MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS, VOL. 32, NO. 1, 2025
journal homepage: www.mais-journal.ru

DISCRETE MATHEMATICS IN RELATION TO COMPUTER SCIENCE

Dominant Sets with Neighborhood for Trees

M. A. Iordanski[1,2]

DOI: 10.18255/1818-1015-2025-1-32-41

[1]Minin Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod, Russia
[2]Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia

MSC2020: 05C69
Research article
Full text in Russian

Received December 18, 2024
Revised February 2, 2025
Accepted February 12, 2025

The subset $V' \subset V(G)$ forms a dominant set of vertices of the graph G with a neighborhood ε if for any vertex $v \in V \backslash V'$ there is a vertex $u \in V'$ such that the length of the shortest chain connecting these vertices $d(v, u) \leqslant \varepsilon$; $\delta_\varepsilon(G)$ is the number of vertices in the minimal ε-dominating set; $\delta_\varepsilon(G) = 1$ for $r(G) \leqslant \varepsilon \leqslant d(G)$; for $\varepsilon < r(G)$ the numbers $\delta_\varepsilon(G) > 1$, but the calculation of $\delta_1(G) = \delta(G)$ is an NP-complete problem. The paper considers class of trees t_d^ρ of diameter d whose degrees of all internal vertices are equal to ρ. Constructive descriptions of trees $t \in t_d^\rho$ are given. Procedures for calculating the values $\delta_\varepsilon(t)$ in the range $1 \leqslant \varepsilon < r(t)$ have been developed. Asymptotic estimates for $\delta_\varepsilon(t)$ and their share of the total number of vertices $t \in t_d^\rho$ are set at $d \to \infty$. Computational examples are given.

Keywords: trees; diameter; radius; dominating set with neighborhood; dominance number; gluing and cloning operations

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Iordanski, Mikhail A. (corresponding author)	ORCID iD: 0000-0001-6625-1572. E-mail: iordanski@mail.ru Dr. Sc., Professor

For citation: M. A. Iordanski, “Dominant sets with neighborhood for trees”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 32, no. 1, pp. 32–41, 2025. DOI: 10.18255/1818-1015-2025-1-32-41.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ, ТОМ 32, № 1, 2025
сайт журнала: www.mais-journal.ru

DISCRETE MATHEMATICS IN RELATION TO COMPUTER SCIENCE

Доминирующие множества с окрестностью для деревьев

М. А. Иорданский[1,2]

DOI: 10.18255/1818-1015-2025-1-32-41

[1]Нижегородский государственный педагогический университет им. К. Минина, Нижний Новгород, Россия
[2]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

УДК 519.17
Научная статья
Полный текст на русском языке

Получена 18 декабря 2024 г.
После доработки 2 февраля 2025 г.
Принята к публикации 12 февраля 2025 г.

Подмножество $V' \subset V(G)$ образует ε-доминирующее множество графа G, если для любой вершины $v \in V \backslash V'$ найдется вершина $u \in V'$ такая, что длина кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины $d(v,u) \leqslant \varepsilon$; $\delta_\varepsilon(G)$ — число вершин в минимальном ε-доминирующем множестве; $\delta_\varepsilon(G) = 1$ при $r(G) \leqslant \varepsilon \leqslant d(G)$; для $\varepsilon < r(G)$ числа $\delta_\varepsilon(G) > 1$, вычисление $\delta_1(G) = \delta(G)$ является NP-полной задачей. В работе рассматривается класс деревьев t_d^ρ диаметра d, степени внутренних вершин которых равны ρ. Приводятся конструктивные описания деревьев $t \in t_d^\rho$. Разработаны процедуры вычисления значений $\delta_\varepsilon(t)$ в диапазоне $1 \leqslant \varepsilon < r(t)$. Установлены асимптотические оценки для $\delta_\varepsilon(t)$ и их доли от общего числа вершин деревьев $t \in t_d^\rho$ при $d \to \infty$. Приводятся вычислительные примеры.

Ключевые слова: деревья; диаметр; радиус; доминирующее множество с окрестностью; число доминирования; операции склейки и клонирования

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Иорданский, Михаил Анатольевич (автор для корреспонденции)	ORCID iD: 0000-0001-6625-1572. E-mail: iordanski@mail.ru Доктор физ.-мат. наук, профессор

Для цитирования: M. A. Iordanski, “Dominant sets with neighborhood for trees”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 32, no. 1, pp. 32–41, 2025. DOI: 10.18255/1818-1015-2025-1-32-41.

Введение

Рассматриваются неориентированные связные графы без петель и кратных ребер. Используются следующие обозначения и определения: $V(G)$ — множество вершин графа $G(V,E)$; $G' = G(V')$ — подграф графа G, порожденный подмножеством вершин $V' \subset V(G)$; $d(v,u)$ — длина кратчайшей цепи, соединяющей вершины $v,u \in V(G)$; $\max_{u \in V(G)} d(v,u) = e(v)$ — *эксцентриситет* вершины v в графе G; $\max_{v \in V(G)} e(v) = d(G)$ — *диаметр* графа G; $\min_{v \in V(G)} e(v) = r(G)$ — *радиус* графа G, если $e(v) = r(G)$, то v *центральная* вершина графа G.

Используется конструктивный подход к представлению графов, предложенный автором, при котором графы рассматриваются как результаты некоторых процессов их построения [1]. К графам применяются теоретико-множественные операции объединения с пересечением, называемые операциями *склейки*. При выполнении операций склейки в графах-операндах G_1 и G_2 выделяются изоморфные подграфы $G_1' \subseteq G_1$, $G_2' \subseteq G_2$ и производится их отождествление.

Подграф результирующего графа, полученный путем отождествления подграфов G_1' и G_2', называется *подграфом склейки*. Если $G_1' = G_1$ или (и) $G_2' = G_2$, то операция склейки является *тривиальной* — её результирующий граф изоморфен хотя бы одному из графов-операндов.

Нетривиальные операции склейки, в которых один из графов-операндов изоморфен подграфу другого графа-операнда называются операциями *клонирования*. При их выполнении к исходному графу G добавляется подграф G'', изоморфный собственному связному подграфу $G' \subset G$. Подграф G'' называемый *клоном* подграфа G'. Вершины подграфа $G(V \backslash V')$, смежные с вершинами из V', называются *опорными*; V_0' — множество всех опорных вершин. Опорные вершины соединяются с вершинами клона так, чтобы подграфы результирующего графа, порожденные множествами вершин $V' \cup V_0'$ и $V'' \cup V_0'$, были изоморфны. Таким образом, опорные вершины являются вершинами подграфа склейки.

Задавая ограничения на операции склейки, можно сохранять при масштабировании графов — увеличении числа вершин и ребер, различные свойства: планарность, эйлеровость, гамильтоновость и другие. Обзор этих работ можно найти в [2] а также в англоязычной версии [3]. В данной работе операции склейки используются для оценки метрических свойств масштабируемых графов.

Подмножество вершин $V' \subset V(G)$ графа G образует его *доминирующее множество с окрестностью* ε, если для любой вершины $v \in V \backslash V'$ найдется хотя бы одна вершина $u \in V'$ такая, что $d(v,u) \leqslant \varepsilon$. Будем называть такие множества *ε-доминирующими* множествами. Число вершин графа G в минимальном ε-доминирующем множестве обозначается через $\delta_\varepsilon(G)$ и называется *числом ε-доминирования*. При $\varepsilon = 1$ получаем обычное доминирующее множество, число вершин в котором называется *числом доминирования* $\delta(G)$ [4]. Учитывая определения радиуса и диаметра графа, $\delta_\varepsilon(G) = 1$ для $r(G) \leqslant \varepsilon \leqslant d(G)$. Если $\varepsilon < r(G)$, то $\delta_\varepsilon(G) > 1$. При этом задача установления чисел ε-доминирования становится достаточно сложной. Для произвольного графа G нахождение чисел доминирования $\delta(G) = \delta_1(G)$ является NP-полной задачей [5].

Доминирующие множества с окрестностью имеют многочисленные приложения, связанные с проектированием различных коммуникационных сетей. Имеется немало работ, в которых рассматриваются такие множества. Достаточно полный обзор этих публикаций содержится в [6].

В работе 1975 года [7] на основе совместного рассмотрения понятий расстояния и доминирования была сформулирована концепция доминирования на расстоянии. В последующих работах были получены многочисленные оценки для $\delta_\varepsilon(G)$ через различные параметры графов: число вершин, максимальные и минимальные степени вершин, диаметр, радиус и обхват графа. При получении оценок использовались такие факты: если H — остовный подграф графа G, то $\delta_\varepsilon(G) \leqslant \delta_\varepsilon(H)$, причем в G всегда найдется остовное дерево T, такое, что $\delta_\varepsilon(G) = \delta_\varepsilon(T)$ [8]. Верхние оценки $\delta_\varepsilon(G)$ для различных классов графов можно найти в [7, 9—11]. Нижние оценки рассматривались в [8, 12].

Для суперпозиций графов было установлено [8], что для прямого произведения графов справедливо соотношение $\delta_\varepsilon(G\times H) \geqslant \delta_\varepsilon(G)+\delta_\varepsilon(H)-1$. Для $G_{m,n}$ — решетки $m\times n$ (декартова произведения простых цепей с m и n вершинами) в [13] получены формулы для вычисления $\delta_\varepsilon(G_{m,n})$, $m \leqslant 3$, $n \geqslant m$, а при неограниченном росте m и n установлена асимптотика $\delta_\varepsilon(G_{m,n})/mn = 1/(2\varepsilon^2 + 2\varepsilon + 1)$. В [14] получена верхняя оценка $\delta_\varepsilon(G_{m,n})$ при $n \geqslant m \geqslant 2$.

В настоящее время актуальны вопросы повышения производительности суперкомпьютерных вычислений, зависящей от структур используемых коммуникационных сетей. При масштабировании сетей предлагались различные технологические решения. Первое из них — множественность соединений между собой пар коммуникационных узлов, увеличивало объем данных, которые можно передавать по сети одновременно. На этом пути были разработаны соответствующие универсальные вычислительные сети, так называемые «толстые» деревья [15]. Второе направление связано с обеспечением топологической компактности коммуникационной сети за счет ограничения диаметра графа масштабируемой сети. Знание диаметра графа коммуникационной сети позволяет оценивать сверху время соединений произвольной пары узлов сети в ходе суперкомпьютерных вычислений [16, 17].

Операции склейки и, в частности, операции клонирования эффективны при решении задач масштабировании графов в обоих указанных выше направлениях. Технологичность процесса сборки графов с помощью операций клонирования следует из того, что при этом один из графов-операндов изоморфен собственному подграфу другого графа-операнда, то есть происходит тиражирование уже построенных подграфов [18, 19]. Примеры построения с помощью операций клонирования толстых деревьев а также масштабирования некоторых классов графов с ограничением диаметра приведены в [20, 21].

При переходе к операциям склейки по подграфам, вершины которых являются минимальными ε-доминирующими множествами увеличивается *коэффициент масштабирования* графов — отношение числа добавляемых вершин к числу вершин подграфа склейки, и тем самым уменьшается число необходимых склеек пар вершин при сохранении номенклатуры и количества используемых графов-операндов [21].

В работе продолжаются исследования начатые в [21]. Рассматривается класс деревьев t_d^ρ диаметра d, степени всех внутренних вершин которых равны ρ. Получены конструктивные описания деревьев $t \in t_d^\rho$, разработаны процедуры вычисления значений $\delta_\varepsilon(t)$ в диапазоне $1 \leqslant \varepsilon < r(t)$. Найдена асимптотика для чисел доминирования $\delta(t)$ и их доли от общего числа вершин деревьев $t \in t_d^\rho$ при $d \to \infty$. Установлены асимптотические верхние оценки для $\delta_\varepsilon(t), \varepsilon \geqslant 2$ и их доли от общего числа вершин деревьев $t \in t_d^\rho$ при $d \to \infty$. На основе этих результатов получена асимптотика для коэффициента масштабирования графов при склейке с деревьями $t \in t_d^3$ по $\delta(t)$ вершинам и асимптотические нижние оценки для коэффициента масштабирования графов при склейке с деревьями $t \in t_d^\rho, \rho \geqslant 4$ по $\delta_\varepsilon(t)$ вершинам при $d \to \infty$. Приводятся вычислительные примеры.

1. Конструктивные описания деревьев класса t_d^ρ

Рассматривается класс деревьев, обладающих максимальным числом вершин при заданных диаметре $d \geqslant 4$ и максимальной степени внутренних вершин $\rho \geqslant 3$. Деревья с одной центральной вершиной (корнем), называются *равновесными*, если все вершины, равноудаленные от корня, имеют одинаковые степени. Длина цепей, соединяющих корень с листьями (висячими вершинами), определяет глубину h равновесного дерева. Для одноцентрального равновесного дерева диаметр и глубина связаны следующим образом $h = d/2$. При наличии двух смежных центральных вершин каждая из них рассматривается как корень равновесного поддерева глубины $h = \lfloor d/2 \rfloor$, в котором все вершины, равноудаленные от корня поддерева, имеют одинаковые степени. Равновесное дерево, все внутренние вершины которого имеют одинаковые степени равные ρ, называется *однородным*.

Обозначим класс равновесных однородных деревьев диаметра d со степенью внутренних вершин ρ через t_d^{ρ}.

При построении произвольного дерева $t \in t_d^{\rho}$ в качестве исходного графа рассматривается цепь σ, содержащая $\lfloor d/2 \rfloor$ ребер. Занумеруем последовательно вершины цепи σ, начиная с вершины смежной с одной из её концевых вершин и кончая другой концевой вершиной, числами от 1 до $\lfloor d/2 \rfloor$. Эти вершины используются в качестве опорных при выполнении операций клонирования в процессе построения дерева $t \in t_d^{\rho}$.

При четном диаметре $d = 2k, k \geqslant 2$ операция клонирования для каждой опорной вершины повторяется до тех пор, пока ее степень не станет равной ρ. Для первой опорной вершиной в качестве клонируемого подграфа выступает смежная с ней концевая вершина цепи σ (равновесное поддерево глубины $h = 0$). При этом получаем равновесное поддерево глубины $h = 1$. Это поддерево является клонируемым подграфом для второй опорной вершины. При этом получаем равновесное поддерево глубины $h = 2$. Процесс построения равновесных поддеревьев увеличивающейся глубины продолжается до последней опорной вершины с номером $\lfloor d/2 \rfloor$, клонируемым подграфом для которой является равновесное поддерево глубины $h = k - 1$. В результате получаем равновесное однородное дерево степени ρ и глубины $h = k$, диаметр которого $d = 2k, k \geqslant 2$.

При нечетном диаметре $d = 2k + 1, k \geqslant 2$ строятся два поддерева глубины $h = k$ аналогично случаю четного диаметра. Отличие состоит лишь в том, что степени последних опорных вершин с номерами равными $\lfloor d/2 \rfloor$ доводятся с помощью операций клонирования до величины равной $\rho - 1$. После соединения ребром этих вершин получаем равновесное однородное дерево степени ρ, диаметр которого $d = 2k + 1, k \geqslant 2$. На рис. 1 приведены для примера деревья t_4^3 и t_5^3.

Замечание. В работе [21] показано, как деревья из класса t_d^{ρ} можно построить с помощью операций клонирования с одной опорной вершиной из цепи, содержащей одно ребро. Там же приведены оценки для минимального числа необходимых для этого операций клонирования.

2. Вычисление чисел ε-доминирования

Из структуры деревьев класса t_d^{ρ} следует, что их радиус $r = \lceil d/2 \rceil$. Поэтому значения чисел ε-доминирования $\delta_{\varepsilon}(t), t \in t_d^{\rho}$ будут рассматриваться в диапазоне $1 \leqslant \varepsilon < d/2$ для четных d и $1 \leqslant \varepsilon < \lceil d/2 \rceil$ — для нечетных d, полагая $\rho \geqslant 3$ и $d \geqslant 4$.

Учитывая способ построения деревьев класса t_d^{ρ}, вычислим вначале числа ε-доминирования для исходных графов — цепей σ, содержащих $\lfloor d/2 \rfloor$ ребер. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Числа ε-доминирования для цепей σ, содержащих $\lfloor d/2 \rfloor$ ребер, можно вычислить следующим образом:*

1. По заданным d и ε найти целочисленное $k \geqslant 1$, удовлетворяющее уравнению

$$\varepsilon + 1 + (k - 1)(2\varepsilon + 1) + l = \lfloor d/2 \rfloor + 1, \tag{1}$$

при условии, что $l \in \overline{0, 2\varepsilon}$.

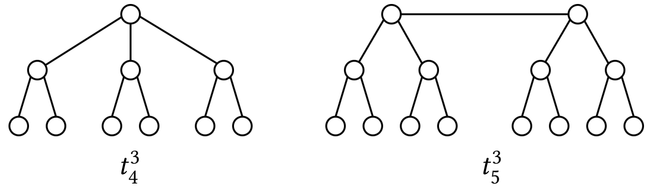

Fig. 1. **Structure of** t_4^3 and t_5^3 trees — **Рис. 1.** Структура деревьев t_4^3 и t_5^3

2. По найденному k число ε-доминирования определяется так:

$$\delta_\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} k, \ \text{если} \ l \in \overline{0, \varepsilon}, \\ k+1, \ \text{если} \ l \in \overline{\varepsilon+1, 2\varepsilon}. \end{cases}$$

Доказательство. Для цепи σ, содержащей $\lfloor d/2 \rfloor$ ребер, ее ε-доминирующее множество будет, очевидно, минимально, если включить в него вершину, удаленную от одной из концевых вершин цепи σ на расстояние равное ε, и далее в направлении к другой концевой вершине цепи σ последовательно добавить все вершины, отстоящие друг от друга на расстояние равное $2\varepsilon+1$. При этом за последней (k-ой) такой вершиной до конца цепи могут располагаться ещё $l \in \overline{0, 2\varepsilon}$ вершин. Для вычисления k ищется решение уравнения (1), отражающего структуру вышеописаннного размещения вершин ε-доминирующего множества вдоль цепи σ при условии, что $l \in \overline{0, 2\varepsilon}$. Если $l \leqslant \varepsilon$, то $\delta_\varepsilon(\sigma) = k$. Если $l \in \overline{\varepsilon+1, 2\varepsilon}$, то в ε-доминирующее множество к k вершинам добавляется ещё одна вершина, принадлежащая подмножеству из l последних вершин цепи σ. □

Теорема 1. *Числа ε-доминирования $\delta_\varepsilon(t)$ для деревьев $t \in t_d^\rho$ можно вычислить по формулам:*

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \delta_\varepsilon^1(t) \ \text{или} \ 2\delta_\varepsilon^2(t), \ \text{если} \ l \in \overline{0, \varepsilon} \\ \delta_\varepsilon^1(t)+1 \text{или} \ 2\delta_\varepsilon^2(t)+1, \ \text{если} \ l \in \overline{\varepsilon+1, 2\varepsilon}, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$\delta_\varepsilon^1(t) = \frac{\rho(\rho-1)^{d/2-1}}{(\rho-1)^\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{(\rho-1)^{2\varepsilon+1}} + \ldots + \frac{1}{(\rho-1)^{(k-1)(2\varepsilon+1)}}\right) \tag{3}$$

при четном d,

$$\delta_\varepsilon^2(t) = \frac{(\rho-1)^{\lfloor d/2 \rfloor}}{(\rho-1)^\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{(\rho-1)^{2\varepsilon+1}} + \ldots + \frac{1}{(\rho-1)^{(k-1)(2\varepsilon+1)}}\right) \tag{4}$$

при нечетном d, в которых число слагаемых k определяется в соответствии с процедурой леммы 1.

Доказательство. Разобьем вершины дерева $t \in t_d^\rho$ на *слои* — подмножества вершин равноудаленных от листьев. Пусть d четно, тогда число вершин во всех слоях дерева $t \in t_d^\rho$, начиная от корня, равно

$$1, \rho, \rho(\rho-1), \rho(\rho-1)^2, \ldots, \rho(\rho-1)^{d/2-1}. \tag{5}$$

Пусть d нечетно. В этом случае дерево $t \in t_d^\rho$ строится из двух равновесных поддеревьев $t \in t_{d-1}^\rho$, корни которых соединены ребром. Число вершин в слоях этих поддеревьев, начиная от корней, равны

$$1, (\rho-1), (\rho-1)^2, \ldots, (\rho-1)^{\lfloor d/2 \rfloor}. \tag{6}$$

Так как при выполнении операций клонирования в ходе построения дерева $t \in t_d^\rho$ на основе исходной цепи σ, содержащей $\lfloor d/2 \rfloor$ ребер, сохраняется положение вершин из минимальных ε-доминирующих множеств на всех цепях, соединяющих листья с корнем дерева $t \in t_d^\rho$ при четном d (с корнем поддерева $t \in t_{d-1}^\rho$ при нечетном d), то в ε-доминирующее множество дерева $t \in t_d^\rho (t_{d-1}^\rho)$ будут входить некоторые из выделенных выше слоев вершин. Первый из этих слоёв, содержащий наибольшее число вершин, удален от листьев на расстояние равное ε. Все дальнейшие слои вершин ε-доминирующего множества, если $k \geqslant 2$, располагаются друг от друга на расстоянии равном $2\varepsilon+1$.

Число слоев k определяется в соответствии с процедурой леммы 1. Количество вершин в указанных слоях можно подсчитать по формуле (3) для четного d и по формуле (4) для нечетного d.

Если $l \in \overline{0,\varepsilon}$, то $\delta_\varepsilon(t) = \delta^1_\varepsilon(t)$ при четном d и $\delta_\varepsilon(t) = 2\delta^2_\varepsilon(t)$ при нечетном d. Если $l \in \overline{\varepsilon+1, 2\varepsilon}$, то необходимо добавить $(k+1)$-й слой, вершины которого получены в ходе построения дерева дерева $t \in t^\rho_d(t^\rho_{d-1})$ в результате клонирования некоторой вершины, принадлежащей подмножеству из l последних вершин цепи σ. Конкретный выбор этой вершины не влияет на значение числа ε-доминирования для цепи σ, однако, для сокращения числа вершин ε-доминирующего множества дерева $t \in t^\rho_d(t^\rho_{d-1})$ имеет смысл выбрать из множества l вершину, являющуюся концевой для цепи σ. Эта вершина не клонируется при построении дерева $t \in t^\rho_d(t^\rho_{d-1})$ и $(k+1)$-й слой будет состоять из одной этой вершины. При четном d этой вершиной является корень дерева $t \in t^\rho_d$. При этом $\delta_\varepsilon(t) = \delta^1_\varepsilon(t) + 1$. При нечетном d этой вершиной является корень поддерева $t \in t^\rho_{d-1}$. Так как корни этих поддеревьев смежны, то только один из них включается в минимальное ε-доминирующее множество, при этом $\delta_\varepsilon(t) = 2\delta^2_\varepsilon(t) + 1$. □

Пример 1. На рис. 2 фрагментарно представлены соответственно деревья t^3_{12} и t^3_{13} с указанием числа вершин в слоях. Общее число вершин в этих деревьях равно $n(t^3_{12}) = 190$, $n(t^3_{13}) = 254$. Для каждого дерева темным цветом помечены вершины из $\delta_1(t)$.

Результаты вычислений чисел ε-доминирования по формулам (2), (3) и (4) приведены в таблице 1.

Проиллюстрируем заполнение таблицы для $\varepsilon = 1$. Уравнение (1) для обоих деревьев примет следующий вид $3(k-1)+l = 5$. Его решение $k = 2$ и $l = 2$ при $l \in \overline{0,2}$. По формулам (3) и (4) получаем $\delta^1_1(t^3_{12}) = 3 * 2^4(1+1/2^3) = 54$, $\delta^2_1(t^3_{13}) = 2^5(1+1/2^3) = 36$.

Так как $l = \varepsilon + 1$, то по формуле (2) имеем $\delta_1(t^3_{12}) = \delta^1_1(t^3_{12}) + 1 = 55$ и $\delta_1(t^3_{13}) = 2\delta^2_1(t^3_{13}) + 1 = 73$.

3. Оценки для чисел ε-доминирования

Рассмотрим асимптотические оценки для чисел $\delta_\varepsilon(t) \leqslant \delta(t)$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Для деревьев $t \in t^\rho_d$ при неограниченном росте d имеем:*

$$\delta(t) \sim \frac{\rho(\rho-1)}{(\rho-1)^3-1}(\rho-1)^{d/2} \tag{7}$$

на четной подпоследовательности d,

$$\delta(t) \sim \frac{2(\rho-1)}{(\rho-1)^3-1}(\rho-1)^{d/2} \tag{8}$$

на нечетной подпоследовательности d.

Доказательство. Так как k пропорционально d, то при неограниченном росте d формулы (3) и (4) превращаются при $\varepsilon = 1$ в суммы убывающих членов бесконечных геометрических прогрессий со знаменателем $q = 1/(\rho-1)^3$ и первыми членами соответственно $\frac{\rho(\rho-1)^{d/2-1}}{(\rho-1)}$ и $\frac{(\rho-1)^{\lfloor d/2 \rfloor}}{(\rho-1)}$. Пределы

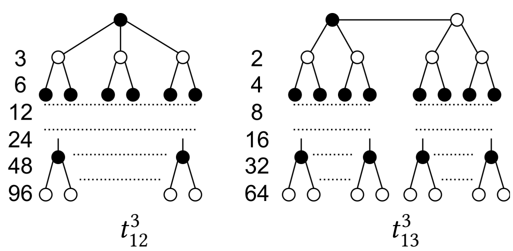

Fig. 2. Structure of trees t^3_{12} and t^3_{13}

Рис. 2. Структура деревьев t^3_{12} и t^3_{13}

Table 1. The values of the numbers of ε-dominance, $\varepsilon \in \overline{1,6}$ for trees t_{12}^3 and t_{13}^3

Таблица 1. Значения чисел ε-доминирования, $\varepsilon \in \overline{1,6}$ для деревьев t_{12}^3 и t_{13}^3

ε	$\delta_\varepsilon(t_{12}^3)$	$\delta_\varepsilon(t_{13}^3)$
1	55	73
2	25	33
3	12	16
4	6	8
5	3	4
6	1	2

этих сумм приведены в (7) и (8). В формулу (8) добавлен множитель 2, поскольку при нечетном d дерево $t \in t_d^\rho$ содержит два поддерева $t \in t_{d-1}^\rho$. □

Следствие 1. *Числа ε-доминирования $\delta_\varepsilon(t), t \in t_d^\rho$ асимптотически не превосходят значений (7) и (8) соответственно на четной и нечетной подпоследовательностях d.*

Обозначим через G_t класс графов, в каждом из которых можно выделить остовное дерево $t \in t_d^\rho$. Так как при добавлении ребер к любому графу числа ε-доминирования не могут увеличиваться, то отсюда получаем следующее.

Следствие 2. *Числа ε-доминирования $\delta_\varepsilon(G), G \in G_t$ асимптотически не превосходят значений (7) и (8) на четной и нечетной подпоследовательностях d.*

Теорема 2. *При неограниченном росте d числа доминирования $\delta(t), t \in t_d^\rho$ составляют от $n(t)$ — числа вершин дерева t, следующую долю:*

$$\frac{\delta(t)}{n(t)} \sim \frac{(\rho-1)(\rho-2)}{(\rho-1)^3-1}. \tag{9}$$

Доказательство. Вычислим $n(t)$ — число вершин в дереве $t \in t_d^\rho$. Число вершин в слоях (5), кроме первой единицы, соответствует членам геометрической прогрессии со знаменателем $(\rho-1)$ с начальным членом ρ и последним членом $\rho(\rho-1)^{\frac{d}{2}-1}$. Число вершин в слоях (6) соответствует членам геометрической прогрессии со знаменателем $(\rho-1)$ с начальным членом $\rho-1$ и последним членом $(\rho-1)^{\lfloor d/2 \rfloor}$. На основе сумм членов этих прогрессий получаем для четного и нечетного d соответственно

$$n(t) = 1 + \rho\frac{(\rho-1)^{d/2}-1}{\rho-2}, \tag{10}$$

$$n(t) = 2\frac{(\rho-1)^{\lceil d/2 \rceil}-1}{\rho-2}. \tag{11}$$

При неограниченном росте d имеем

$$n(t) \sim \frac{\rho}{\rho-2}(\rho-1)^{d/2}$$

для четного d,

$$n(t) \sim \frac{2}{\rho-2}(\rho-1)^{d/2}$$

для нечетного d.

Учитывая (7) и (8), отсюда получаем асимптотику (9). □

Следствие 3. *Для деревьев $t \in t_d^3$ при $d \to \infty$*

$$\frac{\delta(t)}{n(t)} \sim \frac{2}{7} \approx 0,2857.$$

Пример 2. Используя формулы (10) и (11), а также данные из примера 1, имеем для четного и нечетного d соответственно:

$$\frac{\delta(t_{12}^3)}{n(t_{12}^3)} = \frac{55}{190} \approx 0,2895; \quad \frac{\delta(t_{14}^3)}{n(t_{14}^3)} = \frac{109}{382} \approx 0,2853.$$

$$\frac{\delta(t_{13}^3)}{n(t_{13}^3)} = \frac{73}{254} \approx 0,2874; \quad \frac{\delta(t_{15}^3)}{n(t_{15}^3)} = \frac{145}{510} \approx 0,2843.$$

Поскольку значение выражения (9) уменьшается с ростом ρ, то учитывая следствие 3, получаем следующее.

Следствие 4. *Числа ε-доминирования $\delta_\varepsilon(t)$ составляют от $n(t)$ — общего числа вершин деревьев $t \in t_d^\rho$ долю, асимптотически не превосходящую $2/7$ при неограниченном росте d.*

Как указывалось во введении, использование операций склейки графов по вершинам их минимальных ε-доминирующих множеств позволяет увеличивать коэффициент масштабирования графов — отношение числа добавляемых вершин к числу вершин подграфа склейки. Если число вершин в подграфе склейки равно $\delta(t)$, а $(n(t) - \delta(t))$ — число добавляемых вершин, то $\frac{n(t)}{\delta(t)} - 1$ задает значение коэффициента масштабирования. При этом из следствия 3 получаем следующее.

Следствие 5. *Коэффициент масштабирования графов при склейке с деревьями $t \in t_d^3$ по $\delta(t)$ вершинам асимптотически равен $2,5$ при $d \to \infty$.*

Пример 3. Используя данные из примера 2, получаем следующие значения коэффициентов масштабирования графов при их склейке с деревьями $t \in t_d^3$ по $\delta(t)$ вершинам для четного и нечетного d соответственно:

$$\frac{n(t_{12}^3)}{\delta(t_{12}^3)} - 1 = \frac{190}{55} - 1 \approx 2,4545; \quad \frac{n(t_{14}^3)}{\delta(t_{14}^3)} - 1 = \frac{382}{109} - 1 \approx 2,5046.$$

$$\frac{n(t_{13}^3)}{\delta(t_{13}^3)} - 1 = \frac{254}{73} - 1 \approx 2,4794; \quad \frac{n(t_{15}^3)}{\delta(t_{15}^3)} - 1 = \frac{510}{145} - 1 \approx 2,5172.$$

Из следствий 3–5 получаем следующее.

Следствие 6. *Коэффициент масштабирования графов при склейке с деревьями $t \in t_d^\rho$ по $\delta_\varepsilon(t)$ вершинам асимптотически не меньше $2,5$ при $d \to \infty$.*

Заключение

Для чисел ε-доминирования $\delta_\varepsilon(G), 1 \leqslant \varepsilon < r(G)$ были разработаны процедуры вычисления значений $\delta_\varepsilon(t), 1 \leqslant \varepsilon < \lceil d/2 \rceil$ для деревьев $t \in t_d^\rho$.

Получена асимптотика для чисел доминирования $\delta(t), t \in t_d^\rho$ при неограниченном росте диаметра d, на основе которой установлены асимптотические верхние оценки чисел ε-доминирования для деревьев $t \in t_d^\rho$ и для графов, в которых можно выделить остовное дерево $t \in t_d^\rho$.

Найдены асимптотические значения и оценки для доли чисел ε-доминирования $\delta_\varepsilon(t)$ от $n(t)$ — числа вершин деревьев $t \in t_d^\rho$ и для коэффициентов масштабирования графов при склейке с деревьями $t \in t_d^\rho$ по $\delta_\varepsilon(t)$ вершинам при неограниченном росте d.

References

[1] M. A. Iordanski, "Constructive descriptions of graphs", *Discrete Analysis and Operations Research*, vol. 3, no. 4, pp. 35–63, 1996, in Russian.

[2] M. A. Iordanski, *Constructive graph theory and its applications*. Cyrillic, 2016, 172 pp., in Russian.

[3] M. A. Iordanski, *Constructive graph theory: Generation methods, structure and dynamic characterization of closed classes of graphs – a survey*, 2020. arXiv: 2011.10984 [math.CO].

[4] O. Ore, *Theory of graphs*. Nayka, Moscow, 1968, 352 pp., in Russian.

[5] M. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman, New York, 1979, 416 pp., in Russian.

[6] T. Haynes, S. Hedetniemi, and M. Henning, *Topics in Domination in Graphs. Developments in Mathematics*. Springer, 2020, vol. 64, 545 pp.

[7] A. Meir and J. Moon, "Relations between packing and covering number of a tree", *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 61, no. 1, pp. 225–233, 1975.

[8] R. Davila, C. Fast, M. Henning, and F. Kenter, "Lower bounds on the distance domination number of a graph", *Contributions to Discrete Mathematics*, vol. 12, no. 2, pp. 11–21, 2017.

[9] F. Tian and J. Xu, "A note on distanse domination numbers of graphs", *The Australasian Journal of Combinatorics*, vol. 43, pp. 181–190, 2009.

[10] M. Henning and N. Lichiardopol, "Distance domination in graphs with given minimum and maximum degree", *Journal of Combinatorial Optimization*, vol. 34, pp. 545–553, 2017.

[11] P. Dankelmann and D. Erwin, "Distance domination and generalized eccentricity in graphs with given minimum degree", *Jouranl of Graph Theory*, vol. 94, no. 1, pp. 5–19, 2020. DOI: 10.1002/jgt.22503.

[12] J. Cyman, M. Lemanska, and J. Raczek, "Lower bound on the distance k-domination number of a tree", *Mathematica Slovaca*, vol. 56, no. 2, pp. 235–243, 2006.

[13] A. Klobucar, "On the k-dominating number of Cartesian products of two paths", *Mathematica Slovaca*, vol. 55, no. 2, pp. 141–154, 2005.

[14] E. Fata, S. Smith, and S. Sundaram, "Distributed dominating sets on grids", in *Proceedings of the American Control Conference*, 2013, pp. 211–216.

[15] C. Leiserson, "Fat-trees: Universal networks for hardware-efficient supercomputing", *IEEE Transactions on Computers*, vol. C-34, pp. 892–901, 1985.

[16] A. M. Rappoport, "Metric characteristics of communication network graphs", *Proceedings of the Institute of System Analysis of the Russian Academy Sciences*, vol. 14, pp. 141–147, 2005, in Russian.

[17] V. A. Melentiev and V. I. Shubin, "On scalability of computing systems with compact topology", *Theoretical Applied Science*, vol. 11, no. 43, pp. 164–169, 2016, in Russian.

[18] M. A. Iordanski, "Cloning of graphs", in *Proceedings of the XVIII International Conference on Problems of theoretical Cybernetics*, in Russian, 2017, pp. 108–110.

[19] M. A. Iordanski, "On the complexity of graph synthesis using cloning operations", in *Proceedings of the XIII International seminar on Discrete mathematics and its applications*, in Russian, 2019, pp. 220–223.

[20] M. A. Iordanski, "Cloning operations and the diameter of graphs", *Discrete Mathematics*, vol. 34, no. 2, pp. 26–31, 2022, in Russian.

[21] M. A. Iordanski, "Scaling graphs with constraint diameter", *Discrete Mathematics*, vol. 35, no. 4, pp. 46–57, 2023, in Russian.