Модел. и анализ информ. систем. Т. **20**, № **3** (2013) 5–28

УДК 517.928

Параметрический резонанс в гармоническом осцилляторе с переменной частотой собственных колебаний

Нестеров П.Н.[1]

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: mathematix@mail.ru

получена 20 января 2013

Ключевые слова: гармонический осциллятор, переменная частота, резонанс, метод усреднения, асимптотика.

В статье изучается явление возникновения новых резонансов в гармоническом осцилляторе с переменной частотой собственных колебаний под действием колебательно убывающей во времени силы. Рассматриваемое в работе уравнение принадлежит классу адиабатических осцилляторов. Подобного рода уравнения возникают в спектральных задачах для одномерного оператора Шредингера с потенциалом типа Вигнера–фон Неймана. Для исследования задачи в работе используется специальный метод асимптотического интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. Метод основан на использовании идей метода усреднения для упрощения исходной системы. Затем для получения асимптотических формул применяется фундаментальная теорема Н. Левинсона. Далее в работе изучается феномен параметрического резонанса, возникающего в исследуемом уравнении. Найдены резонансные частоты внешнего возмущения и установлен точечный характер параметрического резонанса. В завершении работы строится пример гармонического осциллятора с переменной частотой собственных колебаний (адиабатического осциллятора), в котором могут возникать отмеченные в работе резонансы.

1. Постановка задачи

Классическим примером системы с одной степенью свободы, в которой наблюдается явление параметрического резонанса, является уравнение Матье

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \big[1 + \varepsilon \cos \lambda t\big]x = 0, \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 12-01-31004 мол_а, а также гранта Президента Российской Федерации № МК-80.2013.1.

где $\lambda > 0$ — вещественный параметр, а $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Это уравнение имеет огромное количество практических приложений, как классических, так и современных (см. [19]). Известно (см., например, [2, 8]), что в этом уравнении для любого сколь угодно малого ε можно указать счетное множество интервалов частот λ, при которых нулевое решение этого уравнения неустойчиво. Таким образом, спектр частот, при которых возникают неограниченно возрастающие колебания, не является точечным, а состоит из совокупности малых интервалов, длины которых зависят от амплитуды возмущений (т.е. от ε). При $\varepsilon \to 0$ интервалы частот, при которых в уравнении (1) наблюдается параметрический резонанс, стремятся к критическим частотам $\lambda = \lambda_n = 2/n$, $n \in \mathbb{N}$.

Объектом исследования в этой статье являются уравнения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \big(1 + q(t)\big)x = 0, \tag{2}$$

где функция $q(t)$ мала в некотором смысле при $t \to \infty$. Уравнения такого типа называют обычно адиабатическими осцилляторами. Пример уравнения (2) доставляет адиабатический осциллятор с функцией

$$q(t) = \frac{a}{t^\rho} \sin \lambda t, \qquad a \neq 0, \tag{3}$$

где a, λ, ρ — вещественные числа. Известно (см. [1, 12–14, 21, 22]), что если $(\lambda = \pm 2)$ и $(\rho \leq 1)$ или $(\lambda = \pm 1)$ и $(\rho \leq 1/2)$, уравнение (2) с функцией $q(t)$ вида (3) имеет неограниченные решения при любых значениях параметра $a \neq 0$. Если $\lambda \neq \pm 1, \pm 2$, то все решения этого уравнения ограничены. Аналогичные утверждения справедливы и для уравнения (2) с функцией

$$q(t) = \frac{a}{t^\rho} \cos \lambda t, \qquad a \neq 0, \tag{4}$$

где $a, \lambda, \rho \in \mathbb{R}$.

Уравнение (2), (4) хоть и имеет внешнее сходство с (1), относится все же к уравнениям совсем другого класса (его коэффициенты, в частности, не являются периодическими или почти периодическими функциями). В частности, для уравнения (2), (4) в отличие от (1) параметрический резонанс имеет точечный тип: появление неограниченных решений возможно лишь при значениях λ из конечного множества $\{\pm 1, \pm 2\}$. В работе [10] было изучено уравнение типа (2) с функцией $q(t)$ вида

$$q(t) = a\frac{\sin \varphi(t)}{\sqrt{t}}, \qquad \varphi(t) = t + \alpha \ln t, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Показано, что для любого значения $a \neq 0$ можно указать целый интервал значений α, при которых в соответствующем уравнении (2) возникают неограниченные колебания. Зона параметрического резонанса (неустойчивости решений) для этого уравнения задается неравенствами:

$$-\frac{5a^2}{24} \leq \alpha \leq \frac{a^2}{24}, \quad a \neq 0. \tag{5}$$

В этой работе мы продолжим исследование явления параметрического резонанса в адиабатических осцилляторах, начатое в работе [10]. Мы покажем, что в осцилляторах с переменной частотой собственных колебаний под действием убывающего во времени внешнего воздействия могут возникать резонансные частоты (т.е. частоты λ, при которых существуют неограниченные решения), которые отсутствуют в аналогичном осцилляторе с постоянной частотой собственных колебаний. В нашей работе мы рассмотрим осциллятор с переменной частотой под действием внешней силы (4):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Big(\omega^2(t) + \frac{a}{t^\rho}\cos\lambda t\Big)x = 0, \qquad a \neq 0, \tag{6}$$

где $a, \lambda, \rho \in \mathbb{R}$ и $0 < \rho \leq 1$. Мы будем предполагать, что функция $\omega^2(t)$, описывающая частоту собственных колебаний, является переменной величиной и допускает при $t \to \infty$ представление вида

$$\omega^2(t) = 1 + \frac{\omega_1}{t^\rho} + \frac{\omega_2}{t^{2\rho}} + \ldots + \frac{\omega_s}{t^{s\rho}} + r(t) \tag{7}$$

для некоторого $s \in \mathbb{N}$. Здесь $\omega_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, s$, а функция $r(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$. Мы покажем, что в уравнении (6) могут существовать резонансные частоты, отличные от $\lambda = \pm 1, \pm 2$ (сравни с (2), (4)). В дальнейшем будем считать, что в уравнении (6) параметр $\lambda > 0$.

Осцилляторы вида (2), к которым относится и рассматриваемое в этой работе уравнение (6), возникают в различных задачах квантовой механики, где их часто называют квантовыми осцилляторами (см. [3, 7, 20]). Кроме того, к уравнению вида (2) сводится спектральная задача для одномерного оператора Шредингера с потенциалом типа Вигнера–фон Неймана. Отметим также, что задача поиска значений λ, при которых в уравнении (6) реализуется параметрический резонанс, тесно связана с задачей отыскания вложенных собственных значений на непрерывном спектре для одномерного оператора Шредингера с указанным потенциалом. В этой связи отметим обзор [11], в котором освещается данный вопрос, а также недавние работы по этой тематике [16, 17].

Метод исследования уравнения (6) опирается на два основных результата: идею усредняющих замен в системах с колебательно убывающими коэффициентами и фундаментальную теорему Н. Левинсона. В следующем разделе мы подробно опишем эту методику. Основной результат этой работы, теорема 4, будет сформулирован в разделе 3.

2. Асимптотическое интегрирование систем с колебательно убывающими коэффициентами

Впервые возможность использования метода усреднения для упрощения построения асимптотики решений некоторого класса линейных систем на примере уравнения (2), (3) была продемонстрирована в работе [1]. Общий вид усредняющих замен, рассмотренных в [1], был затем получен в [6].

Рассмотрим следующую систему с колебательно убывающими коэффициентами:

$$\frac{dx}{dt} = \Big(A_0 + A_1(t)v(t) + A_2(t)v^2(t) + \ldots + A_k(t)v^k(t) + R(t)\Big)x. \tag{8}$$

Здесь x — m-мерный комплекснозначный вектор; A_0, $A_i(t)$ $(i = 1, \ldots, k)$, $R(t)$ — квадратные матрицы размера $m \times m$; $v(t)$ — скалярная функция. Пусть

1. A_0 — постоянная матрица, все собственные значения которой вещественны.

2. $v(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

3. $\dot{v}(t) \in L_1[t_0, \infty)$.

4. $v^{k+1}(t) \in L_1[t_0, \infty)$ для некоторого целого неотрицательного k.

5. Элементами матриц $A_i(t)$ $(i = 1, \dots, k)$ являются тригонометрические многочлены.

6. Матрица $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$. (Запись $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$ означает, что $\|R(t)\| \in L_1[t_0, \infty)$, где $\|\cdot\|$ — некоторая матричная норма.)

При сформулированных выше условиях справедлива следующая теорема (см. [1, 6]):

Теорема 1. *Система* (8) *при достаточно больших* t *заменой*

$$x = \Big[I + Y_1(t)v(t) + Y_2(t)v^2(t) + \ldots + Y_k(t)v^k(t)\Big]y, \tag{9}$$

где I *— единичная матрица, а элементами матриц* $Y_i(t)$ $(i = 1, \dots, k)$ *являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением, приводится к виду*

$$\frac{dy}{dt} = \Big(A_0 + A_1 v(t) + A_2 v^2(t) + \ldots + A_k v^k(t) + R_1(t)\Big)y, \tag{10}$$

с постоянными матрицами A_i $(i = 1, \dots, k)$ *и матрицей* $R_1(t) \in L_1[t_0, \infty)$.

Замечание. Если все матрицы $A_i(t)$ $(i = 1, \dots, k)$ в системе (8) являются периодическими с одним и тем же периодом $T > 0$, то оказывается возможным ослабить требование теоремы 1 на спектр матрицы A_0 (см. [9, стр. 50]). Именно, она не должна содержать собственных чисел, связанных соотношением

$$\lambda_r - \lambda_p = \frac{2\pi q}{T}\mathfrak{i}, \qquad r, p = 1, \dots, m, \quad q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad \mathfrak{i}^2 = -1. \tag{11}$$

Матрицы $Y_i(t)$ $(i = 1, \dots, k)$ в замене (9) определяются как решения матричных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY_i(t)}{dt} + Y_i(t)A_0 - A_0 Y_i(t) = \sum_{l=0}^{i-1} A_{i-l}(t)Y_l(t) - \sum_{l=0}^{i-1} Y_l(t)A_{i-l} \tag{12}$$

с нулевым средним значением. В уравнении (12) полагаем $Y_0(t) = I$. Матрицы A_i $(i = 1, \dots, k)$ выбираются из условия однозначной разрешимости уравнений (12) в классе матриц, элементами которых являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением. Именно,

$$A_i = \mathrm{M}\left[\sum_{l=0}^{i-1} A_{i-l}(t)Y_l(t)\right], \qquad \left(\mathrm{M}\big[F(t)\big] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T F(s)ds\right). \tag{13}$$

В частности,

$$A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(t)\big], \quad A_2 = \mathrm{M}\big[A_2(t) + A_1(t)Y_1(t)\big]. \tag{14}$$

Здесь матрица $Y_1(t)$ с нулевым средним значением определяется из уравнения

$$\frac{dY_1}{dt} + Y_1 A_0 - A_0 Y_1 = A_1(t) - A_1. \tag{15}$$

Замены вида (9) называют усредняющими. В дальнейшем нам потребуется следующее свойство усредняющих замен (см. [5]):

Теорема 2. *Пусть в системе* (8) *матрицы* $A_i(t)$ $(i = 1, \ldots, k)$ *обладают тем свойством, что*

$$\mathrm{M}\big[\operatorname{tr} A_i(t)\big] = 0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Тогда все матрицы A_i $(i = 1, \ldots, k)$ *в* (10) *имеют нулевой след, т.е.*

$$\operatorname{tr} A_i = 0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Опишем еще одно свойство усредняющих замен. Будем говорить, что некоторая (2×2)-матрица A принадлежит классу Ξ, если она имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{11} \end{pmatrix}.$$

Здесь символом $\bar{a}$ обозначено число, комплексно сопряженное с a. Пусть выполнены все условия теоремы 1, и исходная система (8) посредством усредняющей замены (9) приводится к виду (10).

Утверждение 1. *Если в системе* (8) *матрицы* $A_0, A_1(t), \ldots, A_k(t)$ *принадлежат классу* Ξ, *то все матрицы* $Y_1(t), \ldots, Y_k(t)$ *в усредняющей замене* (9) *и все постоянные матрицы* $A_1, \ldots, A_k$ *в системе* (10) *также принадлежат классу* Ξ.

Обоснование этого утверждения может быть найдено в работе [18]. Отметим следующий очевидный факт. Поскольку определитель матрицы $A \in \Xi$ является действительным числом, то в случае, когда $\operatorname{tr} A = 0$, собственные числа матрицы A имеют вид

$$\mu_{1,2} = \pm z,$$

где $z \in \mathbb{R}$ или $z = \mathrm{i}\psi$, $\psi \in \mathbb{R}$.

Система (10) не содержит в главной части осциллирующих коэффициентов, и в этом смысле она проще исходной системы (8). В частности, для построения асимптотики ее решений может быть использована фундаментальная теорема Н. Левинсона.

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \big(\Lambda(t) + R(t)\big)x, \tag{16}$$

где $x(t)$ — комплекснозначный вектор размерности m, $\Lambda(t) = \operatorname{diag}\big(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_m(t)\big)$— непрерывная диагональная матрица, а $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Системы типа (16) называют L-диагональными. Потребуем далее, чтобы для элементов матрицы $\Lambda(t)$ было выполнено следующее условие, известное как условие дихотомии: пусть для каждой пары индексов (p, r) имеет место либо неравенство

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_p(s) - \lambda_r(s)\big)ds \le K_1, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_0, \tag{17}$$

либо неравенство

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_p(s) - \lambda_r(s)\big)ds \ge K_2, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_0, \tag{18}$$

где K_1, K_2 — некоторые постоянные.

Имеет место следующая теорема (см., например, [4, 12, 15]).

Теорема 3 (Levinson). *Если выполнено условие дихотомии* (17), (18), *то фундаментальная матрица* $X(t)$ L*-диагональной системы* (16) *допускает следующее асимптотическое представление при* $t \to \infty$:

$$X(t) = \Big(I + o(1)\Big) \exp\Big\{\int\limits_{t^*}^{t} \Lambda(s)ds\Big\}.$$

В задачах, которые рассматриваются в этой статье, оказывается выполненным следующее условие, достаточное для дихотомии (17), (18): для каждой пары индексов (p, r) величина

$$\mathrm{Re}\big(\lambda_p(t) - \lambda_r(t)\big) \le 0 \quad (\ge 0), \quad t \ge t_0, \tag{19}$$

т.е. не изменяет своего знака при больших значениях t.

Отметим также, что теорема Левинсона часто используется применительно к системам вида

$$\frac{dy}{dt} = \big(A_0 + V(t) + R(t)\big)y, \tag{20}$$

где A_0 — постоянная матрица, все собственные числа которой различны, матрица $V(t) \to 0$ при $t \to \infty$, и, наконец, матрицы $V'(t)$ (штрих означает производную по переменной t) и $R(t)$ принадлежат классу $L_1[t_0, \infty)$. Система (20) заменой $y = C(t)x$, где $C(t)$ невырожденная матрица, по столбцам которой стоят собственные векторы матрицы $A_0 + V(t)$, и $C'(t) \in L_1[t_0, \infty)$, может быть приведена к L-диагональной форме (16) (см, например, [4]). В частности, если выполнено условие дихотомии (17), (18) для собственных чисел $\lambda_1(t),\ldots,\lambda_m(t)$ матрицы $A_0 + V(t)$, то фундаментальная матрица $Y(t)$ системы (20) имеет следующее асимптотическое представление при $t \to +\infty$:

$$Y(t) = \Big(C_0 + o(1)\Big) \exp\Big\{\int\limits_{t^*}^{t} \Lambda(s)ds\Big\}. \tag{21}$$

Здесь по столбцам матрицы C_0 стоят собственные векторы матрицы A_0, отвечающие собственным числам $\lambda_1 = \lim\limits_{t\to\infty} \lambda_1(t), \ldots, \lambda_m = \lim\limits_{t\to\infty} \lambda_m(t)$ и $\Lambda(t) = \mathrm{diag}\big(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_m(t)\big)$.

Таким образом, чтобы построить асимптотику решений системы (8), необходимо привести усредненную систему (10) к L-диагональной форме (16) (или к виду (20)) и затем воспользоваться теоремой Левинсона.

3. Построение асимптотических формул

От уравнения (6) перейдем к системе стандартным образом:

$$\dot{y}_0 = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix} + q(t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] y_0, \qquad q(t) = \frac{a\cos\lambda t}{t^\rho}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Заметим сначала, что если в уравнении (6) отсутствует возмущающий член (т.е. $q(t) = 0$), то линейно независимые решения этого уравнения допускают следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$x_{1,2}(t) = \big(1 + o(1)\big)\exp\Big\{\pm\mathrm{i}\Big(t + O\Big(\int t^{-\rho}dt\Big)\Big)\Big\}. \tag{23}$$

Действительно, в этом случае система (22) может быть записана в виде (20), где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(t) = \big(\omega_1 t^{-\rho} + \ldots + \omega_s t^{-s\rho}\big)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(t) = r(t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Следовательно, асимптотика фундаментальной матрицы системы (22) при $t \to \infty$ определяется формулой (21), в которой

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \Lambda(t) = \sqrt{1 + \omega_1 t^{-\rho} + \ldots + \omega_s t^{-s\rho}}\,\mathrm{diag}(\mathrm{i}, -\mathrm{i}) = \big(1 + O\big(t^{-\rho}\big)\big)\,\mathrm{diag}(\mathrm{i}, -\mathrm{i}).$$

Таким образом, все решения уравнения (6) в этом случае ограничены.

Пусть далее $q(t) \neq 0$. Выясним сначала, при каких значениях параметра λ уравнение (6) может иметь неограниченные решения. Систему (22) запишем в виде (8), где $v(t) = t^{-\rho}$, а матрицы A_0 и $R(t)$ определены в (24). Кроме того, матрицы $A_i(t)$ $(i = 1, \ldots, s)$ определяются следующим образом:

$$A_1(t) = (\omega_1 + a\cos\lambda t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_i(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\omega_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 2, \ldots, s.$$

Матрицы $A_i(t)$ $(i = 1, \ldots, s)$ являются периодическими с периодом $T = 2\pi/\lambda$. Воспользуемся теперь теоремой 1, а также замечанием к этой теореме. Поскольку собственными числами матрицы A_0 являются $\mu_{1,2} = \pm\mathrm{i}$, то условие (11), позволяющее осуществить в системе (22) усредняющую замену типа (9), имеет вид:

$$\lambda \neq \frac{2}{q}, \qquad q = \pm 1, \pm 2, \ldots\ . \tag{25}$$

В предположении условия (25) осуществим при достаточно больших t в системе (22) усредняющую замену

$$y_0 = \Big[I + Y_1(t)t^{-\rho} + Y_2(t)t^{-2\rho} + \ldots + Y_k(t)t^{-k\rho}\Big] y_1,$$

где $Y_i(t)$ $(i = 1, \ldots, k)$ — $(2\pi/\lambda)$-периодические матрицы с нулевым средним значением, а число $k \in \mathbb{N}$ выбрано таким образом, что $k\rho \leq 1 < (k+1)\rho$ (см. условие 4 теоремы 1). В результате этой замены получим усредненную систему

$$\dot{y}_1 = \Big(A_0 + A_1 t^{-\rho} + A_2 t^{-2\rho} + \ldots + A_k t^{-k\rho} + R_1(t)\Big) y_1, \tag{26}$$

где $R_1(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Система (26) представляет собой систему вида (20), где

$$V(t) = A_1 t^{-\rho} + A_2 t^{-2\rho} + \ldots + A_k t^{-k\rho}.$$

Из теоремы 2 следует, что $\operatorname{tr} A_i = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$. Кроме того, в силу формулы (13), определяющей матрицы A_i, заключаем, что все эти матрицы действительны. Следовательно, собственные числа матрицы $A_0 + V(t)$ при достаточно больших t являются чисто мнимыми и допускают асимптотическое представление вида

$$\mu_{1,2}(t) = \big(1 + O\big(t^{-\rho}\big)\big)\operatorname{diag}(\mathfrak{i}, -\mathfrak{i}).$$

Используя асимптотическое представление (21) для фундаментальной матрицы системы (26), заключаем, что при условии (25) асимптотика линейно независимых решений уравнения (6) при $t \to \infty$ определяется формулой (23). Следовательно, резонансными значениями (т.е. значениями параметрами λ, при которых уравнение (6) может иметь неограниченные решения) с учетом положительности параметра λ могут быть лишь значения

$$\lambda = \lambda_n = \frac{2}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Итак, в дальнейшем нас будет интересовать поведение решений уравнения (6) лишь при значениях параметра λ из множества (27). Будем говорить, что в уравнении (6) при некоторых условиях реализуется резонанс $\lambda = \lambda_n$, если при этих условиях уравнение (6), в котором $\lambda = \lambda_n$, имеет неограниченные при $t \geq t_0$ решения.

В системе (22) осуществим замену $y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathfrak{i} & -\mathfrak{i} \end{pmatrix} y_1$. Приходим к системе

$$\dot{y}_1 = \left[\begin{pmatrix} \mathfrak{i} & 0 \\ 0 & -\mathfrak{i} \end{pmatrix} + \frac{\mathfrak{i}}{2}\Big(q(t) + \omega^2(t) - 1\Big)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right] y_1. \tag{28}$$

В системе (28) сделаем замену $y_1 = \operatorname{diag}\left(e^{\mathfrak{i}t}, e^{-\mathfrak{i}t}\right) y_2$, предварительно разложив $\cos \lambda t$ по формуле Эйлера. Приходим к системе вида (8):

$$y_2' = \big[A_1(t)t^{-\rho} + A_2(t)t^{-2\rho} + \ldots + A_s(t)t^{-s\rho} + R(t)\big] y_2. \tag{29}$$

Здесь $R(t)$ — некоторая матрица из класса $L_1[t_0, \infty)$, а матрицы $A_i(t)$ $(i = 1, \ldots, s)$ имеют следующий вид:

$$A_1(t) = \frac{a\mathfrak{i}}{4}\begin{pmatrix} e^{\mathfrak{i}\lambda t} + e^{-\mathfrak{i}\lambda t} & e^{\mathfrak{i}(\lambda-2)t} + e^{-\mathfrak{i}(\lambda+2)t} \\ -e^{\mathfrak{i}(\lambda+2)t} - e^{-\mathfrak{i}(\lambda-2)t} & -e^{\mathfrak{i}\lambda t} - e^{-\mathfrak{i}\lambda t} \end{pmatrix} + \frac{\omega_1 \mathfrak{i}}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^{-2\mathfrak{i}t} \\ -e^{2\mathfrak{i}t} & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_j(t) = \frac{\omega_j \mathfrak{i}}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^{-2\mathfrak{i}t} \\ -e^{2\mathfrak{i}t} & -1 \end{pmatrix}, \quad j = 2, \ldots, s. \tag{30}$$

Используя теорему 1, от этой системы при достаточно больших t с помощью замены

$$y_2 = \Big[I + Y_1(t)t^{-\rho} + Y_2(t)t^{-2\rho} + \ldots + Y_k(t)t^{-k\rho}\Big] y_3,$$

где $Y_i(t)$ $(i = 1, \ldots, k)$ — матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением, перейдем к усредненной системе

$$\dot{y}_3 = \Big(A_1 t^{-\rho} + A_2 t^{-2\rho} + \ldots + A_k t^{-k\rho} + R_1(t)\Big) y_3. \tag{31}$$

Здесь $R_1(t) \in L_1[t_0, \infty)$, а параметр $k \in \mathbb{N}$ выбран так, что $k\rho \leq 1 < (k+1)\rho$.

Вид усредненной системы (31) будет различаться в зависимости от значения λ из резонансного множества (27). Будем далее рассматривать значения λ из этого множества.

- $\lambda = \lambda_1 = 2$.

Асимптотика решений системы (31) в этом случае будет определяться видом матрицы A_1. Имеем

$$A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(t)\big] = \frac{a\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\omega_1 \mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A_1 определяются следующей формулой:

$$\mu_{1,2} = \begin{cases} \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^2}{4} - \omega_1^2}, & |a| \geq 2|\omega_1|, \\ \pm\dfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\omega_1^2 - \dfrac{a^2}{4}}, & |a| < 2|\omega_1|. \end{cases} \tag{32}$$

Будем далее предполагать, что собственные числа матрицы A_1 различны, т.е.

$$|a| \neq 2|\omega_1|. \tag{33}$$

Усредненную систему (31) можно записать в следующем виде:

$$\dot{y}_3 = \Big[t^{-\rho}\big(A_1 + V(t)\big) + R_1(t)\Big] y_3, \tag{34}$$

где матрицы A_1, $V(t)$ и $R_1(t)$ при условии (33) обладают теми же свойствами, что и матрицы A_0, $V(t)$ и $R(t)$ в системе (20) соответственно. Очевидно, что система (34) при помощи замены того же типа, что и в системе (20), может быть приведена к L-диагональному виду

$$\dot{y}_4 = \big[t^{-\rho}\Lambda(t) + R_2(t)\big] y_4.$$

Здесь $\Lambda(t)$ — диагональная матрица, на диагонали которой расположены собственные числа матрицы $A_1 + V(t)$. Из теоремы 2 и утверждения 1 следует, что собственные числа матрицы $A_1 + V(t)$ (а следовательно, и матрицы $\Lambda(t)$) при достаточно больших t либо действительны, либо являются чисто мнимыми. В силу теоремы Левинсона линейно независимые решения системы (34) (т.е. системы (31)) имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$y^{(1,2)}(t) = \big[c_{1,2} + o(1)\big] \exp\Big\{\mu_{1,2}\int t^{-\rho} dt + O\Big(\int t^{-2\rho} dt\Big)\Big\}. \tag{35}$$

Здесь $\mu_{1,2}$ — собственные числа матрицы A_1, определяемые формулой (32), а $c_{1,2}$ — отвечающие им собственные векторы. Кроме того, аргумент функции $\exp\{\,\cdot\,\}$ при достаточно больших t принимает или только действительные значения или только чисто мнимые, в зависимости от вида собственных чисел $\mu_{1,2}$. Возвращаясь теперь к уравнению (6), заключаем, что у него имеются неограниченные решения при значениях параметра

$$|a| > 2|\omega_1|. \tag{36}$$

Значит, при $\lambda = 2$ и значениях параметра a, удовлетворяющих неравенству (36), в уравнении (6) имеет место параметрический резонанс, если $0 < \rho \leq 1$.

Случай, когда оказывается выполненным равенство $|a| = 2|\omega_1|$, нуждается в дополнительном исследовании. В этой работе мы не будем на этом останавливаться.

- $\lambda = \lambda_2 = 1$.

В этом случае матрица A_1 определяется формулой:

$$A_1 = \frac{\omega_1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Пусть $\omega_1 \neq 0$, тогда собственные числа матрицы A_1 различны и имеют вид

$$\mu_{1,2} = \pm\frac{\omega_1 \mathrm{i}}{2}. \tag{37}$$

Используя те же рассуждения, что и в случае $\lambda = \lambda_1$, заключаем, что линейно независимые решения усредненной системы (31) при $t \to \infty$ имеют асимптотику вида (35). В этой формуле величины $\mu_{1,2}$ определяются формулами (37), векторы c_1 и c_2 совпадают с векторами канонического базиса e_1 и e_2 в $\mathbb{R}^2$ соответственно, а величина в аргументе функции $\exp\{\,\cdot\,\}$ является чисто мнимой при всех достаточно больших t. В этом случае линейно независимые решения уравнения (6) имеют асимптотику вида (23):

$$x_{1,2}(t) = \big(1 + o(1)\big)\exp\Big\{\pm\mathrm{i}\Big(t + \frac{\omega_1}{2}\int t^{-\rho}dt + O\Big(\int t^{-2\rho}dt\Big)\Big)\Big\}. \tag{38}$$

Все решения этого уравнения ограничены при $t \geq t_0$.

Таким образом, неограниченные решения у уравнения (6) при $\lambda = 1$ могут существовать лишь в том случае, когда

$$\omega_1 = 0. \tag{39}$$

Рассмотрим далее эту ситуацию. В силу (39) матрица A_1 является нулевой и асимптотика решений системы (31) в главном будет определяться матрицей A_2. Имеем

$$A_2 = \mathrm{M}\big[A_2(t) + A_1(t)Y_1(t)\big], \qquad \dot{Y}_1 = A_1(t),$$

где матрица $Y_1(t)$ имеет нулевое среднее значение. Проводя несложные вычисления, получаем следующую формулу для матрицы A_2 в случае $\lambda = 1$:

$$A_2 = \frac{a^2\mathrm{i}}{16}\begin{pmatrix} -4/3 & -2 \\ 2 & 4/3 \end{pmatrix} + \frac{\omega_2\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A_2 имеют следующий вид:

$$\mu_{1,2}=\begin{cases}\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{a^2}{12}+\omega_2\right)\left(\dfrac{5a^2}{12}-\omega_2\right)}, & -\dfrac{a^2}{12}\le\omega_2\le\dfrac{5a^2}{12},\\ \pm\dfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\left(\dfrac{a^2}{12}+\omega_2\right)\left(\omega_2-\dfrac{5a^2}{12}\right)}, & \omega_2\in\left(-\infty,-\dfrac{a^2}{12}\right)\bigcup\left(\dfrac{5a^2}{12},+\infty\right).\end{cases}\tag{40}$$

Отметим, что неограниченные колебания в системе (31) при условии (39) и $\lambda=\lambda_2$ возможны лишь в том случае, если

$$0\le\rho\le\frac{1}{2}.\tag{41}$$

Действительно, если $\rho>1/2$, то, поскольку $A_1=0$, система (31) имеет L-диагональную форму (16) с нулевой матрицей $\Lambda(t)$. В этом случае фундаментальные решения системы (31) при $t\to\infty$ имеют асимптотику вида

$$y^{(1)}(t)=e_1+o(1),\qquad y^{(2)}(t)=e_2+o(1),$$

где e_1 и e_2 — векторы канонического базиса в $\mathbb{R}^2$. Возвращаясь к уравнению (6), получаем асимптотические формулы для его линейно независимых решений при $t\to\infty$:

$$x_{1,2}(t)=\big(1+o(1)\big)e^{\pm\mathrm{i}t}.\tag{42}$$

Итак, пусть далее выполнено неравенство (41). Будем считать, что собственные числа матрицы A_2 различны, т.е. выполнены неравенства

$$\omega_2\ne-\frac{a^2}{12}\quad\text{и}\quad\omega_2\ne\frac{5a^2}{12}.\tag{43}$$

Случай, когда одно из неравенств (43) обращается в равенство, в нашей работе рассматриваться не будет. Действуя аналогично случаю $\lambda=\lambda_1$, получаем следующие асимптотические представления для базисных решений системы (31) при $t\to\infty$:

$$y^{(1,2)}(t)=\big[c_{1,2}+o(1)\big]\exp\Big\{\mu_{1,2}\int t^{-2\rho}dt+O\Big(\int t^{-3\rho}dt\Big)\Big\}.\tag{44}$$

Здесь $\mu_{1,2}$ — собственные числа матрицы A_2, определяемые формулой (40), а $c_{1,2}$ — отвечающие им собственные векторы. Кроме того, аргумент функции $\exp\{\,\cdot\,\}$ при достаточно больших t принимает или только действительные значения, или только чисто мнимые, в зависимости от вида собственных чисел $\mu_{1,2}$. Таким образом, при условии

$$-\frac{a^2}{12}<\omega_2<\frac{5a^2}{12}\tag{45}$$

уравнение (6) имеет неограниченные решения. Двойное неравенство (45) удобно переписать относительно величины $|a|$, характеризующей амплитуду внешнего воздействия. Имеем

$$|a|>\sqrt{\max\left(\frac{12\omega_2}{5},-12\omega_2\right)}.\tag{46}$$

Следовательно, в интервалах значений величины $|a|$, определяемых условием (46), в уравнении (6) наблюдается параметрический резонанс.

Заметим, что если в уравнении (6) реализуется резонанс $\lambda = \lambda_2$ при подходящих значениях a (для этого достаточно выполнения условий (39), (41)), то при тех же значениях ω_1 и ω_2 в этом уравнении реализуется и резонанс $\lambda = \lambda_1$ для всех $0 < \rho \le 1$. Из (36), (39) следует, что резонанс $\lambda = \lambda_1$ имеет место при любых значениях параметра $a \ne 0$.

- $\lambda = \lambda_3 = 2/3$.

Вычисляя матрицы A_1 и A_2, получаем:

$$A_1 = \frac{\omega_1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \Big(-\frac{9a^2}{128} + \frac{\omega_2}{2}\Big)\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Если $\omega_1 \ne 0$, то собственные числа матрицы A_1 различны и справедливы все те же рассуждения, которые были проведены нами в случае $\lambda = \lambda_2$. В этом случае линейно независимые решения уравнения (6) имеют асимптотику вида (38), а значит, все решения этого уравнения ограничены при $t \ge t_0$. Поэтому для существования неограниченных решений в рассматриваемом случае необходимо выполнение условия (39). Итак, в системе (31) вновь $A_1 = 0$. Рассмотрим матрицу A_2. При условии

$$\omega_2 \ne \frac{9a^2}{64} \tag{48}$$

собственные числа матрицы A_2 различны и имеют вид

$$\mu_{1,2} = \pm\Big(\frac{\omega_2}{2} - \frac{9a^2}{128}\Big)\mathrm{i}. \tag{49}$$

Систему (31) можно в этом случае записать в виде

$$\dot y_3 = \Big[t^{-2\rho}\big(A_2 + V(t)\big) + R_1(t)\Big]y_3,$$

где матрицы A_2, $V(t)$ и $R_1(t)$ при условии (48) обладают теми же свойствами, что и матрицы A_0, $V(t)$ и $R(t)$ в системе (20) соответственно. Дальнейшие рассуждения, связанные с построением асимптотики решений системы (31), полностью повторяют рассуждения, проведенные нами в случае $\lambda = \lambda_1$ относительно системы (34). Следовательно, если выполнено условие (48), линейно независимые решения системы (31) при $t \to \infty$ имеют асимптотику вида (44). В этой формуле величины $\mu_{1,2}$ определяются формулами (49), векторы c_1 и c_2 совпадают с векторами канонического базиса e_1 и e_2 в $\mathbb{R}^2$ соответственно, а величина в аргументе функции $\exp\{\,\cdot\,\}$ является чисто мнимой при всех достаточно больших t. В этом случае линейно независимые решения уравнения (6) имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$x_{1,2}(t) = \big(1 + o(1)\big)\exp\Big\{\pm\mathrm{i}\Big(t + \Big(\frac{\omega_2}{2} - \frac{9a^2}{128}\Big)\int t^{-2\rho}dt + O\Big(\int t^{-3\rho}dt\Big)\Big)\Big\}.$$

Вновь все решения уравнения (6) оказываются ограниченными.

Таким образом, мы приходим к выводу, что если в уравнении (6) при $\lambda = \lambda_3$ имеются неограниченные решения, то вместе с условием (39) должно быть выполнено и условие

$$\omega_2 = \frac{9a^2}{64}. \tag{50}$$

Из условия (50) с необходимостью вытекает следующий результат. Резонанс $\lambda = \lambda_3$ в уравнении (6) может возникнуть лишь в том случае, если коэффициент ω_2 в разложении (7) функции $\omega^2(t)$ положителен. Кроме того, этот резонанс может наблюдаться лишь в двух точках:

$$a = \pm\frac{8}{3}\sqrt{\omega_2}, \quad \omega_2 > 0. \tag{51}$$

Получим теперь некоторые дополнительные условия, при которых резонанс $\lambda = \lambda_3$ в точках (51) действительно реализуется.

Отметим, что неограниченные колебания в системе (31) (а следовательно, и в уравнении (6)) при $\lambda = \lambda_3$ в точках (51) возможны лишь тогда, когда

$$0 \le \rho \le \frac{1}{3}. \tag{52}$$

Действительно, если $\rho > 1/3$, то поскольку $A_1 = A_2 = 0$ (это следует из (39), (47) и (50)), система (31) имеет L-диагональную форму (16) с нулевой матрицей $\Lambda(t)$. В этом случае при условиях (39), (51) и $\lambda = \lambda_3$ линейно независимые решения уравнения (6) при $t \to \infty$ имеют асимптотику вида (42).

Для дальнейшего исследования нам необходимо вычислить матрицу A_3. Имеем

$$A_3 = \mathrm{M}\big[A_3(t) + A_2(t)Y_1(t) + A_1(t)Y_2(t)\big],$$

где матрицы $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ с нулевым средним значением — решения следующих матричных дифференциальных уравнений:

$$\dot{Y}_1 = A_1(t), \qquad \dot{Y}_2 = A_2(t) + A_1(t)Y_1(t).$$

Замечая, что $\mathrm{M}\big[A_2(t)Y_1(t)\big] = 0$, в результате несложных, но довольно трудоемких вычислений, приходим к следующей формуле для матрицы A_3 в случае $\lambda = \lambda_3$:

$$A_3 = \frac{81a^3\mathrm{i}}{1024}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\omega_3\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A_3 имеют следующий вид:

$$\mu_{1,2} = \begin{cases} \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{81a^3}{512}\right)^2 - \omega_3^2}, & |\omega_3| \le \dfrac{81|a|^3}{512}, \\ \pm\dfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\omega_3^2 - \left(\dfrac{81a^3}{512}\right)^2}, & |\omega_3| > \dfrac{81|a|^3}{512}. \end{cases} \tag{53}$$

Считаем, что собственные числа матрицы A_3 различны, т.е. выполнено неравенство

$$|\omega_3| \ne \frac{81|a|^3}{512}. \tag{54}$$

Случай равенства в (54) рассматриваться здесь не будет.

Действуя аналогично рассмотренным выше случаям, получаем следующие асимптотические представления для базисных решений системы (31) при $t \to \infty$:

$$y^{(1,2)}(t) = \big[c_{1,2} + o(1)\big]\exp\Big\{\mu_{1,2}\int t^{-3\rho}dt + O\Big(\int t^{-4\rho}dt\Big)\Big\}.$$

Здесь $\mu_{1,2}$ — собственные числа матрицы A_3, определяемые формулой (53), а $c_{1,2}$ — отвечающие им собственные векторы. Как и ранее, аргумент функции $\exp\{\,\cdot\,\}$ при достаточно больших t принимает или только действительные значения или только чисто мнимые, в зависимости от вида собственных чисел $\mu_{1,2}$. Таким образом, если

$$|\omega_3| < \frac{81|a|^3}{512}, \tag{55}$$

а также выполнены условия (39), (52), то в точках (51) при $\lambda = \lambda_3$ уравнение (6) имеет неограниченные решения. Из (51) и (55), в частности, следует, что резонанс $\lambda = \lambda_3$ реализуется в точках (51), если выполнены условия (39), (52), а также неравенства

$$|\omega_3| < 3\omega_2^{3/2}, \quad \omega_2 > 0.$$

Заметим теперь, что если резонанс $\lambda = \lambda_3$ в уравнении (6) реализуется при некоторых значениях коэффициентов ω_1, ω_2 и ω_3, то при этих же значениях коэффициентов в этом уравнении реализуются резонансы $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$. При этом из (46), в силу положительности ω_2, следует, что резонанс $\lambda = \lambda_2$ имеет место для $0 < \rho \le 1/2$ при значениях параметра a таких, что

$$|a| > \sqrt{\frac{12\omega_2}{5}}. \tag{56}$$

Резонанс же $\lambda = \lambda_1$ имеет место при $0 < \rho \le 1$ и всех значениях параметра a в силу (36) и (39).

Следовательно, при условии (52) в уравнении (6) возможна реализация сразу трех резонансов ($\lambda = \lambda_i$, $i = 1, 2, 3$) при подходящих значениях параметра a. Чтобы выяснить возможность одновременной реализации в уравнении (6) большего числа резонансов, необходимо продолжить исследование динамики решений уравнения (6) при резонансных значениях $\lambda = \lambda_n$.

- $\lambda = \lambda_4 = 1/2$.

Вычисляя матрицы A_1, A_2 и A_3 получаем:

$$A_1 = \frac{\omega_1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \left(-\frac{a^2}{15} + \frac{\omega_2}{2}\right)\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \frac{\omega_3}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}. \tag{57}$$

Если $\omega_1 \ne 0$, то собственные числа матрицы A_1 различны и справедливы все те же рассуждения, которые были проведены нами в случаях $\lambda = \lambda_2$ и $\lambda = \lambda_3$. В этом случае линейно независимые решения уравнения (6) имеют асимптотику вида (38), а значит, все решения этого уравнения ограничены при $t \ge t_0$. Поэтому для существования неограниченных решений в рассматриваемом случае необходимо выполнение условия (39). Итак, в системе (31) вновь $A_1 = 0$.

Далее, если

$$\omega_2 \ne \frac{2a^2}{15},$$

то аналогично случаю $\lambda = \lambda_3$ получаем следующие асимптотические формулы для линейно независимых решений уравнения (6) при $t \to \infty$:

$$x_{1,2}(t) = \big(1 + o(1)\big)\exp\Big\{\pm\mathrm{i}\Big(t + \Big(\frac{\omega_2}{2} - \frac{a^2}{15}\Big)\int t^{-2\rho}dt + O\Big(\int t^{-3\rho}dt\Big)\Big)\Big\}.$$

Как и в случае $\lambda = \lambda_3$, заключаем, что вместе с условием (39) должно быть выполнено и условие
$$\omega_2 = \frac{2a^2}{15}. \tag{58}$$
Из условия (58) вновь выводим, что резонанс $\lambda = \lambda_4$ в уравнении (6) может возникнуть лишь в том случае, если коэффициент ω_2 в разложении (7) функции $\omega^2(t)$ положителен. Этот резонанс может наблюдаться лишь в двух точках:
$$a = \pm\sqrt{\frac{15\omega_2}{2}}, \quad \omega_2 > 0. \tag{59}$$
Следовательно, матрица A_2 в системе (31) нулевая.

Пусть далее выполнены условия (39) и (58). Если теперь $\omega_3 \neq 0$, то линейно независимые решения уравнения (6) при $t \to \infty$ имеют следующую асимптотику:
$$x_{1,2}(t) = \big(1 + o(1)\big) \exp\Big\{\pm\mathrm{i}\Big(t + \frac{\omega_3}{2}\int t^{-3\rho}dt + O\Big(\int t^{-4\rho}dt\Big)\Big)\Big\}.$$
Вновь все решения уравнения (6) оказываются ограниченными при $t \geq t_0$. Таким образом, для реализации резонанса $\lambda = \lambda_4$ необходимо, чтобы
$$\omega_3 = 0. \tag{60}$$
Аналогично случаю $\lambda = \lambda_3$ заключаем, что резонанс $\lambda = \lambda_4$ может наблюдаться лишь при условии
$$0 \leq \rho \leq \frac{1}{4}. \tag{61}$$
Действительно, если $\rho > 1/4$ и выполнены условия (39), (58), (60) и $\lambda = \lambda_4$, то линейно независимые решения уравнения (6) при $t \to \infty$ имеют асимптотику вида (42).

Итак, пусть выполнены условия (39), (58), (60) и (61), т.е. матрицы A_1, A_2 и A_3 в системе (31) нулевые. Нам необходимо вычислить матрицу A_4. Имеем
$$A_4 = \mathrm{M}\big[A_4(t) + A_3(t)Y_1(t) + A_2(t)Y_2(t) + A_1(t)Y_3(t)\big],$$
где матрицы $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ и $Y_3(t)$ с нулевым средним значением — решения следующих матричных дифференциальных уравнений:
$$\dot{Y}_1 = A_1(t), \qquad \dot{Y}_2 = A_2(t) + A_1(t)Y_1(t), \qquad \dot{Y}_3 = A_3(t) + A_2(t)Y_1(t) + A_1(t)Y_2(t).$$
Замечая, что $\mathrm{M}\big[A_3(t)Y_1(t)\big] = 0$, в результате довольно утомительных вычислений, получаем следующую формулу для матрицы A_4 в случае $\lambda = \lambda_4$:
$$A_4 = -\frac{a^4\mathrm{i}}{6750}\begin{pmatrix} 58 & 375 \\ -375 & 58 \end{pmatrix} + \frac{\omega_4\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Собственные числа матрицы A_4 имеют следующий вид:
$$\mu_{1,2} = \begin{cases} \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{317a^4}{3375} + \omega_4\right)\left(\dfrac{433a^4}{3375} - \omega_4\right)}, & -\dfrac{317a^4}{3375} \leq \omega_4 \leq \dfrac{433a^4}{3375}, \\ \pm\dfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\left(\dfrac{317a^4}{3375} + \omega_4\right)\left(\omega_4 - \dfrac{433a^4}{3375}\right)}, & \omega_4 \in \left(-\infty, -\dfrac{317a^4}{3375}\right) \bigcup \left(\dfrac{433a^4}{3375}, +\infty\right). \end{cases} \tag{62}$$

Считаем далее, что собственные числа матрицы A_4 различны, т.е. выполнены неравенства
$$\omega_4 \neq -\frac{317a^4}{3375} \quad \text{и} \quad \omega_4 \neq \frac{433a^4}{3375}. \tag{63}$$
Случай, когда одно из неравенств (63) обращается в равенство, в нашей работе рассматриваться не будет.

Действуя аналогично рассмотренным выше случаям, получаем следующие асимптотические представления для базисных решений системы (31) при $t \to \infty$:
$$y^{(1,2)}(t) = \big[c_{1,2} + o(1)\big] \exp\Big\{\mu_{1,2} \int t^{-4\rho} dt + O\Big(\int t^{-5\rho} dt\Big)\Big\}.$$
Здесь $\mu_{1,2}$ — собственные числа матрицы A_4, определяемые формулой (62), а $c_{1,2}$ — отвечающие им собственные векторы. Как и ранее, аргумент функции $\exp\{\,\cdot\,\}$ при достаточно больших t принимает или только действительные значения, или только чисто мнимые, в зависимости от вида собственных чисел $\mu_{1,2}$. Таким образом, если
$$-\frac{317a^4}{3375} < \omega_4 < \frac{433a^4}{3375}, \tag{64}$$
а также выполнены условия (39), (60) и (61), то в точках (59) при $\lambda = \lambda_4$ уравнение (6) имеет неограниченные решения. Из (59) и (64), в частности, следует, что резонанс $\lambda = \lambda_4$ реализуется в точках (59), если выполнены условия (39), (60) и (61), а также неравенства
$$-\frac{317\omega_2^2}{60} < \omega_4 < \frac{433\omega_2^2}{60}, \quad \omega_2 > 0. \tag{65}$$
Заметим наконец, что если резонанс $\lambda = \lambda_4$ в уравнении (6) реализуется при некоторых значениях коэффициентов ω_i $(i = 1, \ldots, 4)$, то при этих же значениях коэффициентов в этом уравнении реализуются резонансы $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ и $\lambda = \lambda_3$. Резонанс $\lambda = \lambda_3$ имеет место для $0 < \rho \leq 1/3$ и возникает в точках (51). Далее, резонанс $\lambda = \lambda_2$ в силу положительности коэффициента ω_2 имеет место для $0 < \rho \leq 1/2$ при значениях параметра a, удовлетворяющих неравенству (56). Резонанс же $\lambda = \lambda_1$ имеет место при $0 < \rho \leq 1$ и всех значениях параметра a в силу (36) и (39).

Следовательно, при условии (61) в уравнении (6) возможна реализация всех четырех резонансов ($\lambda = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, 4$) при подходящих значениях параметра a.

- $\lambda = \lambda_n = 2/n, \quad n \geq 5,\ n \in \mathbb{N}$.

Вычисляя несколько первых матриц в усредненной системе (31), получаем:
$$A_1 = \frac{\omega_1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \Big(-\frac{a^2}{4(4-\lambda_n^2)} + \frac{\omega_2}{2}\Big)\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},$$
$$A_3 = \frac{\omega_3}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \Big(-\frac{a^4(7\lambda_n^2+20)}{64(1-\lambda_n^2)(4-\lambda_n^2)^3} + \frac{\omega_4}{2}\Big)\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}. \tag{66}$$
Здесь при вычислении матрицы A_4 мы использовали тот факт, что для реализации резонанса $\lambda = \lambda_n$ необходимо, чтобы $A_2 = 0$. Точно так же, как это было сделано в предыдущих случаях, получаем несколько из числа необходимых условий реализации резонанса $\lambda = \lambda_n$ $(n \geq 5)$:
$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \frac{a^2}{2(4-\lambda_n^2)}, \quad \omega_3 = 0, \quad \omega_4 = \frac{a^4(7\lambda_n^2+20)}{32(1-\lambda_n^2)(4-\lambda_n^2)^3}. \tag{67}$$

Кроме того, несложно показать, что резонанс $\lambda = \lambda_n$ может возникнуть лишь в случае, когда

$$0 < \rho \le \frac{1}{n}. \tag{68}$$

Из условий (67) реализации резонанса $\lambda = \lambda_n$ следует, что этот резонанс может наблюдаться лишь в точках

$$a = \pm\sqrt{2(4-\lambda_n^2)\omega_2}. \tag{69}$$

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2. *В уравнении* (6) *при фиксированных коэффициентах* ω_i *(*$i = 1, \ldots, s$*) разложения* (7) *функции* $\omega^2(t)$ *может реализоваться не более одного резонанса вида* $\lambda = \lambda_n$*, где* $n \ge 5$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть в уравнении (6) реализуются резонансы λ_p и λ_r, где $r \ne p$ и $r, p \ge 5$. Из (67) следует, что в этом случае должны быть одновременно выполнены равенства:

$$\omega_4 = \frac{(7\lambda_p^2+20)\omega_2^2}{8(1-\lambda_p^2)(4-\lambda_p^2)} \quad \text{и} \quad \omega_4 = \frac{(7\lambda_r^2+20)\omega_2^2}{8(1-\lambda_r^2)(4-\lambda_r^2)}. \tag{70}$$

Откуда, поскольку $\omega_2 \ne 0$,

$$\frac{7\lambda_p^2+20}{(1-\lambda_p^2)(4-\lambda_p^2)} = \frac{7\lambda_r^2+20}{(1-\lambda_r^2)(4-\lambda_r^2)}. \tag{71}$$

Легко показать, что функция

$$f(\lambda) = \frac{7\lambda^2+20}{(1-\lambda^2)(4-\lambda^2)} \tag{72}$$

монотонно возрастает на промежутке $(0,1)$. Отсюда с учетом (27) следует, что равенство (71) не может быть выполнено, поскольку $\lambda_p \ne \lambda_r$ и $\lambda_p, \lambda_r \in (0,1)$. □

Определим далее условия, при которых в уравнении (6) может реализоваться резонанс

$$\lambda = \lambda_5 = \frac{2}{5}.$$

Из (67) следует, что для реализации этого резонанса необходимо выполнение следующих условий:

$$\omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2 = \frac{25a^2}{192}, \quad \omega_4 = \frac{11 \cdot 25^3 \cdot a^4}{64 \cdot 21 \cdot 96^2}. \tag{73}$$

Из (73) выводим, что резонанс $\lambda = \lambda_5$ может возникнуть лишь в точках

$$a = \pm\frac{8\sqrt{3\omega_2}}{5}, \quad \omega_2 > 0, \tag{74}$$

а коэффициенты ω_2 и ω_4 должны быть связаны равенством

$$\omega_4 = \frac{275\omega_2^2}{336}. \tag{75}$$

Кроме того, из (68) следует, что этот резонанс может наблюдаться лишь при условии

$$0 < \rho \le \frac{1}{5}. \tag{76}$$

В силу (73) матрицы A_i $(i = 1, \ldots, 4)$ в системе (31) нулевые. Нам необходимо вычислить матрицу A_5. Имеем

$$A_5 = \mathrm{M}\big[A_5(t) + A_4(t)Y_1(t) + A_3(t)Y_2(t) + A_2(t)Y_3(t) + A_1(t)Y_4(t)\big],$$

где матрицы $Y_i(t)$ $(i = 1, \ldots, 4)$ с нулевым средним значением — решения следующих матричных дифференциальных уравнений:

$$\dot Y_1 = A_1(t), \qquad \dot Y_2 = A_2(t) + A_1(t)Y_1(t), \qquad \dot Y_3 = A_3(t) + A_2(t)Y_1(t) + A_1(t)Y_2(t),$$
$$\dot Y_4 = A_4(t) + A_3(t)Y_1(t) + A_2(t)Y_2(t) + A_1(t)Y_3(t).$$

В результате трудоемких вычислений получаем следующую формулу для матрицы A_5 в случае $\lambda = \lambda_5$:

$$A_5 = \frac{5^8 a^5}{9\cdot 2^{20}}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0\end{pmatrix} + \frac{\omega_5}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A_5 имеют следующий вид:

$$\mu_{1,2} = \begin{cases} \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{5^8 a^5}{9\cdot 2^{19}}\right)^2 - \omega_5^2}, & |\omega_5| \le \dfrac{5^8|a|^5}{9\cdot 2^{19}}, \\ \pm\dfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\omega_5^2 - \left(\dfrac{5^8 a^5}{9\cdot 2^{19}}\right)^2}, & |\omega_5| > \dfrac{5^8|a|^5}{9\cdot 2^{19}}. \end{cases} \tag{77}$$

Считаем, что собственные числа матрицы A_5 различны, т.е. выполнено неравенство

$$|\omega_5| \ne \frac{5^8|a|^5}{9\cdot 2^{19}}. \tag{78}$$

Действуя аналогично рассмотренным выше случаям, получаем следующие асимптотические представления для базисных решений системы (31) при $t \to \infty$:

$$y^{(1,2)}(t) = \big[c_{1,2} + o(1)\big]\exp\Big\{\mu_{1,2}\int t^{-5\rho}dt + O\Big(\int t^{-6\rho}dt\Big)\Big\}.$$

Здесь $\mu_{1,2}$ — собственные числа матрицы A_5, определяемые формулой (77), а $c_{1,2}$ — отвечающие им собственные векторы. Как и ранее, аргумент функции $\exp\{\,\cdot\,\}$ при достаточно больших t принимает или только действительные значения, или только чисто мнимые, в зависимости от вида собственных чисел $\mu_{1,2}$. Таким образом, если

$$|\omega_5| < \frac{5^8|a|^5}{9\cdot 2^{19}}, \tag{79}$$

а также выполнены условия (73), (75), (76), то в точках (74) при $\lambda = \lambda_5$ уравнение (6) имеет неограниченные решения. Из (74) и (79), в частности, следует, что резонанс $\lambda = \lambda_5$ реализуется в точках (74), если выполнены условия (73), (75), (76), а также неравенства

$$|\omega_5| < \frac{125\sqrt{3}\omega_2^{5/2}}{16}, \quad \omega_2 > 0.$$

В завершении этого пункта заметим, что если резонанс $\lambda = \lambda_n$ ($n \geq 5$) в уравнении (6) реализуется при некоторых значениях коэффициентов ω_i ($i = 1, \ldots, s$), то при этих же значениях коэффициентов в этом уравнении реализуются резонансы $\lambda = \lambda_i$ ($i = 1, \ldots, 4$). Действительно, резонанс $\lambda = \lambda_4$ реализуется в точках (59) для всех $0 < \rho \leq 1/4$ в силу выполнения неравенства (65). Это неравенство оказывается выполненным, поскольку: коэффициенты ω_2 и ω_4 связаны равенством типа (70); функция $f(\lambda)$, определяемая формулой (72), монотонно возрастает на промежутке $(0, 1)$; резонансы λ_n ($n \geq 5$) принадлежат отрезку $(0, 1)$ и $\lambda_{n+1} < \lambda_n$; для $\lambda = \lambda_5$ выполнено равенство (75), которое удовлетворяет неравенству (65). Как было показано ранее, выполнение резонанса $\lambda = \lambda_4$ влечет выполнение резонансов $\lambda = \lambda_i$ ($i = 1, 2, 3$) при подходящих значениях параметров a и ρ.

Сформулируем теперь основной результат данной работы, являющийся следствием отмеченных в предыдущем абзаце соображений, а также утверждения 2.

Теорема 4. *Пусть коэффициенты ω_i ($i = 1, \ldots, s$) разложения (7) функции $\omega^2(t)$ фиксированы (т.е. не зависят от параметров внешнего возмущения (4)). Тогда в уравнении (6) резонанс может реализоваться не более чем при пяти значениях параметра $\lambda > 0$. Этими резонансными значениями являются значения $\lambda = \lambda_i$ ($i = 1, \ldots, 4$) и одно из значений вида $\lambda = \lambda_n$, где $n \geq 5$, а величины λ_n определяются формулой (27). При этом, если в уравнении (6) реализуется резонанс $\lambda = \lambda_r$, то реализуются и все резонансы $\lambda = \lambda_i$ из числа перечисленных выше, где $i < r$. Условия возникновения резонанса в уравнении (6) приведены в таблице 1.*

Таблица 1. Условия резонанса в уравнении (6). Символом M в третьей строке таблицы обозначена величина $\sqrt{\max\bigl(12\omega_2/5, -12\omega_2\bigr)}$.

$n=$	$\lambda=\lambda_n$	Условия возникновения резонанса	Точки резонанса в плоскости (a, λ)
1	$\lambda_1=2$	$0 < \rho \leq 1$	$(a, 2)$, $\lvert a\rvert > 2\lvert\omega_1\rvert$
2	$\lambda_2=1$	$0 < \rho \leq 1/2$, $\omega_1 = 0$	$(a, 1)$, $\lvert a\rvert > M$
3	$\lambda_3=2/3$	$0 < \rho \leq 1/3$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 > 0$, $\lvert\omega_3\rvert < 3\omega_2^{3/2}$	$\bigl(\pm 8\sqrt{\omega_2}/3, 2/3\bigr)$
4	$\lambda_4=1/2$	$0 < \rho \leq 1/4$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 > 0$ $\omega_3 = 0$, $-317\omega_2^2/60 < \omega_4 < 433\omega_2^2/60$	$\bigl(\pm\sqrt{(15\omega_2/2)}, 1/2\bigr)$
5	$\lambda_5=2/5$	$0 < \rho \leq 1/5$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 > 0$, $\omega_3 = 0$, $\omega_4 = 275\omega_2^2/336$, $\lvert\omega_5\rvert < 125\sqrt{3}\omega_2^{5/2}/16$	$\bigl(\pm 8\sqrt{3\omega_2}/5, 2/5\bigr)$
$n>5$	$\lambda_n=2/n$	$0 < \rho \leq 1/n$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 > 0$, $\omega_3 = 0$, $\omega_4 = (7\lambda_n^2 + 20)\omega_2^2/\bigl(8(1-\lambda_n^2)(4-\lambda_n^2)\bigr)$, $\omega_5 = 0, \ldots$	$\bigl(\pm\sqrt{2(4-\lambda_n^2)\omega_2}, 2/n\bigr)$

На рис. 1 изображены точки резонанса в плоскости параметров (λ, a) для резонансных значений $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1, \dots, 5)$, определяемые соответствующими значениями из четвертого столбца таблицы 1. Таким образом, параметрический резонанс, наблюдаемый в уравнении (6), имеет точечный характер.

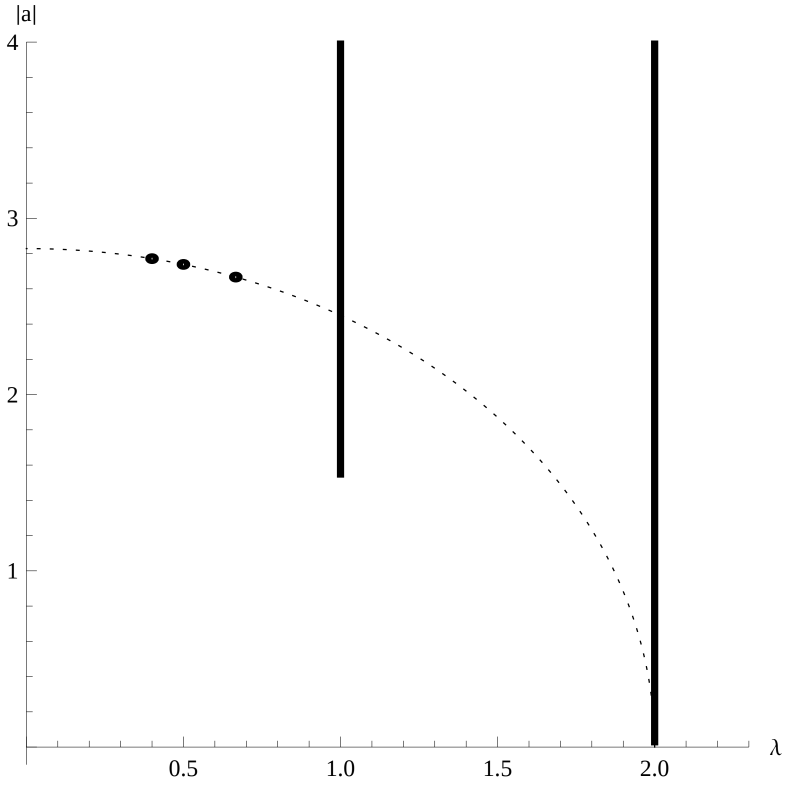

Рис. 1. На рисунке построены точки резонанса (выделены жирным) в случае $\omega_2 = 1$ для резонансных значений $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1, \dots, 5)$. Пунктиром обозначена дуга эллипса $a^2 = 2\omega_2(4 - \lambda^2)$, на которую ложатся точки резонанса для $\lambda = \lambda_n$ $(n \geq 3)$.

4. Заключение

В завершении этой работы заметим, что условия, накладываемые на функцию $\omega^2(t)$ для реализации, по крайней мере, первых четырех резонансов $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1, \dots, 4)$, не являются сколько-нибудь ограничительными. Примеры соответствующих функций мы приводим ниже. Условия, необходимые для реализации резонансов более высокого порядка в уравнении (6), выглядят существенно более ограничительными. Так, для резонанса $\lambda = \lambda_5$ требуется выполнение точного равенства (75), а для резонансов $\lambda = \lambda_n$ $(n > 5)$ среди прочих условий необходимо выполнение равенств типа (70).

Приведем далее примеры функций $\omega^2(t)$, для которых в уравнении (6) возникают резонансы $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1, \dots, 4)$ в соответствующих точках плоскости (a, λ) (см. табл. 1).

<u>*Пример.*</u>

Пусть $f(z)$ — пять раз непрерывно дифференцируемая в некоторой окрестности точки $z=0$ функция, относительно которой выполнены следующие условия:

1^0. $f(0)=1$;

2^0. $f'(0)=f'''(0)=0$;

3^0. $f''(0)>0$;

4^0. $-\dfrac{317}{10}\big(f''(0)\big)^2 < f''''(0) < \dfrac{433}{10}\big(f''(0)\big)^2$.

Тогда, если $b\in\mathbb{R}$ $(b\neq 0)$, то функция вида

$$\omega^2(t)=f\Big(\frac{b}{t^\alpha}\Big)$$

удовлетворяет всем условиям появления резонансов $\lambda=\lambda_i$ $(i=1,\dots,4)$ в уравнении (6) при подходящем выборе параметров a и ρ. Примеры функций $f(z)$, удовлетворяющие условиям 1^0–4^0, доставляют, в частности, функции

$$f(z)=\operatorname{ch} z;\exp(z^2);1+z^2+z^4;\sqrt{1+z^2}.$$

В заключение заметим, что, применяя используемый в работе метод, можно исследовать уравнение более общего вида, нежели уравнение (6), (7):

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\big(\omega^2(t)+v(t)P(t)\big)x=0. \tag{80}$$

Здесь $P(t)$ — периодическая функция или тригонометрический многочлен, а функция $v(t)$ удовлетворяет условиям 2 – 4 теоремы 1 и не меняет своего знака при достаточно больших t. Кроме того, функция $\omega^2(t)$ допускает при $t\to\infty$ представление вида

$$\omega^2(t)=1+\omega_1 v(t)+\omega_2 v^2(t)+\ldots+\omega_s v^s(t)+r(t), \tag{81}$$

для некоторого $s\in\mathbb{N}$. В формуле (81) коэффициенты $\omega_i\in\mathbb{R}$, $(i=1,\dots,s)$, а функция $r(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0,\infty)$. Точно так же, как это было сделано для уравнения (6), (7), мы можем установить существование в уравнении (80), (81) резонансных значений, которые отсутствуют в уравнении (80) с постоянной частотой собственных колебаний $\omega^2(t)\equiv\omega_0^2>0$. По всей видимости, описанное в данной работе явление (возникновение новых резонансных частот у осциллятора под действием колебательно убывающего возмущения) характерно для широкого класса линейных осцилляторов с переменной частотой собственных колебаний $\omega^2(t)$, для которых эта частота «не слишком быстро» стремится к своему предельному значению $\omega_0^2>0$.

Список литературы

1. *Бурд В.Ш., Каракулин В.А.* Асимптотическое интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами // Математические заметки. 1998. Т. 64, №5. С. 658–666. (English transl.: *Burd V.Sh., Karakulin V.A.* On the asymptotic integration of systems of linear differential equations with oscillatory decreasing coefficients // Math. Notes. 1998. V. 64, No. 5. P. 571–578.)

2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. (*Bogoliubov N.N., Mitropolskiy Yu.A.* Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations. New York: Gordon and Breach, 1961.)

3. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. (*Sagdeev R.Z., Usikov D.A., Zaslavsky G.M.* Nonlinear Physics: From Pendulum to Turbulence and Chaos. New York: Harwood Academic Publishers, 1988.)

4. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958. (*Coddington E.A., Levinson N.* Theory of Ordinary Differential Equations. New York: McGraw-Hill, 1955.)

5. *Нестеров П.Н.* Построение асимптотики решений одномерного уравнения Шредингера с быстро осциллирующим потенциалом // Математические заметки. 2006. Т. 80, №2. С. 240–250. (English transl.: *Nesterov P.N.* Construction of the asymptotics of the solutions of the one-dimensional Schrödinger equation with rapidly oscillating potential // Math. Notes. 2006. V. 80, No. 2. P. 233–243.)

6. *Нестеров П.Н.* Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, №6. С. 731–742. (English transl.: *Nesterov P.N.* Averaging method in the asymptotic integration problem for systems with oscillatory-decreasing doefficients // Differ. Equ. 2007. V. 43, No. 6. P. 745–756.)

7. *Переломов А.М.* Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987. (*Perelomov A.* Generalized Coherent States and Their Applications. Berlin: Springer, 1986.)

8. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. (*Yakubovich V.A., Starzhinskii V.M.* Linear Differential Equations with Periodic Coefficients, vol. 1 and 2. Jerusalem: Keter Publishing House, 1975.)

9. *Burd V.* Method of Averaging for Differential Equations on an Infinite Interval: Theory and Applications. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Volume 255. — Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2007.

10. *Burd V., Nesterov P.* Parametric resonance in adiabatic oscillators // Results Math. 2010. V. 58, No. 1–2. P. 1–15.

11. *Denisov S.A., Kiselev A.* Spectral properties of Schrödinger operators with decaying potentials // B. Simon Festschrift, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. 2007. Vol. 76, part 2. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 565–589.

12. *Eastham M.S.P.* The asymptotic solution of linear differential systems. London Math. Soc. Monographs. Oxford: Clarendon Press, 1989.

13. *Harris W.A. Jr., Lutz D.A.* On the asymptotic integration of linear differential systems // J. Math. Anal. Appl. 1974. V. 48, No. 1. P. 1–16.

14. *Harris W.A. Jr., Lutz D.A.* A Unified Theory of Asymptotic Integration // J. Math. Anal. Appl. 1977. V. 57, No. 3. P. 571–586.

15. *Levinson N.* The asymptotic nature of the solutions of linear systems of differential equations // Duke Math. J. 1948. V. 15. P. 111–126.

16. *Lukic M.* Schrödinger operators with slowly decaying Wigner-von Neumann type potentials // J. Spectr. Theory. 2013. V. 3, No. 2. P. 147–169.

17. *Naboko S., Simonov S.* Zeroes of the spectral density of the periodic Schrödinger operator with Wigner–von Neumann potential // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 2012. V. 153, No. 1. P. 33–58.

18. *Nesterov P.* On eigenvalues of the one-dimensional Dirac operator with oscillatory decreasing potential // Math. Phys. Anal. Geom. 2012. V. 15, No. 3. P. 257–298.

19. *Turner K.L., Miller S.A., Hartwell P.G., MacDonald N.C., Strogatz S.H., Adams S.G.* Five parametric resonances in a microelectromechanical system // Nature. 1998. V. 396. P. 149–152.

20. *Um C.I., Yeon K.H., George T.F.* The quantum damped harmonic oscillator // Phys. Rep. 2002. V. 362, No. 2–3. P. 63–192.

21. *Wintner A.* The adiabatic linear oscillator // Amer. J. Math. 1946. V. 68. P. 385–397.

22. *Wintner A.* Asymptotic integration of the adiabatic oscillator // Amer. J. Math. 1946. V. 69. P. 251–272.

Parametric Resonance in a Time-Dependent Harmonic Oscillator

Nesterov P.N.

P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: harmonic oscillator, time-dependent frequency, resonance, method of averaging, asymptotics.

In this paper, we study the phenomenon of appearance of new resonances in a time-dependent harmonic oscillator under an oscillatory decreasing force. The studied equation belongs to the class of adiabatic oscillators and arises in connection with the spectral problem for the one-dimensional Schrödinger equation with Wigner–von Neumann type potential. We use a specially developed method for asymptotic integration of linear systems of differential equations with oscillatory decreasing coefficients. This method uses the ideas of the averaging method to simplify the initial system. Then we apply Levinson's fundamental theorem to get the asymptotics for its solutions. Finally, we analyze the features of a parametric resonance phenomenon. The resonant frequencies of perturbation are found and the pointwise type of the parametric resonance phenomenon is established. In conclusion, we construct an example of a time-dependent harmonic oscillator (adiabatic oscillator) in which the parametric resonances, mentioned in the paper, may occur.

Сведения об авторе:
Нестеров Павел Николаевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд. физ.-мат. наук, доцент