MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS, VOL. 32, NO. 1, 2025
journal homepage: www.mais-journal.ru

COMPUTING METHODOLOGIES AND APPLICATIONS

Algorithm for Constructing Asymptotics of Periodic Solutions in Laser Models with a Rapidly Oscillating Delay

E. V. Grigorieva[1], D. V. Glazkov[2], A. O. Tolbey[2]

DOI: 10.18255/1818-1015-2025-1-6-15

[1]Belarus State Economic University, Minsk, Belarus
[2]P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

MSC2020: 39A11, 34K18
Research article
Full text in Russian

Received December 17, 2024
Revised January 13, 2025
Accepted January 22, 2025

The problem of stability of the equilibrium state in a laser system with fast oscillating coefficients is considered. A system averaged over fast oscillations and with a distributed delay is constructed. Critical cases in the problem of the stability of the equilibrium state are singled out. It is shown that the threshold value of the feedback coefficient at which the equilibrium state becomes unstable increases due to rapid oscillations compared to the corresponding value in the absence of modulation. In critical cases, normal forms are constructed — equations for the slowly varying amplitude of the periodic solutions. The conditions for the existence, stability and instability of cycles are revealed.

Keywords: bifurcation analysis; wave structures; delay; laser dynamics

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Grigorieva, Elena V.	ORCID iD: 0000-0003-4543-2598. E-mail: grigorieva@tutby.news Professor
Glazkov, Dmitry V.	ORCID iD: 0000-0003-0511-5088. E-mail: d.glazkov@uniyar.ac.ru Associate Professor, PhD
Tolbey, Anna O. (corresponding author)	ORCID iD: 0000-0001-5668-3929. E-mail: a.tolbey@uniyar.ac.ru Associate Professor, PhD

Funding: This work was carried out within the framework of a development programme for the Regional Scientific and Educational Mathematical Center of the Yaroslavl State University with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement on provision of subsidy from the federal budget No. 075-02-2024-1442).

For citation: E. V. Grigorieva, D. V. Glazkov, and A. O. Tolbey, “Algorithm for constructing asymptotics of periodic solutions in laser models with a rapidly oscillating delay”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 32, no. 1, pp. 6–15, 2025. DOI: 10.18255/1818-1015-2025-1-6-15.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ, ТОМ 32, № 1, 2025
сайт журнала: www.mais-journal.ru

COMPUTING METHODOLOGIES AND APPLICATIONS

Алгоритм построения асимптотики периодических решений в моделях лазеров с быстро осциллирующей задержкой

Е. В. Григорьева[1], Д. В. Глазков[2], А. О. Толбей[2]

DOI: 10.18255/1818-1015-2025-1-6-15

[1]Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь
[2]Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

УДК 519.7
Научная статья
Полный текст на русском языке

Получена 17 декабря 2024 г.
После доработки 13 января 2025 г.
Принята к публикации 22 января 2025 г.

Рассматривается задача об устойчивости состояния равновесия в лазерной системе с быстро осциллирующими коэффициентами. Построена усредненная по быстрым осцилляциям система с распределенным запаздыванием. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия. Показано, что пороговое значение коэффициента обратной связи, при котором состояние равновесия становится неустойчивым, увеличивается вследствие быстрых осцилляций по сравнению с соответствующим значением при отсутствии модуляции. В критических случаях построены нормальные формы — уравнения для медленной амплитуды периодических решений. Выявлены условия существования, устойчивости и неустойчивости циклов.

Ключевые слова: бифуркационный анализ; волновые структуры; запаздывание; лазерная динамика

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Григорьева, Елена Викторовна	ORCID iD: 0000-0003-4543-2598. E-mail: grigorieva@tutby.news Профессор
Глазков, Дмитрий Владимирович	ORCID iD: 0000-0003-0511-5088. E-mail: d.glazkov@uniyar.ac.ru Доцент, канд. физ.-мат. наук
Толбей, Анна Олеговна (автор для корреспонденции)	ORCID iD: 0000-0001-5668-3929. E-mail: a.tolbey@uniyar.ac.ru Доцент, канд. физ.-мат. наук

Финансирование: Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2024-1442).

Для цитирования: E. V. Grigorieva, D. V. Glazkov, and A. O. Tolbey, “Algorithm for constructing asymptotics of periodic solutions in laser models with a rapidly oscillating delay”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 32, no. 1, pp. 6–15, 2025. DOI: 10.18255/1818-1015-2025-1-6-15.

Введение

Запаздывающая обратная связь (ОС) применяется как для стабилизации состояния равновесия в нелинейных системах, так и для установления сложных осциллирующих режимов с заданными характеристиками. С целью расширения области эффективного управления режимами предлагались различные схемы ОС [1—4], а также дополнительная периодическая модуляция параметров ОС — уровня ОС [5] или времени задержки [6, 7]. Характеристики сложных режимов, индуцированных периодической модуляцией параметров ОС, могут быть востребованы во многих практических задачах. Например, в задаче об измерении расстояния до вибрирующей поверхности, формирующей внешний резонатор [8], в задаче о динамике импульсов излучения в лазерных диодах при малых вариациях длины резонатора [9]. Изменения характеристик ОС в пределах диапазона, обеспечивающего хаотический режим генерации, предлагались и для кодирования информации [10, 11].

В данной работе рассматривается вопрос об устойчивости состояния равновесия при высокочастотной модуляции параметров обратной связи. По аналогии с классическими результатами в задаче о динамике маятника с вибрирующим подвесом [12, 13] можно ожидать стабилизацию неустойчивого равновесия. Для лазерной модели построена усредненная по быстрым осцилляциям система с распределенным запаздыванием. Для усредненной системы выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия и показано, что вследствие быстрых осцилляций запаздывания граница неустойчивости в пространстве параметров смещается в сторону больших значений коэффициента обратной связи. Зависимость величины смещения от амплитуды модуляции имеет зонную структуру, поэтому быстрые осцилляции запаздывания могут как стабилизировать, так и дестабилизировать состояние равновесия.

1. Постановка задачи

Изучим вопрос об устойчивости состояния равновесия при высокочастотной модуляции параметров обратной связи (ОС). В схеме оптической ОС, предложенной в работе [14], поляризация отраженного от внешнего зеркала света ортогональна к поляризации падающего света, что позволяет не учитывать когерентное взаимодействие встречных волн электрической поля в математической модели. Динамика генерации такого устройства описывается одномодовыми скоростными уравнениями с запаздывающим аргументом:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= vu(y-1), \\ \dot{y} &= q - y - y[u + \gamma u(t-T)], \end{aligned} \tag{1}$$

где u и y пропорциональны плотностям фотонов и инверсии населенностей, соответственно, q — скорость накачки, v — отношение скорости затухания фотонов в резонаторе к скорости релаксации населенностей, потери резонатора нормированы к единице, t и T — текущее время и время прохода излучения по внешнему резонатору, нормированные на время релаксации инверсии населенностей, γ — коэффициент обратной связи. Отметим, что предлагаемая ниже методика может быть использована и для модели Лэнга — Кобаяши [15, 16] с учетом когерентного взаимодействия встречных волн.

Сначала кратко остановимся на свойствах решений системы (1) с постоянным запаздыванием. Система имеет два состояния равновесия. Первое состояние с нулевой плотностью излучения, $u(t) = 0$, $y(t) = q$, становится неустойчивым при достижении накачкой порогового значения $q = 1$. Далее будем полагать $q > 1$. При этом появляется второе состояния равновесия $u(t) = u_s$, $y(t) = y_s$, где

$$u_s(\gamma) = \frac{q-1}{1+\gamma},\ y_s = 1,$$

устойчивость которого стандартно определяется поведением корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \lambda q + vu_s + \gamma v u_s e^{-\lambda T} = 0. \tag{2}$$

При $\gamma = 0$ характеристические корни имеют отрицательные действительные части, поэтому рассматриваемое состояние равновесия устойчиво. Пусть $\gamma_0 > 0$ наименьшее положительное значение, при котором уравнение (2) имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\,\omega_0$ ($\omega_0 > 0$) и $\Re\lambda'_{1,2}(\gamma_0) > 0$, а все другие корни имеют отрицательные действительные части. Тогда при $\gamma \in (0, \gamma_0)$ состояние равновесия (u_s, y_s) системы (1) асимптотически устойчиво, а при $\gamma > \gamma_0$ — неустойчиво. Бифуркационные значения γ_0 и ω_0 находятся из системы уравнений:

$$\mathrm{tg}(\omega_0 T) = \frac{\omega_0 q}{\omega_0^2 - \nu u_s(\gamma_0)},$$

$$\big(vu_s(\gamma_0)\gamma_0\big)^2 = \big(\omega_0^2 - vu_s(\gamma_0)\big)^2 + \omega_0^2 q^2.$$

Особенности бифуркационной диаграммы для аналогичной (совпадающей в линейном приближении) системы подробно обсуждались в разделе 2 монографии [17], поэтому здесь на них не останавливаемся. Отметим только, что в окрестности границы устойчивости возможно образование устойчивых и неустойчивых циклов, 2-х и 3-х частотных торов.

В настоящей работе рассматривается более сложная по сравнению с (1) система, включающая периодическую модуляцию запаздывания с амплитудой a и частотой ω:

$$\begin{aligned} \dot u &= vu(y-1), \\ \dot y &= q - y - y[u + \gamma u(t - T - a\sin\omega t)]. \end{aligned} \tag{3}$$

Осцилляции запаздывания могут быть, в частности, вызваны вибрацией зеркал, образующих внешний резонатор, или организованы оптоэлектронными средствами. По физическому смыслу амплитуда осцилляций ограничена,

$$|a| \leqslant T.$$

Основное предположение, открывающее путь к применению асимптотических методов, состоит в том, что параметр ω является достаточно большим:

$$\omega \gg 1. \tag{4}$$

Отметим, что ω должна существенно превышать и значение собственной частоты ω_0, которая для твердотельных лазеров имеет порядок порядка $v^{1/2}$ и достаточно велика. Тем не менее, экспериментально такую ситуацию возможно реализовать оптоэлектронными средствами. Описанные ниже эффекты наблюдаются при численном моделировании уже при $\omega > 3\omega_0$. Еще отметим, что нелокальные режимы релаксационных колебаний при модуляции запаздывания с частотой, сопоставимой с собственной частотой лазера, изучались в работе [18] с помощью специального метода редукции системы к двумерному отображению.

2. Усредненная система

Прежде чем приступить к изучению систем с запаздыванием и быстро осциллирующими коэффициентами, напомним основные результаты, касающиеся принципа усреднения [19]. Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot x = f(\omega t, x), \tag{5}$$

где $\omega \gg 1$, а вектор-функция $f(\Gamma, x)$ периодична (почти периодична) по первому аргументу $\Gamma = \omega t$ и достаточно гладкая по второму аргументу, показано, что при выполнении ряда естественных ограничений поведение решений (5) определяется в главном поведением решений более простой — автономной — системой

$$\dot{x} = f_0(x), \text{ где } f_0(x) = \lim_{t_0\to\infty} \frac{1}{t_0} \int\limits_0^{t_0} f(\Gamma, x) d\Gamma.$$

Соответствующее обоснование базируется на том, что в результате замены времени $\omega t = \Gamma$ система (5) принимает вид

$$\frac{dx}{d\Gamma} = \omega^{-1} f(\Gamma, x),$$

т. е. производная $\frac{dx}{d\Gamma}$ оказывается в некотором смысле достаточно малой. Для систем с запаздыванием такую замену времени выполнять нецелесообразно, поскольку промежуток запаздывания тогда неограниченно возрастает при $\omega \to \infty$. Тем не менее и для них принцип усреднения имеет место [20]. Присутствие запаздывания может приводить к новым динамическим эффектам, которые не встречаются в системах обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему (3). Фиксируем в произвольный момент t_0 начальные условия $u(t_0 + \theta)$, $\theta \in [-T - a, 0]$ и $y(t_0)$, подставим их в правую часть системы (3) и произведем усреднение по быстрому времени $\Gamma = \omega t$:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= vu(y-1), \\ \dot{y} &= q - y - y\left[u + \gamma\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} u(t - T - a\cos(\omega s))ds\right]. \end{aligned}$$

Слагаемое с быстро осциллирующим запаздывающим аргументом при усреднении преобразуем следующим образом. Сделаем замену переменной $s_1 = \cos(\omega s)$, $ds_1 = -\omega\sin(\omega s)ds$ и учтем, что $\sin(\omega s) = \pm\sqrt{1 - s_1^2}$ на интервалах $s \in [0, \pi/\omega]$ и $s \in [\pi/\omega, 2\pi/\omega]$, тогда получим

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} u(t - T - a\cos(\omega s))ds = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0} \frac{u(t - T - as_1) + u(t - T + as_1)}{\sqrt{1 - s_1^2}} ds_1.$$

Окончательно, опуская индекс в формальной переменной интегрирования, приходим к усредненной системе уравнений с распределенным запаздыванием:

$$\begin{aligned} &\dot{u} = vu(y-1), \\ &\dot{y} = q - y - y\left[u + \frac{\gamma}{\pi}\int\limits_{-1}^{0} \frac{u(t - T - as) + u(t - T + as)}{\sqrt{1 - s^2}} ds\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Связь между решениями $u(t, \omega)$, $y(t, \omega)$ системы (3) и решениями $u(t)$, $y(t)$ усредненной системы (6) с одинаковыми начальными условиями из фазового пространства $C_{[-T-a,0]} \times R^1$ устанавливают асимптотические формулы

$$u(t, \omega) = u(t) + O(\omega^{-1}),\ y(t, \omega) = y(t) + O(\omega^{-1})$$

на каждом отрезке $[t_0, t_0 + L]$, где $L > 0$ произвольно и фиксировано.

Справедлив также следующий вывод о близости режимов этих динамических систем. Пусть (6) имеет грубый цикл $u_0(t)$, $y_0(t)$ (тор размерности k). Тогда при достаточно больших частотах ω система (3) имеет 2-мерный тор $u_0(t, \omega)$, $y_0(t, \omega)$ (тор размерности $k+1$) той же устойчивости, для которого выполнены асимптотические равенства

$$u_0(t, \omega) = u_0\Big((1 + o(1))t\Big) + o(1),\ y_0(t, \omega) = y_0\Big((1 + o(1))t\Big) + o(1).$$

3. Устойчивость состояния равновесия усредненной системы

Состояния равновесия в системе (3), содержащей осцилляции в запаздывании, и в усредненной системе (6) одни и те же. Будем исследовать далее режимы системы (6) в окрестности ненулевого состояния равновесия $y = y_s$, $u = u_s$. Для анализа его устойчивости рассмотрим линеаризованную систему для малых отклонений $u_1(t) = u(t) - u_s$, $y_1(t) = y(t) - y_s$:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= v u_s y_1, \\ \dot{y}_1 &= -q y_1 - u_1 - \frac{\gamma}{\pi} \int\limits_{-1}^{0} \frac{u_1(t-T-as) + u_1(t-T+as)}{\sqrt{1-s^2}} ds, \end{aligned} \tag{7}$$

и ее характеристический квазиполином

$$\lambda^2 + q\lambda + v u_s + \gamma v u_s \ell(\lambda) = 0, \tag{8}$$

где

$$\ell(\lambda) = e^{-T\lambda} \frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{0} (1-s^2)^{-1/2} \operatorname{ch}(\lambda a s) ds.$$

Как и для квазиполинома (2), определим условия для параметра γ, при которых корни квазиполинома (8) имеют отрицательные вещественные части. Положим $\lambda = i\omega_0$, $\gamma = \gamma_0$, ($\omega_0 = \omega_0(a) > 0$, $\gamma_0 = \gamma_0(a) > 0$) и получим систему

$$\operatorname{tg}(\omega_0 T) = \frac{\omega_0 q}{\omega_0^2 - v u_s(\gamma_0)}, \tag{9}$$

$$\left[\omega_0^2 - v u_s(\gamma_0)\right]^2 + q^2 \omega_0^2 = [\gamma_0 v u_s(\gamma_0)]^2 J_0^2(a\omega_0), \tag{10}$$

в которой $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos(x \sin s) ds.$$

При условии $0 < \gamma < \gamma_0(a)$ состояние равновесия (u_s, y_s) системы (6) асимптотически устойчиво, а при $\gamma > \gamma_0(a)$ — неустойчиво. На основании принципа усреднения заключаем, что для системы (3) имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть $\gamma \in (0, \gamma_0(a))$ $\quad (\gamma > \gamma_0(a))$. Тогда найдется такое $\Omega > 0$, что при всех $\omega > \Omega$ состояние равновесия (u_s, y_s) системы (3) асимптотически устойчиво (неустойчиво).

Обратим внимание, что

$$J_0^2(0) = 1, \quad \frac{dJ_0(a\omega_0)}{da}\bigg\|_{a=0} = 0, \quad \frac{d^2 J_0(a\omega_0)}{da^2}\bigg\|_{a=0} < 0,$$

а значит, при малых положительных значениях параметра a выполнено неравенство

$$\gamma_0(a) > \gamma_0(0).$$

Отсюда вытекает вывод о том, что быстрые осцилляции (с ненулевым средним) запаздывания могут расширять область $\gamma \in (0, \gamma_0)$ устойчивости состояния равновесия системы (3) в пространстве параметров и тем самым стабилизировать систему.

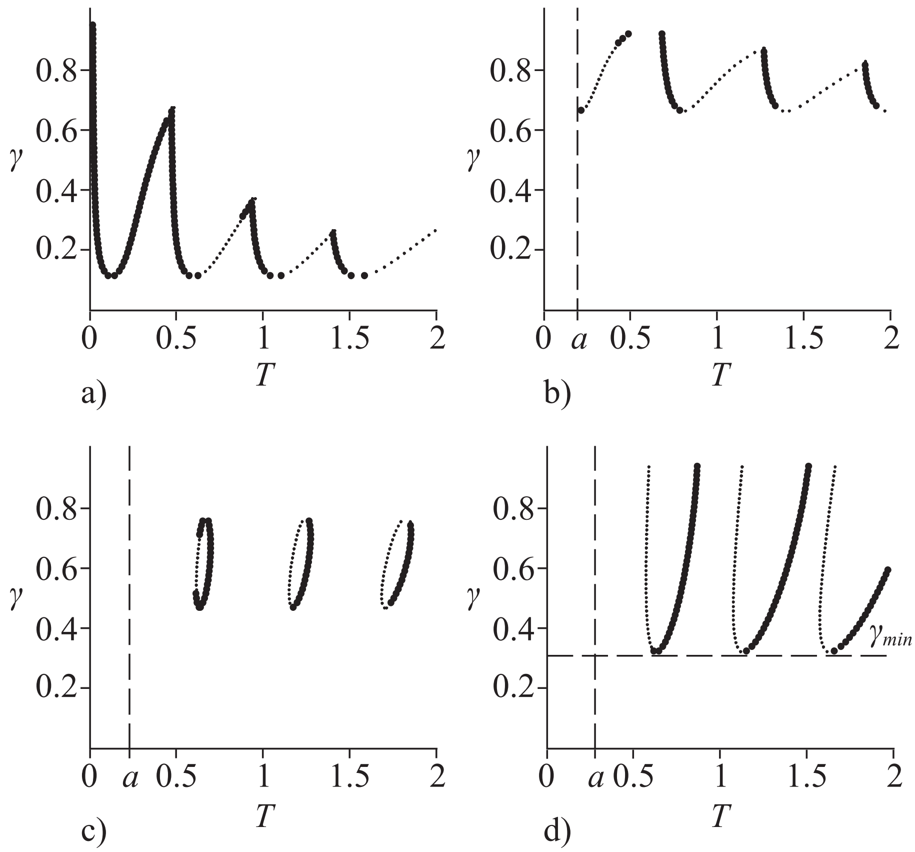

Fig. 1. Boundaries of the region of stability of the stationary state in the plane of the feedback parameters (γ, T) for the system (3) with $v = 400, q = 1.5$, with high-frequency modulation of the delay with amplitude a) $a = 0$, b) $a = 0.19$, c) $a = 0.26$, d) $a = 0.29$. The sections of the bifurcation curve on which the Lyapunov exponent is positive (negative) are indicated by a dotted line (bold line). The vertical dashed lines mark the minimum value of the delay time $T = a$.

Рис. 1. Границы области устойчивости стационарного состояния в плоскости параметров ОС (γ, T) для системы (3) при $v = 400, q = 1.5$ при высокочастотной модуляции запаздывания с амплитудой a) $a = 0$, b) $a = 0.19$, c) $a = 0.26$, d) $a = 0.29$. Участки бифуркационной кривой, на которых ляпуновская величина положительна (отрицательна), обозначены пунктиром (жирной линией). Вертикальные штриховые линии отмечают минимальное значение времени задержки $T = a$.

На рис. 1 представлены бифуркационные диаграммы в плоскости параметров обратной связи (T, γ), вычисленные по формулам (9) и (10) в случае a) постоянного запаздывания при $a = 0$ и в случаях b)–d) высокочастотной ($\omega \gg 1$) модуляции запаздывания при возрастающих значениях a. Видно, что для фиксированного T при увеличении амплитуды модуляции a значения γ_0, при которых состояние равновесия теряет устойчивость, сначала увеличиваются. На интервале $a \in [0.22, 0.25]$ при всех $T > 0$ значения $\gamma_0 > 1$, т. е. нет областей неустойчивости при физически допустимых уровнях ОС. Затем при $a > 0.25$ опять появляются области неустойчивости, которые далее опять сдвигаются вверх. Таким образом, наблюдается зонная структура областей неустойчивости.

Для объяснения зонной структуры воспользуемся тем фактом, что для полупроводниковых лазеров параметр v принимает достаточно большое значение, $v \sim 10^3$. Тогда можно оценить минимальное значение коэффициента ОС γ_0:

$$\min\{\gamma_0(a)\} = \frac{1}{|J_0(a\omega_0)|} \frac{q}{\sqrt{v(q-1)}} \left(1 + O(v^{-1/2})\right).$$

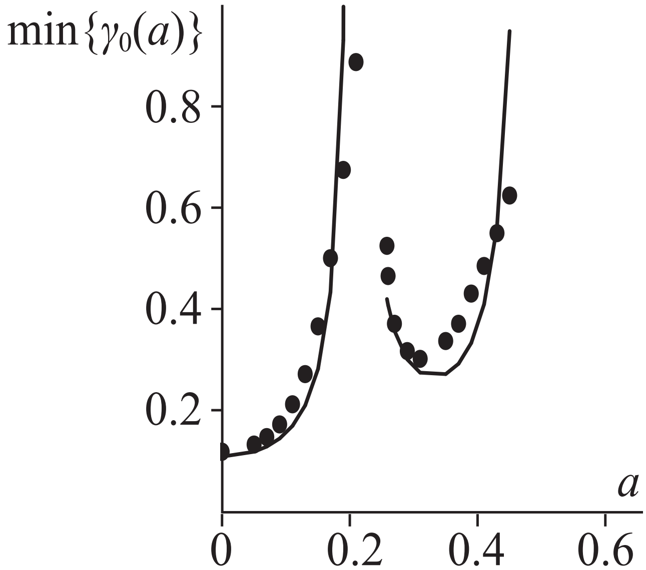

Fig. 2. Dependence of the minimum value $\min\{\gamma_0(a)\}$ of the feedback coefficient for which regions of instability of the equilibrium state appear, on the amplitude a of the modulation of the delay; other parameters of the system are $v = 400$, $q = 1.5$. On the interval $a \in [0.22, 0.25]$ the values $\gamma_0 > 1$.

Рис. 2. Зависимость минимального значения коэффициента ОС $\min\{\gamma_0(a)\}$, при котором возникают области неустойчивости равновесного состояния, от амплитуды модуляции запаздывания a, другие параметры системы $v = 400$, $q = 1.5$. На интервале $a \in$ [0.22, 0.25] значения $\gamma_0 > 1$.

Отметим, что в отсутствие модуляции запаздывания $a = 0$ и $J_0(0) = 1$. При $a > 0$ и $|J_0(a\omega_0)| < 1$ граница неустойчивости сдвигается в сторону больших значений γ. В точках $a = a_k$, $k = 1, 2, \ldots$, соответствующих нулям функции Бесселя $J_0(a_k\omega_0) = 0$, минимальное критическое значение стремится к бесконечности, следовательно, области неустойчивости равновесного состояния отсутствуют.

График зависимости минимального бифуркационного значения $\min\{\gamma_0(a)\}$, при котором возникает неустойчивость, от амплитуды модуляции запаздывания представлен на рис. 2. В частности, действительно существует интервал значений a, для которых минимальное критическое значение коэффициента ОС $\gamma_0 > 1$, т. е. области неустойчивости отсутствуют.

Заключение

Задача об устойчивости состояния равновесия в лазерной системе с быстро осциллирующими коэффициентами была решена с помощью построения усредненной по быстрым осцилляциям системы с распределенным запаздыванием. Для усредненной системы выделены критические случаи. Показано, что пороговое значение коэффициента ОС, при котором состояние равновесия становится неустойчивым, увеличивается вследствие быстрых осцилляций по сравнению с соответствующим значением при отсутствии модуляции. Зависимость величины смещения порога от амплитуды модуляции имеет зонную структуру. В частности, существуют интервалы значений амплитуды модуляции, при которых равновесное состояние остается устойчивым при любом (физически допустимом) уровне ОС. В критических случаях построены нормальные формы — уравнения для медленной амплитуды $\xi(t)$ периодических решений. Рассчитана ляпуновская величина, которая определяет направление бифуркации (суб- или суперкритическое), вследствие чего в окрестности границы возможно образование устойчивого или неустойчивого циклов.

References

[1] A. Kittel, K. Pyragas, and R. Richter, "Prerecorded history of a system as an experimental tool to control chaos", *Physical Review E*, vol. 50, no. 1, pp. 262–268, 1994. DOI: 10.1103/PhysRevE.50.262.

[2] K. Pyragas, "Control of chaos via an unstable delayed feedback controller", *Physical Review Letters*, vol. 86, no. 11, pp. 2265–2268, 2001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.2265.

[3] K. Pyragas, V. Pyragas, I. Z. Kiss, and J. L. Hudson, "Stabilizing and tracking unknown steady states of dynamical systems", *Physical Review Letters*, vol. 89, no. 24, p. 244 103, 2002. DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.244103.

[4] A. Ahlborn and U. Parlitz, "Controlling dynamical systems using multiple delay feedback control", *Physical Review E*, vol. 71, no. 1, p. 016 206, 2005. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.016206.

[5] H. G. Schuster and M. P. Stemmler, "Control of chaos by oscillating feedback", *Physical Review E*, vol. 56, no. 6, pp. 6410–6417, 1997. DOI: 10.1103/PhysRevE.56.6410.

[6] A. Gjurchinovski and V. Urumov, "Variable-delay feedback control of unstable steady states in retarded time-delayed systems", *Physical Review E*, vol. 81, no. 1, p. 016 209, 2010. DOI: 10.1103/PhysRevE.81.016209.

[7] T. Jungling, A. Gjurchinovski, and V. Urumov, "Experimental time-delayed feedback control with variable and distributed delays", *Physical Review E*, vol. 86, no. 4, p. 046 213, 2012. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.046213.

[8] A. V. Skripal, D. A. Usanov, V. A. Vagarin, and M. Y. Kalinkin, "Autodyne detection in a semiconductor laser as the external reflector is moved", *Technical Physics*, vol. 44, pp. 66–68, 1999. DOI: 10.1134/1.1259253.

[9] J. Martin-Regalado, G. H. M. Tartwijk, S. Balle, and M. S. Miguel, "Mode control and pattern stabilization in broad-area lasers by optical feedback", *Physical Review A*, vol. 54, no. 6, pp. 5386–5393, 1996. DOI: 10.1103/PhysRevA.54.5386.

[10] T. Yang, C. W. Wu, and L. O. Chua, "Cryptography based on chaotic systems", *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 44, no. 5, pp. 469–472, 1997. DOI: 10.1109/81.572346.

[11] J.-P. Goedgebuer, L. Larger, and H. Porte, "Optical cryptosystem based on synchronization of hyperchaos generated by delayed feedback tunable laser diode", *Physical Review Letters*, vol. 80, no. 10, pp. 2249–2252, 1998. DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.2249.

[12] N. N. Bogoliubov and Y. A. Mitropolsky, *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations.* Delhi : Hindustan Publishing Corporation (India), 1961.

[13] A. Stephenson, "On a new type of dynamical stability", *Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society*, vol. 52, no. 8, pp. 1–10, 1908.

[14] J.-L. Chern, K. Otsuka, and F. Ishiyama, "Coexistence of two attractors in lasers with delayed incoherent optical feedback", *Optics Communications*, vol. 96, no. 4–6, pp. 259–266, 1993. DOI: 10.1016/0030-4018(93)90272-7.

[15] R. Lang and K. Kobayashi, "External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties", *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 16, no. 3, pp. 347–357, 1980. DOI: 10.1109/JQE.1980.1070479.

[16] A. Levine, G. H. M. Tartwijk, D. Lenstra, and T. Erneux, “Diode lasers with optical feedback: Stability of the maximum gain mode”, *Physical Review A*, vol. 52, no. 5, R3436–R3439, 1995. DOI: 10.1103/PhysRevA.52.R3436.

[17] E. V. Grigorieva, A. A. Kashchenko, and S. A. Kashchenko, *Local analysis of the dynamics of distributed laser models*. Moscow: LENAND, 2024, in Russian.

[18] E. Grigorieva, “Instabilities of periodic orbits in lasers with oscillating delayed feedback”, *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, vol. 4, no. 1, pp. 6–12, 2001.

[19] Y. A. Mitropol’skii, *The method of averaging in nonlinear mechanics*. Kiev : Naukova Dumka, 1971, in Russian.

[20] Y. S. Kolesov, V. S. Kolesov, and I. I. Fedik, *Avtokolebaniya v sistemah s raspredelennymi parametrami*. Kiev : Naukova Dumka, 1979, in Russian.