o есть ровно четыре вершины нечетной степени: s_1, s_2, t_1, t_2 .

С помощью алгоритма Дейкстры (см. [17]) найдем кратчайшую цепь $\mu_1(s_1, t_1)$. При удалении цепи μ_1 из графа G^o мы получим граф $G^o \setminus \mu_1 = C_1 \cup \dots \cup C_r$, где C_i ($i \in \overline{1, r}$) — это компоненты связности. Пусть для определенности $s_2 \in C_1$.

Удаление цепи μ_1 из графа G^o уменьшает на 1 степень вершин s_1 и t_1 . Степень всех остальных вершин уменьшается на 0 или на 2. В итоговом графе степени только двух вершин будут нечетны, следовательно, они попадут в одну компоненту связности, поэтому $t_2 \in C_1$. В компоненте C_1 существует эйлерова цепь $\mu_2(s_2, t_2)$, которую можно найти с помощью алгоритма Хиргольца.

Во всех остальных компонентах C_i ($i \in \overline{2, r}$) найдем эйлеровы циклы h_i . Каждая компонента C_i имеет хотя бы одну общую вершину v_i с цепью $\mu_1(s_1, t_1)$. Перестроим цепь μ_1 , заменяя в ней вершины v_i на найденные циклы h_i (обход цикла будем начинать с v_i).

Полученные в результате цепи $\mu_1(s_1, t_1)$ и $\mu_2(s_2, t_2)$ являются покрывающими для графа G^o , причем все действия по их построению выполнялись с помощью полиномиальных алгоритмов.

Случаи, когда какие-то из вершин s_1, s_2, t_1, t_2 совпадают, обосновываются аналогично, отличие только в том, что у двух или четырех из этих вершин изначально будут четные степени в графе G^o . $\square$

Следствие 1. Найденные в доказательстве леммы 1 цепи $\mu_1(s_1, t_1)$ и $\mu_2(s_2, t_2)$ имеют хотя бы одну общую вершину.

Это утверждение очевидно ввиду связности графа G^o .

Лемма 2. Пусть для связного обычного графа G^o соответствующий граф $G^o \cup H^o$ является эйлеровым, при этом в задаче СТ $p = 3$ и $t_1 = t_2 = t_3 = t$. Если в графе G^o есть мост, удаление которого оставляет s_1, s_2 и s_3 в одной компоненте связности, а t — в другой, то задача СТ не имеет решения. Иначе задача СТ всегда имеет решение, которое может быть найдено за полиномиальное время.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда в графе G^o есть мост $e = \{x, y\}$ нужного вида. По теореме 3.2 из книги [18] любая цепь $\mu(s_i, t)$ ($i \in \overline{1, 3}$) будет содержать ребро e , а значит, любые цепи между терминальными вершинами будут пересекаться по ребрам, следовательно, получить покрывающие цепи с заданными концами не удастся.

Отметим, что проверить наличие такого моста очень просто: достаточно с помощью алгоритма Дейкстры найти кратчайшую цепь $\mu(s_1, t)$ и, поочередно удаляя ее ребра, с помощью поиска в ширину проверить, не является ли какое-то из них мостом нужного вида. Описанная процедура проверки очевидно полиномиальна.

Пусть теперь в графе нет моста указанного вида. Если $t = s_1$, или $t = s_2$, или $t = s_3$, то одна из покрывающих цепей имеет нулевую длину и поиск двух оставшихся выполняется с помощью процедуры из доказательства леммы 1.

Пусть $t \neq s_i$ ($i \in \overline{1,3}$). В силу эйлеровости графа $G^o \cup H^o$ степени всех вершин в нем четны, а значит в графе G^o степень вершины t нечетна (при этом $\deg t = 3 + 2a$, $a \geq 0$) и степень либо одной, либо всех трех вершин s_i нечетна. Степень всех остальных вершин графа G^o четна.

С помощью алгоритма Дейкстры найдем кратчайшую цепь $\mu_1(s_1, t)$. При удалении цепи μ_1 из графа G^o мы получим граф $G^o \setminus \mu_1 = C_1 \cup \dots \cup C_r$, где C_i ($i \in \overline{1, r}$) — это компоненты связности. Пусть для определенности $t \in C_1$.

Удаление цепи $\mu_1(s_1, t)$ влияет на степени вершин так же, как в лемме 1. Поэтому степень t станет четной. Если $s_2 \neq s_3$, то это будут единственные две вершины нечетной степени, следовательно, они попадут в одну компоненту связности C_j . Все компоненты C_i ($i \in \overline{1, r}$) имеют хотя бы одну общую вершину с цепью μ_1 . Если предположить, что $j \neq 1$, то тогда между C_j и C_1 в цепи μ_1 есть мост, отделяющий s_1, s_2 и s_3 от t , но этого быть не может. Поэтому $s_2 \in C_1$ и $s_3 \in C_1$, значит, к C_1 применима лемма 1.

С оставшимися компонентами C_i ($i \in \overline{2, r}$) поступаем как в доказательстве леммы 1. В итоге мы за полиномиальное время получаем искомые покрывающие цепи. $\square$

Теорема 4. Пусть в кратном графе $G(V, E)$ выполнено какое-то из необходимых условий существования эйлерова маршрута (теоремы 1–3). Пусть при этом каждому множеству достижимости по обычным ребрам R_x^o инцидентно не более 4 связанных ребер каких-то мультиребер. Тогда задача MEW для этого графа разрешима за полиномиальное время.

Кратный эйлеров маршрут в таком графе существует, если граф с квазивершинами $G_{ord}(V_{ord}, E_{ord})$ эйлеров. Исключение составляет единственный случай:

- выполнено условие 2 или условие 3 теоремы 3;
- граф имеет кратность $k = 3$;
- в подграфе G_x^o , в который попадает начальная (конечная) вершина t кратной эйлеровой цепи, существует мост такой, что его удаление оставляет вершину t в одной компоненте связности, а три вершины, являющиеся концами одного мультиребра, — в другой.

Доказательство. Как уже отмечалось выше, если кратный граф эйлеров, то эйлеровым будет и граф с квазивершинами, поэтому эйлеровость графа $G_{ord}(V_{ord}, E_{ord})$ является необходимым условием разрешимости задачи MEW.

1. Рассмотрим сначала случай, когда выполнено либо условие теоремы 1, либо условие теоремы 2, либо условие 1 теоремы 3. В этом случае нам нужно искать либо кратный эйлеров цикл, либо кратную эйлерову цепь с началом и концом в кратных вершинах. Эйлеровость графа G_{ord} при выполнении одного из указанных условий приводит к тому, что степени всех квазивершин четны. Это значит, что каждое множество достижимости по обычным ребрам R_x^o будет инцидентно либо 2, либо 4 связанным ребрам каких-то мультиребер. При прохождении эйлерова маршрута в графе G_{ord} в каждом подграфе G_x^o будет возникать столько же начальных вершин для задачи СТ, сколько и конечных (при этом параметр $p = 1$ или $p = 2$). Из выполнения необходимых условий эйлеровости кратного графа G следует эйлеровость графа $G_x^o \cup H_x^o$. По лемме 1 каждая такая задача имеет решение, которое находится за полиномиальное время. Следовательно, любому эйлерову маршруту h_{ord} в графе G_{ord} будет соответствовать кратный эйлеров маршрут h в графе G . При этом маршрут h_{ord} можно найти с помощью полиномиального алгоритма Хиргольцера.

2. Пусть теперь выполнено условие 2 теоремы 3. В частности, это значит, что y — обычная вершина и найдется мультиребро $\{y_0, \{y_1, \dots, y_k\}\} \in E^m$ такое, что $y_i \in R_y^o$ ($i \in \overline{1, k}$); $\deg y = k + b$, где k — это кратность графа, b — четное неотрицательное число. Заметим, что в этом случае кратность графа может принимать значения только от 2 до 4, иначе множеству R_y^o будет инцидентно более 4 связанных ребер какого-то мультиребра. Рассмотрим случаи с каждым вариантом кратности.

2.1. Если $k = 2$, то в графе G_{ord} есть квазивершина $q_{y,y}$ нечетной степени, с которой начинается эйлерова цепь, и эта квазивершина — висячая (значение $\deg q_{y,y} = 2$ невозможно, поскольку тогда данная квазивершина не будет являться начальной вершиной эйлеровой цепи в графе G_{ord} ; а при $\deg q_{y,y} \geq 3$ вершины из R_y^o будут инцидентны минимум 6 связанным ребрам мультиребер). Выберем вершину y_1 в качестве начальной вершины кратной эйлеровой цепи, а при решении задачи СТ для подграфа G_y^o положим $s_1 = y_1$, $t_1 = y_2$. Если в графе G_{ord} есть квазивершина $q_{y,z}$ степени 2, в задаче СТ для подграфа G_y^o появятся еще терминальные вершины s_2 , t_2 . Как и в рассмотренном выше случае 1, граф $G_y^o \cup H_y^o$ — эйлеров и подзадача СТ для подграфа G_y^o соответствует условию леммы 1. Все остальные возникающие подзадачи решаются так же, как в случае 1.

2.2. Если $k = 3$, то в графе G_{ord} есть квазивершина $q_{y,y,y}$ нечетной степени, с которой начинается эйлерова цепь, и эта квазивершина — висячая. В соответствующем подграфе G_y^o однозначно выбирается начальная вершина t эйлеровой цепи (по сути, это единственная обычная вершина нечетной степени). Заметим, что в графе G_{ord} не может быть никакой квазивершины $q_{y,w,z}$: в силу эйлеровости графа G_{ord} такая вершина должна иметь четную степень, что приведет к появлению избыточного связанного ребра мультиребра, инцидентного R_y^o . В графе $G_y^o \cup H_y^o$ степень вершины t увеличится на 3 по сравнению со степенью этой вершины в кратном графе G , а остальные степени останутся неизменными (связанные ребра мультиребер заменятся на ребра (y_i, t) , $i \in \overline{1,3}$), поэтому граф $G_y^o \cup H_y^o$ — эйлеров. Таким образом, для подграфа G_y^o задача СТ сводится к получению трех покрывающих цепей от t к y_i ($i \in \overline{1,3}$), что соответствует условию леммы 2. Сформулированный в условии данной теоремы случай неразрешимости, по сути, определяется условием неразрешимости задачи СТ из леммы 2. Все остальные возникающие подзадачи решаются так же, как в рассмотренном выше случае 1.

2.3. Если $k = 4$, то в графе G_{ord} есть квазивершина $q_{y,y,y,y}$ нечетной степени, с которой начинается эйлерова цепь, и эта квазивершина — висячая. Аналогично случаю 2.2, в графе G_{ord} не может быть никакой другой квазивершины, содержащей y в качестве индекса, а граф $G_y^o \cup H_y^o$ — эйлеров. Рассмотрим G_y^o и решим задачу СТ, полагая $s_1 = y_1$, $t_1 = y_2$, $s_2 = y_3$, $t_2 = y_4$. По лемме 1 решение существует и находится за полиномиальное время. По следствию 1 покрывающие цепи будут иметь общую вершину. Выберем ее в качестве начальной вершины t кратного эйлерова цикла и преобразуем две найденные покрывающие цепи в G_y^o в четыре покрывающие цепи от t к y_i ($i \in \overline{1,4}$). Все остальные возникающие подзадачи решаются так же, как в рассмотренном выше случае 1.

3. Пусть теперь выполнено условие 3 теоремы 3. Тогда все рассуждения относительно начальной вершины кратной эйлеровой цепи из случая 2 нужно повторить и для конечной вершины этой цепи. Все остальные возникающие подзадачи решаются так же, как в рассмотренном выше случае 2.

Заметим, что во всех случаях мы разбивали нашу задачу на подзадачи СТ и поиска обычных эйлеровых маршрутов, каждая из которых рассматривалась однократно и решалась с помощью полиномиальных алгоритмов. Количество подзадач СТ определяется количеством множеств R_x^o , а это количество заведомо не превосходит количества обычных вершин в графе. Следовательно, задача MEW для графов рассматриваемого вида разрешима за полиномиальное время. $\square$

Из доказательства теоремы 4 можно получить следующий полиномиальный алгоритм для рассмотренного подкласса кратных графов. Отметим, что этот алгоритм будет работать как для делимых, так и для произвольных кратных графов.

Алгоритм 1 (поиск кратного эйлерова маршрута в графе с ограничением на R_x^o).

1. Проверяем выполнение необходимых условий существования кратного эйлерова цикла или цепи (теоремы 1–3). Если они не выполнены, кратного эйлерова маршрута не существует, выход.

2. Находим все R_x^o (полиномиальный алгоритм 2 из статьи [1]), строим граф с квазивершинами G_{ord} (полиномиальный алгоритм 1 из статьи [7]).
3. Проверяем, что каждому множеству достижимости по обычным ребрам R_x^o инцидентно не более 4 связанных ребер каких-то мультиребер.
4. С помощью алгоритма Хиргольцера находим в графе G_{ord} эйлеров цикл или эйлерову цепь h_{ord} (в зависимости от того, какое из необходимых условий истинно). Если h_{ord} не существует, задача MEW не имеет решения, выход.
5. Обходя маршрут h_{ord} , определяем стартовые и конечные вершины для задач СТ в подграфах G_x^o .
6. Решаем каждую из задач СТ с помощью полиномиальных алгоритмов так, как это описано в доказательстве лемм 1 и 2 и теоремы 4. Если реализовался негативный случай из теоремы 4, задача MEW не имеет решения, выход.
7. Находим искомый эйлеров маршрут h в кратном графе $G(V, E)$, перенося в кратный граф маршрут h_{ord} и объединяя его со всеми найденными покрывающими цепями в нужном порядке.

Оценим трудоемкость алгоритма 1.

На шаге 1 нам нужно посчитать степени всех вершин, однократно просмотрев каждое ребро, а затем проверить значение степени для каждой вершины на соответствие условиям теорем 1–3. Следовательно, трудоемкость данного шага — $O(|V| + |E|) = O(E)$.

На шаге 2 для получения всех R_x^o нужно однократно просмотреть все обычные ребра, а также просмотреть обычные вершины, инцидентные только отдельным связанным ребрам мультиребер, что дает трудоемкость $O(|V^o| + |E^o|) \leq O(|E|)$. Здесь V^o — множество обычных вершин. Построение графа с квазивершинами требует однократного просмотра всех кратных и мультиребер, однако для каждого из мультиребер нужно просмотреть отдельно k концов (k — кратность графа), поэтому трудоемкость этой части алгоритма составляет $O(|E^k| + k|E^m|) \leq O(k|E|)$.

Шаг 3 требует обхода всех концов мультиребер с проверкой, каким R_x^o они инцидентны, что требует $O(k|E^m|) \leq O(k|E|)$ действий.

Шаг 4 выполняет алгоритм Хиргольцера трудоемкости $O(|E_{ord}|) \leq O(|E|)$.

Обход маршрута h_{ord} на шаге 5 требует однократного просмотра всех ребер графа G_{ord} и соответствующих им ребер графа G , поэтому его трудоемкость — $O(|E|)$.

На шаге 6 требуется решить $s < |V|$ задач СТ, подходящих под условие теоремы 4. Каждая такая задача решается в своем подграфе $G_x^o(R_x^o, E_x^o)$. При этом потребуются найти одну кратчайшую цепь (трудоемкость $O(|R_x^o|^2)$) и r эйлеровых маршрутов в непересекающихся подграфах $C_i \subset G_x^o$ ($i \in \overline{1, r}$), что в совокупности потребует $O(|E_x^o| + |R_x^o|^2) = O(|R_x^o|^2)$ действий. Решение всех задач СТ потребует $O(s \cdot \max\{|R_x^o|^2\})$ шагов.

Перенос найденных маршрутов в кратный граф на шаге 7 потребует однократного просмотра ребер кратного графа и соответствующих им ребер графа G_{ord} , количество шагов — $O(|E|)$.

Каждый шаг выполняется однократно, следовательно, трудоемкость алгоритма 1 составляет $O(k|E| + s \cdot \max\{|R_x^o|^2\})$.

Отметим, что граф из примера 1 (рис. 3) соответствует условию теоремы 4, поэтому кратный эйлеров цикл, представленный на рис. 6, может быть найден с помощью алгоритма 1.

Пример 3. Рассмотрим более сложный пример на применение алгоритма 1. Пусть имеется кратный граф кратности $k = 2$, представленный на рис. 7. Концы мультиребра $\{13, \{35, 37\}\}$ лежат в одном множестве достижимости по обычным ребрам R_{31}^o , поэтому граф не является делимым.

Для этого графа выполняется условие 2 теоремы 3, при этом одним из концов возможной кратной эйлеровой цепи должна быть вершина 6, а другим — какая-то из вершин множества R_{31}^o .

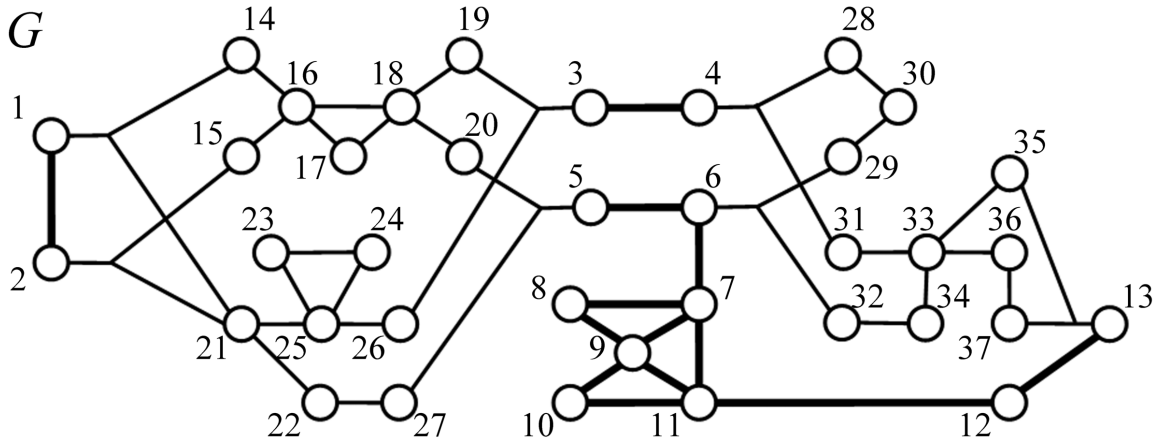


Fig. 7. Nondivisible graph of multiplicity 2

Рис. 7. Неделимый граф кратности 2

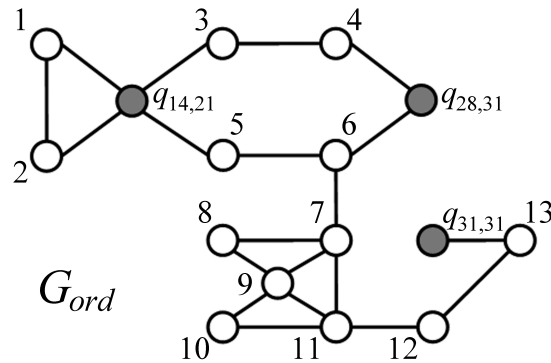


Fig. 8. Graph with quasi-vertices

Рис. 8. Граф с квазивершинами

Найдем все множества достижимости по обычным ребрам:

$$R_{14}^o = \{14, \dots, 20\}, \quad R_{21}^o = \{21, \dots, 27\}, \quad R_{28}^o = \{28, 29, 30\}, \quad R_{31}^o = \{31, \dots, 37\}.$$

Рассмотрев все мультиребра, сформируем квазивершины $q_{14,21}$, $q_{28,31}$, $q_{31,31}$ и построим граф G_{ord} (рис. 8).

В исходном кратном графе G каждому множеству R_x^o инцидентно не больше 4 связанных ребер мультиребер, а граф G_{ord} содержит эйлерову цепь, поэтому задача соответствует условию теоремы 4. Найдем эйлерову цепь в графе G_{ord} :

$$h_{ord}(q_{31,31}, 6) = (q_{31,31}, 13, 12, 11, 10, 9, 11, 7, 9, 8, 7, 6, q_{28,31}, 4, 3, q_{14,21}, 2, 1, q_{14,21}, 5, 6).$$

Обходя эту цепь, определим терминальные пары для задач СТ в каждом подграфе G_x^o .

В G_{31}^o сначала нам нужно выбрать начальную вершину кратной эйлеровой цепи. Согласно алгоритму 1 это вершина 35. Тогда в данном множестве будет две терминальные пары: $(35, 37)$, $(32, 31)$. Для первой пары строим кратчайшую цепь $\mu(35, 37) = (35, 33, 36, 37)$. Удаляя эту цепь из G_{31}^o , получаем для второй пары простую эйлерову цепь $\mu(32, 31) = (32, 34, 33, 31)$.

В G_{21}^o терминальными являются пары $(26, 21)$ и $(21, 27)$. Для первой пары строим кратчайшую цепь $\mu(26, 21) = (26, 25, 21)$. Удаляя эту цепь из G_{21}^o , получаем для второй пары эйлерову цепь $\mu(21, 27) = (21, 22, 27)$, а также цикл $(25, 24, 23, 25)$, который нужно встроить в $\mu(26, 21)$, используя общую вершину 25: $\mu(26, 21) = (26, 25, 24, 23, 25, 21)$.

Аналогичным образом получаем две покрывающие цепи $\mu(19, 15) = (19, 18, 16, 15)$ и $\mu(14, 20) = (14, 16, 17, 18, 20)$ в G_{14}^o , а также одну покрывающую цепь $\mu(29, 28) = (29, 30, 28)$ в G_{28}^o .

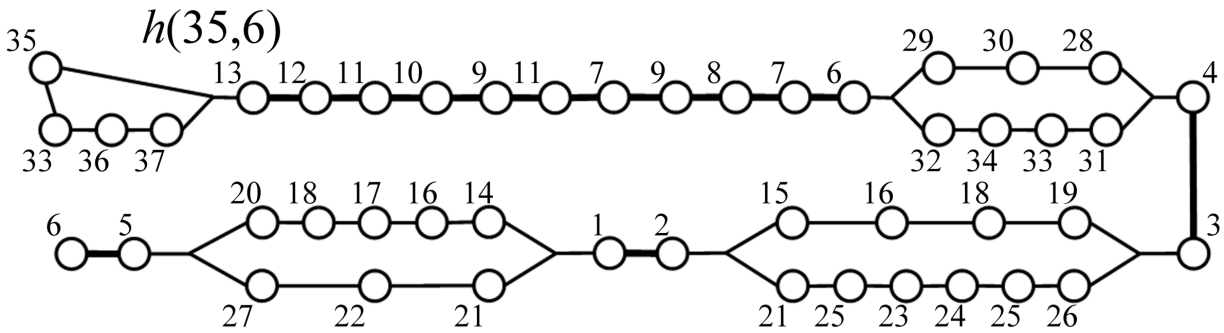


Fig. 9. Eulerian trail in the multiple graph G

Рис. 9. Эйлерова цепь в кратном графе G

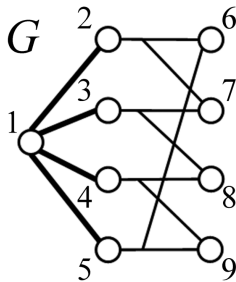


Fig. 10. Multiple graph G and graph with quasi-vertices G_{ord}

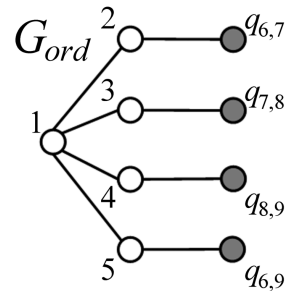


Рис. 10. Кратный граф G и граф с квазивершинами G_{ord}

Переносим эйлерову цепь $h_{ord}(q_{31,31}, 6)$ в граф G и объединяя ее с найденными покрывающими цепями в соответствующих G_x^o , получим кратную эйлерову цепь $h(35, 6)$, показанную на рис. 9.

Пример 4. Покажем также, что существуют кратные графы, для которых выполняется какое-то из необходимых условий эйлеровости, однако соответствующий граф с квазивершинами не эйлеров и, следовательно, в кратном графе невозможно получить эйлеров маршрут.

Слева на рис. 10 представлен делимый кратный граф, для которого выполнено условие теоремы 1. Более того, в каждой части G_1 и G_2 этого графа существует эйлеров цикл. Однако соответствующий граф с квазивершинами G_{ord} (справа на рис. 10) не является эйлеровым. Действительно, какие бы эйлеровы циклы мы ни получали в частях G_1 и G_2 , их невозможно будет согласовать на общей части кратного графа G .

4. Делимые графы с ограничением на степень квазивершин

Теорема 5. Пусть имеется делимый кратный граф $G(V, E)$, для которого выполнено необходимое условие существования эйлерова маршрута (теоремы 1–2). Пусть в графе с квазивершинами $G_{ord}(V_{ord}, E_{ord})$ степени всех квазивершин равны 2: $\deg q_{y_1, \dots, y_k} = 2$. Пусть при этом каждый подграф G_x^o соответствует какому-либо случаю, когда задача СТ для него может быть решена за полиномиальное время. Тогда задача MEW для графа $G(V, E)$ также может быть решена за полиномиальное время.

Доказательство. Заметим, что выполнение условия теоремы 1 или теоремы 2 в сочетании с условием $\deg q_{y_1, \dots, y_k} = 2$ влечет эйлеровость графа $G_{ord}(V_{ord}, E_{ord})$. При этом условие $\deg q_{y_1, \dots, y_k} = 2$ гарантирует, что при обходе любого эйлерова маршрута в графе G_{ord} пары терминальных вершин (s_i, t_i) для задачи СТ будут определяться однозначно в каждом подграфе G_x^o (с точностью до перестановки элементов внутри пар, которая не имеет значения ввиду неориентированности графа G).

Поэтому для нахождения кратного эйлерова маршрута в графе G достаточно с помощью полиномиального алгоритма Хиргольцера найти эйлеров маршрут h_{ord} в графе G_{ord} , затем произвести

обход этого маршрута для определения терминальных пар для каждой задачи СТ в подграфах G_x^o и решить полученные задачи СТ с помощью соответствующих полиномиальных алгоритмов. Если какая-то из задач СТ окажется неразрешимой, то тогда в графе G не существует кратного эйлерова маршрута. В противном случае объединение маршрута h_{ord} с решениями всех задач СТ порождает кратный эйлеров маршрут h в графе G .

Заметим, что мы разбили задачу поиска кратного эйлерова маршрута на одну подзадачу поиска обычного эйлерова маршрута и несколько подзадач СТ, каждая из которых решалась однократно с помощью полиномиального алгоритма. Количество подзадач СТ определяется количеством множеств R_x^o , а это количество заведомо не превосходит количества обычных вершин в графе. Следовательно, описанная процедура поиска кратного эйлерова маршрута полиномиальна. $\square$

Из доказательства теоремы 5 можно получить следующий полиномиальный алгоритм для рассмотренного подкласса делимых кратных графов.

Алгоритм 2 (поиск кратного эйлерова маршрута в делимом графе с ограничением на степень квазивершин).

1. Проверяем выполнение необходимых условий существования кратного эйлерова цикла или цепи (теоремы 1–2). Если они не выполнены, кратного эйлерова маршрута не существует, выход.
2. Находим все R_x^o (полиномиальный алгоритм 2 из статьи [1]), строим граф с квазивершинами G_{ord} (полиномиальный алгоритм 1 из статьи [7]).
3. Проверяем для всех квазивершин условие $\deg q_{y_1, \dots, y_k} = 2$.
4. С помощью алгоритма Хиргольцера находим в графе G_{ord} эйлеров цикл или эйлерову цепь h_{ord} (в зависимости от того, какое из необходимых условий истинно).
5. Обходя маршрут h_{ord} , определяем стартовые и конечные вершины для задач СТ в подграфах G_x^o .
6. Решаем каждую из задач СТ с помощью соответствующих полиномиальных алгоритмов. Если какая-то из задач СТ не имеет решения, задача MEW также не имеет решения, выход.
7. Находим искомый эйлеров маршрут h в кратном графе $G(V, E)$, перенося в кратный граф маршрут h_{ord} и объединяя его со всеми найденными покрывающими цепями в нужном порядке.

Трудоемкость алгоритма 2 оценивается по тому же принципу, что и трудоемкость алгоритма 1. Единственное отличие состоит в том, что сложность шага 6 определяется сложностью самой трудоемкой из подзадач СТ (пусть это будет $O(A)$). В худшем случае сложность шага 6 будет составлять $O(s \cdot A)$, где s — количество подграфов G_x^o (но заведомо $s < |V|$), а сложность алгоритма в целом — $O(k|E| + s \cdot A)$.

Из делимости графа G и выполнения условия теоремы 1 или теоремы 2 (четность степеней обычных вершин) следует эйлеровость всех графов $G_x^o \cup H_x^o$. Выделим для таких графов некоторые случаи, когда задача СТ решается за полиномиальное время:

1. $p = 1$ или $p = 2$ (лемма 1).
2. $p = 3$ и $t_1 = t_2 = t_3 = t$ (лемма 2).
3. G_x^o — дерево. В этом случае между любыми двумя вершинами в графе G_x^o существует только одна цепь без повторяющихся ребер. Поэтому для решения задачи СТ найдем с помощью алгоритма Дейкстры кратчайшие цепи между всеми парами терминальных вершин и проверим, являются ли они покрывающими.
4. Задача EDP с теми же терминальными парами (s_i, t_i) ($i \in \overline{1, p}$), что и задача СТ, разрешима за полиномиальное время. В этом случае нужно найти решение задачи EDP — не пересекающиеся по ребрам пути $\mu_i(s_i, t_i)$ ($i \in \overline{1, p}$). При удалении найденных путей из графа G_x^o мы получим

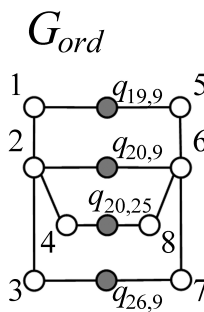
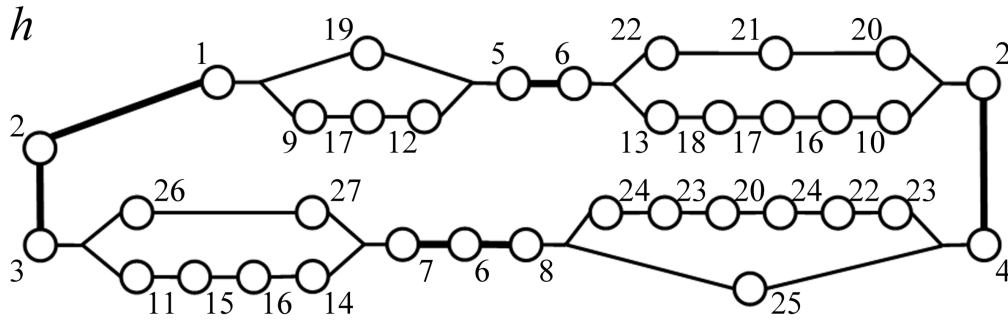


Рис. 11. Делимый граф G и граф с квазивершинами G_{ord}

Отметим также, что условие теоремы 5 нельзя ослабить. Если мы уберем условие полиномиальности задачи СТ, то тогда ослабленному условию будет соответствовать граф, который использовался в доказательстве NP-полноты задачи распознавания MEW в статье [14]. Если же допустить, что для квазивершин может быть $\deg q_{y_1, \dots, y_k} = 4$, это приведет к неоднозначности выбора терминальных пар в задачах СТ. Тогда в случае неразрешимости какой-то из них нужно будет рассмотреть иной вариант выбора терминальных пар, для чего потребуется выполнить одну или несколько каппа-трансформаций эйлера маршрута в графе G_{ord} ; в худшем случае число каппа-трансформаций будет экспоненциально.

Степени всех квазивершин равны 2, подграфы G_{19}^o , G_{20}^o , G_{25}^o и G_{26}^o подходят под условие леммы 1, а подграф G_9^o является деревом. Следовательно, графы G и G_{ord} соответствуют условию теоремы 5.

Fig. 12. Eulerian cycle in the divisible graph G Рис. 12. Эйлеров цикл в делимом графе G

Найдем в графе G_{ord} эйлеров цикл:

$$h_{ord} = (1, q_{19,9}, 5, 6, q_{20,9}, 2, 4, q_{20,25}, 8, 6, 7, q_{26,9}, 3, 2, 1).$$

Обходя этот цикл, определим терминальные пары для задач СТ в каждом подграфе G_x^o .

В G_9^o терминальными являются пары $(9, 12)$, $(13, 10)$ и $(14, 11)$. Поскольку G_9^o — дерево, найдем кратчайшие цепи между вершинами всех терминальных пар и убедимся, что они являются покрывающими. Это цепи $\mu(9, 12) = (9, 17, 12)$, $\mu(13, 10) = (13, 18, 17, 16, 10)$ и $\mu(14, 11) = (14, 16, 15, 11)$.

Две покрывающие цепи $\mu(22, 20) = (22, 21, 20)$ и $\mu(23, 24) = (23, 22, 24, 20, 23, 24)$ в G_{20}^o получаются так же, как в примере 3, а для подграфов G_{19}^o , G_{25}^o и G_{26}^o задача СТ тривиальна.

Переносим эйлеров цикл h_{ord} в граф G и объединяя его с найденными покрывающими цепями в соответствующих G_x^o , получим кратный эйлеров цикл h , показанный на рис. 12.

References

- [1] A. V. Smirnov, "The shortest path problem for a multiple graph", *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 52, no. 7, pp. 625–633, 2018. doi: [10.3103/S0146411618070234](https://doi.org/10.3103/S0146411618070234).
- [2] V. S. Rublev and A. V. Smirnov, "Flows in multiple networks", *Yaroslavy Pedagogicheskyy Vestnik*, vol. 3, no. 2, pp. 60–68, 2011, in Russian.
- [3] A. V. Smirnov, "The problem of finding the maximum multiple flow in the divisible network and its special cases", *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 50, no. 7, pp. 527–535, 2016. doi: [10.3103/S0146411616070191](https://doi.org/10.3103/S0146411616070191).
- [4] L. R. Ford and D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*. Princeton University Press, 1962, 216 pp.
- [5] V. S. Rublev and A. V. Smirnov, "The problem of integer-valued balancing of a three-dimensional matrix and algorithms of its solution", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 17, no. 2, pp. 72–98, 2010, in Russian.
- [6] A. V. Smirnov, "Network model for the problem of integer balancing of a four-dimensional matrix", *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 51, no. 7, pp. 558–566, 2017. doi: [10.3103/S0146411617070185](https://doi.org/10.3103/S0146411617070185).
- [7] A. V. Smirnov, "The algorithms for the Eulerian cycle and Eulerian trail problems for a multiple graph", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 30, no. 3, pp. 264–282, 2023, in Russian. doi: [10.18255/1818-1015-2023-3-264-282](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2023-3-264-282).
- [8] C. Hierholzer, "Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren", *Mathematische Annalen*, vol. 6, no. 1, pp. 30–32, 1873, in German. doi: [10.1007/BF01442866](https://doi.org/10.1007/BF01442866).

- [9] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*. North-Holland Publishing Company, 1973, 528 pp.
- [10] Z. Lonc and P. Naroski, “On tours that contain all edges of a hypergraph”, *The Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 17, R144, 2010. DOI: [10.37236/416](https://doi.org/10.37236/416).
- [11] A. Marino and A. Silva, “Eulerian walks in temporal graphs”, *Algoritmica*, vol. 85, no. 3, pp. 805–830, 2023. DOI: [10.1007/s00453-022-01021-y](https://doi.org/10.1007/s00453-022-01021-y).
- [12] S. W. Bent and U. Manber, “On non-intersecting Eulerian circuits”, *Discrete Applied Mathematics*, vol. 18, no. 1, pp. 87–94, 1987. DOI: [10.1016/0166-218X\(87\)90045-X](https://doi.org/10.1016/0166-218X(87)90045-X).
- [13] S. Jimbo, “The NP-completeness of Eulerian recurrent length for 4-regular Eulerian graphs”, in *Proceedings of the 2014 4th International Conference on Artificial Intelligence with Applications in Engineering and Technology*, 2014, pp. 155–159. DOI: [10.1109/ICAJET.2014.34](https://doi.org/10.1109/ICAJET.2014.34).
- [14] A. V. Smirnov, “NP-completeness of the Eulerian walk problem for a multiple graph”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 31, no. 1, pp. 102–114, 2024, in Russian. DOI: [10.18255/1818-1015-2024-1-102-114](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2024-1-102-114).
- [15] J. Abrham and A. Kotzig, “Transformations of Euler tours”, *Annals of Discrete Mathematics*, vol. 8, pp. 65–69, 1980. DOI: [10.1016/S0167-5060\(08\)70852-5](https://doi.org/10.1016/S0167-5060(08)70852-5).
- [16] R. M. Karp, “On the computational complexity of combinatorial problems”, *Networks*, vol. 5, no. 1, pp. 45–68, 1975. DOI: [10.1002/net.1975.5.1.45](https://doi.org/10.1002/net.1975.5.1.45).
- [17] E. W. Dijkstra, “A note on two problems in connexion with graphs”, *Numerische Mathematik*, vol. 1, no. 1, pp. 269–271, 1959. DOI: [10.1007/BF01386390](https://doi.org/10.1007/BF01386390).
- [18] F. Harary, *Graph theory*. Addison-Wesley Pub. Co., 1969, 274 pp.
- [19] M. Middendorf and F. Pfeiffer, “On the complexity of the disjoint paths problem”, *Combinatorica*, vol. 13, pp. 97–107, 1993. DOI: [10.1007/BF01202792](https://doi.org/10.1007/BF01202792).
- [20] N. Robertson and P. D. Seymour, “Graph minors. XIII. The disjoint paths problem”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 63, no. 1, pp. 65–110, 1995. DOI: [10.1006/jctb.1995.1006](https://doi.org/10.1006/jctb.1995.1006).
- [21] N. Alon and M. Capalbo, “Finding disjoint paths in expanders deterministically and online”, in *Proceedings of the 48th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS’07)*, 2007, pp. 518–524. DOI: [10.1109/FOCS.2007.19](https://doi.org/10.1109/FOCS.2007.19).
- [22] D. Wagner and K. Weihe, “A linear-time algorithm for edge-disjoint paths in planar graphs”, *Combinatorica*, vol. 15, no. 1, pp. 135–150, 1995. DOI: [10.1007/BF01294465](https://doi.org/10.1007/BF01294465).