

УДК 517.9

Пространственные особенности высококомодовых бифуркаций в распределенном логистическом уравнении

Кащенко И. С.¹

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: iliyask@uniyar.ac.ru

получена 24 марта 2013

Ключевые слова: логистическое уравнение, пространственное распределение, квазинормальная форма

Исследуется локальная динамика решений пространственно распределенного логистического уравнения в случае двумерного пространственного переменного. Рассмотрены два важных для приложений вида функции распределения. Показано, что критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия имеют бесконечную размерность. Для каждого критического случая построены специальные замены, сводящие исходную задачу к системе параболических уравнений — квазинормальной форме, поведение решений которой определяет в главном локальную динамику. Некоторые из параметров в квазинормальной форме зависят от малого параметра через разрывную функцию $\Theta(\varepsilon)$, которая принимает бесконечное число раз все значения из полуинтервала $[0, 1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это дает бесконечное чередование прямых и обратных бифуркаций в исходной краевой задаче. Полученные результаты сравниваются с аналогичными для случая одномерного пространственного переменного. Выявлены новые бифуркационные явления, которые возникают только в случае двумерной пространственной переменной.

В работах [1, 2, 3, 4] исследовалась локальная — в окрестности положительного состояния равновесия — динамика распределенного логистического уравнения

$$\frac{\partial N}{\partial t} = r \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} F(s)N(t, x + s)ds \right] N + d \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \quad (1)$$

с периодическими краевыми условиями

$$N(t, x + 2\pi) \equiv N(t, x). \quad (2)$$

¹Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.В37.21.0457), гранта РФФИ (соглашение №12-01-31128) и гранта Президента Российской Федерации (договор №14.124.13.5948-МК).

Отметим, что краевые задачи вида (1), (2) возникают во многих приложениях (см., например, [5, 6, 7]). Здесь функции $N = N(t, x)$, $F = F(x)$, а также параметры r и d — положительные. Для $F(x)$ выполнено условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = 1. \quad (3)$$

Основное предположение в [1, 2, 3] состояло в том, что значение коэффициента диффузии достаточно мало, и значения функции $F(x)$ (носитель) сосредоточены в малой окрестности одной или нескольких точек числовой оси. Было показано, что эти условия могут приводить к появлению так называемого бесконечномерного критического случая в задаче об устойчивости состояния равновесия $N \equiv 1$. Был разработан алгоритм построения специальных эволюционных уравнений (как правило — параболического типа), играющих роль нормальной формы: их нелокальная динамика полностью описывает поведение всех решений краевой задачи (1), (2) с начальными условиями из достаточно малой окрестности стационара. Вся разработанная в [1, 2, 3] методика переносится и на существенно более сложное логистическое уравнение с двумерной пространственной областью определения

$$\frac{\partial N}{\partial t} = r \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(p, q) N(t, x + p, y + q) dp dq \right] N + d \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right), \quad (4)$$

$$N(t, x + 2\pi, y) \equiv N(t, x, y + 2\pi) \equiv N(t, x, y). \quad (5)$$

Для $F(x, y)$ выполнено аналогичное (3) условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dx dy = 1. \quad (6)$$

В настоящей работе при изучении локальной динамики краевой задачи (4) остановимся на рассмотрении только принципиально новых особенностей, обусловленных именно двумерностью области определения. Таких существенных особенностей будет выявлено две. Они связаны со специфичным поведением корней характеристического уравнения

$$\lambda = -r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(p, q) \exp(im p + in q) dp dq - d(m^2 + n^2), \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (7)$$

для линеаризованного на состоянии равновесия $N \equiv 1$ уравнения

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(p, q) N(t, x + p, y + q) dp dq + d \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right).$$

В следующих двух параграфах будут разобраны соответствующие ситуации. Здесь отметим, что в каждой из них параметр диффузии предполагается достаточно малым, т.е.

$$d = \varepsilon d_0 \quad (d_0 > 0) \quad \text{и} \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (8)$$

Приступим к описанию класса функции $F(x, y)$. В работе [5], исходя из биологического смысла рассматриваемых в ней задач, функция $F(x)$ (зависит от одной переменной) имеет вид (см. рис. 1)

$$A(x, \varepsilon) = \frac{1}{b-a} \left\{ \frac{b}{(4\pi\sigma_1^2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{x^2}{4\varepsilon\sigma_1^2} \right] - \frac{a}{(4\pi\sigma_2^2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{x^2}{4\varepsilon\sigma_2^2} \right] \right\}, \quad (b > a). \quad (9)$$

В настоящей работе рассматривается более сложная ситуация, когда область изменения пространственной переменной двумерна. В параграфе 1 функция $F(x, y)$ является прямым обобщением функции (9) и задается формулой

$$F(x, y) = \frac{1}{b-a} \left\{ \frac{b}{(4\pi\sigma_1^2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{(x^2 + y^2)^2}{4\varepsilon\sigma_1^2} \right] - \frac{a}{(4\pi\sigma_2^2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{(x^2 + y^2)^2}{4\varepsilon\sigma_2^2} \right] \right\}, \quad (10)$$

где $(b > a)$.

Класс функций, изучаемый во втором параграфе, тоже имеет ярко выраженную прикладную направленность. Он описывается формулой

$$F(x, y) = P \left[\delta \exp[-\sigma(x^2 + y^2)] + \frac{1}{2}(1 - \delta) [\exp(-\sigma_1((x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2)) + \exp(-\sigma_1((x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2))] \right], \quad (11)$$

где $P = [\pi(\delta\sigma^{-1} + (1 - \delta)\sigma_1^{-1})]^{-1}$. Некоторая двумерная проекция функции (11) представлена на рис. 2.

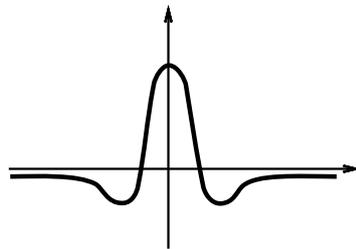


Рис. 1. Примерный вид функции (9)

1. Первый случай

1.1. Нам понадобятся некоторые результаты из [2, 3]. Там в ситуации, когда пространственная переменная одномерна, предполагалось что функция $F = F(x)$ имеет вид (9).

По смыслу задачи функция $N(t, x)$ положительна. Отметим, что решение (1), (2) с положительной начальной при $t = 0$ функцией (из $C_{[0, 2\pi]}$) остается положительным при $t > 0$.

Для изучения локальной — в малой окрестности состояния равновесия $N_0 = 1$ динамики краевой задачи (1), (2) необходима информация о корнях характеристического уравнения линеаризованной на N_0 краевой задачи. Для этих корней имеет

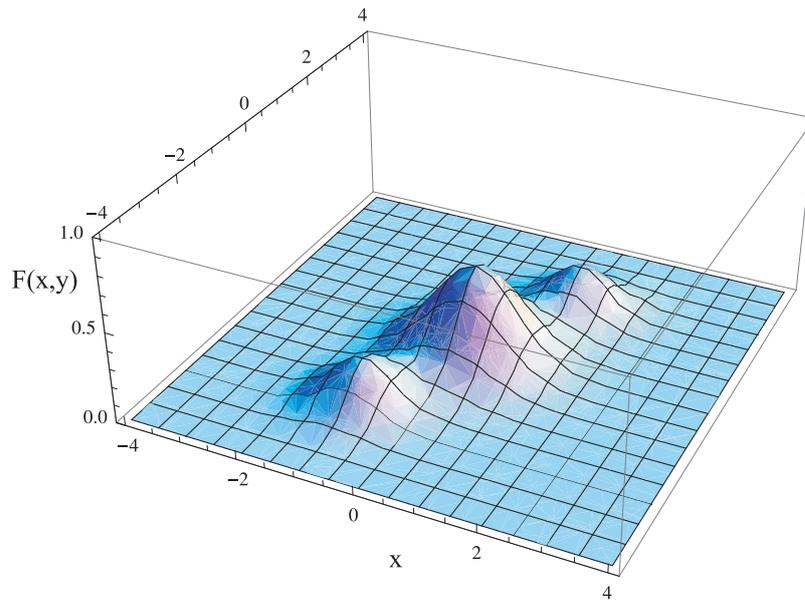


Рис. 2. Примерный вид функции (11)

место формула $\lambda_k = \lambda(\varepsilon k^2)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где $z^2 = \varepsilon k^2$ и

$$\lambda(z) = -d_0 z^2 - \frac{r}{b-a} [b \exp(-\sigma_1^2 z^2) - a \exp(-\sigma_2^2 z^2)]. \quad (12)$$

При условии $\lambda_k < 0$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) состояние равновесия N_0 асимптотически устойчиво и все решения (1), (2) с начальными условиями из достаточно малой окрестности N_0 стремятся к нему при $t \rightarrow \infty$. Если же найдется такой номер k_0 , при котором $\lambda_{k_0} > 0$, то решение N_0 неустойчиво и в его малой окрестности устойчивых режимов быть не может (тем самым задача о динамике (1), (2) становится нелокальной). В том случае, когда для некоторых k_i имеем $\lambda_{k_j} = 0$, $k_i \rightarrow k_j$, вопрос о локальной динамике (1), (2), а также о бифуркациях, которые могут происходить при изменении введенного «малого» параметра, решается с помощью стандартных методов нормализации [8, 9] с использованием теории интегральных многообразий (см., например, [9, 10]). Поведение решений краевой задачи (1), (2) в этом случае определяется динамикой нормальной формы — специальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Наибольший интерес представляет изучение локальной динамики (1), (2) при условии, когда малым является параметр ε : $0 < \varepsilon \ll 1$. В этом случае возможны особые сложности при исследовании бифуркационных задач. Поясним это. Пусть сначала выполнено условие $\max_{z \geq 0} \lambda(z) < 0$. Тогда все корни $\lambda(\varepsilon k)$ характеристического уравнения отрицательны и отделены от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это означает, что состояние равновесия N_0 экспоненциально устойчиво и радиус его области притяжения не зависит от ε . При условии $\max_{z \geq 0} \lambda(z) > 0$ решение N_0 неустойчиво, количество положительных корней характеристического уравнения неограниченно растет при $\varepsilon \rightarrow 0$ и наибольший из них имеет порядок $O(1)$.

Ниже рассмотрим промежуточный случай, когда для некоторого $z_0 > 0$ выполнены условия $\lambda(z_0) = 0$; $\lambda(z) < 0$ при $z \geq 0$ и $z \neq z_0$. В задаче о структуре окрест-

ности N_0 в этой ситуации реализуется случай, близкий к критическому бесконечной размерности: количество корней характеристического уравнения, находящихся в «малой» окрестности нуля, неограниченно растет при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Результатами об интегральных многообразиях, выделяющих «критические» переменные, и о нормальных формах здесь воспользоваться не удастся. Тем не менее техника построения нормальных форм существенно используется [1, 2, 3, 11, 12, 13].

Заменяем в (1), (2) параметр r на $r = r_0 + \varepsilon r_1$, а через $\Theta = \Theta(\varepsilon) \in [0, 1)$ обозначим такое значение, что число $\varepsilon^{-1} z_0^{1/2} + \Theta$ является целым. Введем затем в рассмотрение формальный ряд

$$N = \sqrt{\varepsilon} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\xi_k(\tau) \exp ix \left(\varepsilon^{-1} z_0^{1/2} + \Theta + k \right) + \bar{\xi}_k(\tau) \exp - \right. \quad (13) \\ \left. - ix \left(\varepsilon^{-1/2} z_0^{1/2} + \Theta + k \right) \right) + \varepsilon N_2(\tau, x, X) + \dots,$$

в котором $\tau = \varepsilon t$, $X = (\varepsilon^{-1/2} z_0^{1/2} + \Theta)x$. Подставим этот ряд в (1), (2) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε . На втором шаге получим формулы для $N_2(\tau, x, X)$ (через $\xi_k(\tau)$), а на третьем шаге, из условия разрешимости получившихся уравнений относительно $\xi_k(\tau)$, приходим к бесконечной системе уравнений (для $\xi_k(\tau)$), содержащей кубические нелинейности.

Важно то, что построенная для нахождения $\xi_k(\tau)$ система уравнений сворачивается в одно комплексное нелинейное параболическое уравнение для $\xi(\tau, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau, x)$

$$\frac{\partial \xi(\tau, x)}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \lambda''(z_0) \frac{\partial^2 \xi(\tau, x)}{\partial x^2} - i \Theta \lambda''(z_0) \frac{\partial \xi(\tau, x)}{\partial x} + \quad (14) \\ + \left[\frac{1}{2} \Theta^2 \lambda''(z_0) + r_1 z_0^2 \right] \xi + R |\xi|^2 \xi$$

с периодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x). \quad (15)$$

В (15) положено

$$R = r_0 \left\{ z_0^2 - 1 - z_0^2 / [\lambda(2z_0)] (3z_0^2 + \lambda(2z_0)) \right\}.$$

Пусть выполнены условия невырожденности $\lambda''(z_0) \neq 0$ и $R \neq 0$. Тогда необходимо выполняется неравенство $\lambda''(z_0) < 0$. В том случае, когда для целого k выполнено условие

$$y_k = R^{-1} \left[\frac{1}{2} \lambda''(z_0) (k + \Theta)^2 + r_1 z_0^2 \right] > 0,$$

краевая задача (14), (15) имеет состояние равновесия $\xi = y_k^{1/2} \exp ikx$. Это состояние равновесия устойчиво, если $R < 0$ и $\lambda''(z_0) (2k + \Theta)^2 > 4R$, и неустойчиво, если $R > 0$ или $\lambda''(z_0) (2k + \Theta)^2 < 4R$. Краевая задача может иметь довольно богатое множество сложно устроенных установившихся режимов [13]. Согласно формуле (13)

решению $\xi_0(\tau, x)$ задачи (14), (15) при фиксированном значении $\Theta = \Theta_0$ отвечает такое асимптотическое решение $N(t, x, \varepsilon)$ исходной краевой задачи (1), (2), что

$$N(t, x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \left[\xi_0(\tau, x) \exp ix \left(\varepsilon^{-1} z_0^{1/2} + \Theta_0 \right) + \right. \\ \left. + \bar{\xi}_0(\tau, x) \exp -ix \left(\varepsilon^{-1} z_0^{1/2} + \Theta_0 \right) \right] + O(\varepsilon), \quad (16)$$

причем параметр ε в (16) определяется из условия $\Theta(\varepsilon) = \Theta_0$ (и достаточно мал), т. е. пробегает дискретное множество значений.

При стремлении параметра ε к нулю функция $\Theta(\varepsilon)$ неограниченно много раз пробегает все значения от нуля до единицы. Далее, количество и устойчивость даже указанных выше состояний равновесия может зависеть от параметра ε . Тем самым при $\varepsilon \rightarrow \infty$ неограниченно часто могут происходить прямые и обратные бифуркации в краевой задаче (14), (15), а значит, и в (1), (2).

1.2. Рассмотрим затем более сложную ситуацию когда область изменения пространственной переменной двумерна и $F(x, y)$ выражается формулой (10).

Характеристическое уравнение (7) для этой функции тоже можно записать в форме (12), где $z^2 = \varepsilon(m^2 + n^2)$. Пусть выполнены все те условия, при которых в предыдущем пункте строилась нормализованная краевая задача (14), (15): существует такое $z_0 > 0$, что для функции $\lambda(z)$, корня с наибольшей вещественной частью уравнения (12) имеем $\lambda(\pm z_0) = 0$ и $Re \lambda(z_0) < 0$ при $z \neq \pm z_0$.

В случае функции одной переменной $F(x)$ по значениям $\pm z_0$ однозначно определялись две базовые частоты ($\pm k_\varepsilon = \pm z_0 \varepsilon^{-1/2} + \Theta(\varepsilon)$) пространственных осцилляций, вокруг которых и формировались динамические структуры. Для двумерной пространственной переменной это уже не так. Определим однопараметрическое семейство «базовых» частот, вокруг каждой из которых могут формироваться соответствующие структуры.

Введем обозначения. Фиксируем произвольно $\varphi \in [0, 2\pi]$ и положим

$$m_\varepsilon(\varphi) = (z_0 \cos \varphi) \varepsilon^{-1/2} + \Theta_{1\varphi}, \quad n_\varepsilon(\varphi) = (z_0 \sin \varphi) \varepsilon^{-1/2} + \Theta_{2\varphi}. \quad (17)$$

Здесь $\Theta_{1\varphi}, \Theta_{2\varphi} \in [0, 1)$ и дополняют соответствующие предыдущие в (17) слагаемые до целого. Однопараметрические семейства $m_\varepsilon(\varphi)$ и $n_\varepsilon(\varphi)$ и определяют базовые значения мод по переменным x и y соответственно. Условимся считать, что $\xi_{\varphi+2\pi} = \xi_\varphi$, $\xi_{\varphi+\pi} = \bar{\xi}_\varphi$. Ниже будет показано, что структура в (17) формируется на модах, близких к базовым.

В связи с этим вводим в рассмотрение формальные ряды

$$N = 1 + \varepsilon \sum_{\varphi \in [0, 1)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_{\varphi mn}(\tau) \exp [i(m_\varepsilon(\varphi) + m)x + i(n_\varepsilon(\varphi) + n)y] + \quad (18) \\ + \varepsilon^2 N_2(\tau, x, y, X, Y) + \dots,$$

где $\tau = \varepsilon t$, $X = m_\varepsilon(\varphi)x$, $Y = n_\varepsilon(\varphi)y$ и зависимость от X и $Y - 2\pi$ — периодическая. Подставим (18) в (4) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε . Тогда, приравнявая в получившемся тождестве коэффициенты при первой степени

ε , получим уравнение относительно $N_2(\tau, x, y, X, Y)$. В это уравнение будут входить и все неизвестные функции $\xi_{\varphi mn}(\tau)$. Из условия разрешимости этого уравнения относительно N_2 приходим к бесконечной (формально-континуальной) системе уравнений относительно $\xi_{\varphi mn}(\tau)$. Как оказывается, эта система эквивалентна системе краевых задач относительно величин $\xi_{\varphi}(\tau, x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_{\varphi mn}(\tau) \exp(imx + iny)$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \xi_{\varphi}}{\partial \tau} = & 4\lambda_0 p_0 \left[\cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \xi_{\varphi}}{\partial x^2} + \sin 2\varphi \frac{\partial^2 \xi_{\varphi}}{\partial x \partial y} + \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 \xi_{\varphi}}{\partial y^2} + \right. \\
 & + 2i\sqrt{p_0} (\Theta_{1\varphi} \cos \varphi + \Theta_{2\varphi} \sin \varphi) \left(\cos \varphi \frac{\partial \xi_{\varphi}}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial \xi_{\varphi}}{\partial y} \right) - \\
 & \left. - (\Theta_{1\varphi} \cos \varphi + \Theta_{2\varphi} \sin \varphi)^2 \xi_{\varphi} \right] - r_1 d_0 z_0 \xi_{\varphi} + \\
 & + dz_0 \xi_{\varphi + \frac{\pi}{3}} \xi_{\varphi - \frac{\pi}{3}}, \quad \tau = \varepsilon t,
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\xi_{\varphi}(\tau, x + 2\pi, y) \equiv \xi_{\varphi}(\tau, x, y + 2\pi) \equiv \xi_{\varphi}(\tau, x, y). \tag{20}$$

Краевая задача (19) представляет собой наборы из шести изолированных систем вырожденных параболических уравнений для ξ_{φ} , $\xi_{\varphi \pm \pi/3}$, $\xi_{\varphi \pm 2\pi/3}$, $\xi_{\varphi + \pi}$ (удобно считать, что $\varphi \in (-\infty, \infty)$ и зависимость от этого параметра 2π -периодическая). В отличие от результатов предыдущего пункта амплитуда установившегося режима краевой задачи (19) имеет здесь порядок ε .

Завязка всех систем уравнений, фигурирующих в (19), происходит при учете в квазинормальной форме следующих по порядку (кубических) слагаемых, перед которыми стоит множитель ε .

Обратим внимание на три обстоятельства. Во-первых, в уравнение (19) входят зависящие от ε и бесконечно много раз при $\varepsilon \rightarrow 0$ изменяющиеся от 0 до 1 функции $\Theta_{1\varphi}$ и $\Theta_{2\varphi}$. Малые изменения ε могут существенно изменить эти величины, а значит, и динамические свойства краевой задачи. Во-вторых, первые три слагаемые в правой части (19) можно записать в виде $\left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \xi_{\varphi}$. Поэтому (19), (20) является вырожденной параболической краевой задачей. В-третьих, что более интересно, система (19) представляет собой системы из независимых шестерок уравнений относительно $\xi_{\varphi}(\tau)$, $\xi_{\varphi - \frac{\pi}{3}}(\tau)$, $\xi_{\varphi - \frac{2\pi}{3}}(\tau)$, $\xi_{\varphi - \pi}(\tau)$, $\xi_{\varphi - \frac{4\pi}{3}}(\tau)$, $\xi_{\varphi - \frac{5\pi}{3}}(\tau)$, ($\xi_{\varphi + \pi}(\tau) \equiv \bar{\xi}_{\varphi}(\tau)$).

Краевую задачу (19), (20) естественно назвать квазинормальной формой для (4), (5). Следующий результат раскрывает связь между установившимися режимами этой и исходной краевых задач. Для формулировки соответствующего утверждения введем еще несколько обозначений. Пусть Θ_{10} — произвольная точка из полуинтервала $(-1, 0]$, а $\{\varepsilon_k\}$ — такая последовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), которая определяется равенством $\Theta_1(\varepsilon_k) = \Theta_{10}$. Таким образом, $\varepsilon_k = \varepsilon_k(\Theta_{10})$. Рассмотрим затем последовательность $\delta_k = \Theta_2(\varepsilon_k(\Theta_{10}))$. Пусть $\delta(\Theta_{10})$ — множество всех предельных точек последовательности δ_k . Отметим, что возможны ситуации, когда, например, $\delta(\Theta_{10}) = [-1; 0]$ или $\delta(\Theta_{10}) = \Theta_{10}$.

Теорема 1. Пусть при некоторых $\Theta_{10} \in (-1, 0]$ и $\Theta_{20} \in \delta(\Theta_{10})$ краевая задача (19), (21) имеет состояние равновесия $M_0 = (\xi_{j0}(x, y), \eta_{j0}(x, y), j = 1, 2)$ и пусть

спектр устойчивости линеаризованной на этом состоянии равновесия краевой задачи (19), (20) имеет на мнимой оси не более двух корней. Тогда найдется такая последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$, что при $\varepsilon = \varepsilon_n$ краевая задача (4), (5) имеет состояние равновесия $u_0(x, y, \varepsilon)$ той же, что и M_0 , устойчивости. Асимптотическое разложение $u_0(x, y, \varepsilon)$ задает формула (18).

Опишем схему обоснования этого утверждения. Определив $\xi_{j0}(x, y)$ и $\eta_{j0}(x, y)$, можно получить асимптотическое разложение (18) для «формального» состояния равновесия $\tilde{u}(x, y, \varepsilon)$ краевой задачи (4), (5) с любой степенью точности. Для наших целей достаточно найти асимптотику этой функции с точностью до $\varepsilon_n^{5/2}$. Линеаризуем затем (4), (5) на полученном асимптотическом по невязке решении $\tilde{u}(x, y, \varepsilon_n)$ и воспользуемся результатами из [14], где разработан алгоритм исследования устойчивости систем линейных уравнений с малой диффузией. После анализа линейной системы остается воспользоваться известной схемой Стокса (см., например, [15]). В более простой, но довольно близкой ситуации эта схема подробно описана в работе [16], поэтому здесь на ней не останавливаемся.

Обратим внимание на одно интересное явление. При различных значениях Θ_{10} и $\Theta_{20} \in \delta(\Theta_{10})$ количество и устойчивость состояний равновесия (и периодических по τ режимов) могут меняться. Это означает, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ может происходить неограниченный процесс «рождения» и «гибели» установившегося режима, а также «прямые» и «обратные» бифуркационные явления в самой квазинормальной форме.

Ниже через ε_n обозначается такая последовательность $\varepsilon = \varepsilon_n \rightarrow 0$, на которой для некоторого φ значения $\Theta_{1\varphi}$ и Θ_{12} не меняются.

Теорема 2. Пусть краевая задача (19), (20) для некоторых φ_0 , $\Theta_{1\varphi_0}$ и $\Theta_{2\varphi_0}$ имеет ограниченное решение $\xi_{\varphi_0}(i, x, y)$, $\xi_{\varphi_0 \pm \frac{\pi}{3}}(i, x, y)$, $\xi_{\varphi_0 \pm \frac{2\pi}{3}}(i, x, y)$, $\xi_{\varphi_0 \pm \pi}(i, x, y)$, $i \rightarrow \tau$. Тогда краевая задача (4), (5) имеет асимптотическое (при $\varepsilon = \varepsilon_n \rightarrow 0$) по невязке решение

$$N = 1 + \varepsilon_n \sum_{\substack{\varphi = \varphi_0, \varphi_0 \pm \frac{\pi}{3} \\ \varphi_0 \pm \frac{2\pi}{3}, \varphi_0 + \pi}} \exp[i(m_{\varepsilon_n}(\varphi)x + n_{\varepsilon_n}(\varphi)y)] \xi_{\varphi}(\tau, x, y) + O(\varepsilon_n^2).$$

О бифуркационных особенностях в случае круга. Изложенная выше методика допускает распространение и на другие двумерные области определения. Бифуркационные явления и сами квазинормальные формы существенно зависят от выбора соответствующей области. Так, при рассмотрении уравнения (4) в квадрате $\alpha_1 \leq x \leq \alpha_2$, $\beta_1 \leq y \leq \beta_2$ с краевыми условиями Неймана $\frac{\partial N}{\partial x}|_{x=\alpha_{1,2}} = \frac{\partial N}{\partial y}|_{y=\beta_{1,2}} = 0$ все основные из сформулированных выше утверждений сохраняются. Однако при рассмотрении уравнения (4) в круге возникают существенные отличия. Укажем на одно из них.

Рассмотрим в круге $\Omega_0 = \{x, y : x^2 + y^2 \leq 1\}$ уравнение (4) с краевыми условиями $\frac{\partial u}{\partial \rho}|_{\rho=\pi} = 0$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $u(t, \rho, \varphi + 2\pi) \equiv u(t, \rho, \varphi)$. Построение квазинормальных форм и здесь, конечно, основывается на использовании формул типа (18).

Основное отличие получающихся квазинормальных форм состоит в том, что соответствующие (вырожденные параболические) уравнения содержат существенно

больше нелинейных слагаемых. Например, для случая $r \neq 0$ такая система уравнений не распадается на подсистемы из шести уравнений. Тем самым можно говорить о том, что в рассматриваемой задаче резонирует большее число мод. Таким образом, геометрия области Ω играет важную роль в динамике краевой задачи (4), (5).

2. Второй случай

Здесь предполагаем, что функция $F(x, y)$, для которой верно соотношение (6), представляется формулой

$$F(x, y) = P \left[\delta \exp [-\sigma (x^2 + y^2)] + \frac{1}{2} (1 - \delta) [\exp(-\sigma_1((x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2)) + \exp(-\sigma_1((x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2))] \right], \quad (21)$$

где $\delta \in (0, 1)$. Относительно положительных параметров σ^{-1} , σ_1^{-1} и d предполагается, что они достаточно малы:

$$\sigma^{-1} = \varepsilon \sigma_0^{-1}, \quad \sigma_1^{-1} = \varepsilon \sigma_{10}^{-1}, \quad d = \varepsilon d_0.$$

С прикладной точки зрения наиболее естественно предположить, что значения (носитель) $F(x, y)$ сосредоточены в достаточно малой окрестности точки $x = y = 0$. Поэтому параметры α и β тоже считаем достаточно малыми:

$$\alpha = \mu \alpha_0, \quad \beta = \mu \beta_0, \quad 0 < \mu \ll 1.$$

Отметим, что при фиксированном δ из промежутка $[\frac{1}{2}, 1)$ критических случаев в задаче об устойчивости состояния равновесия не возникает, поэтому здесь предполагаем, что этот параметр близок к $\frac{1}{2}$:

$$\delta = \frac{1}{2} (1 + \mu^2 \delta_0).$$

Характеристическое уравнение (7) можно записать в виде

$$\lambda = -\frac{r}{2} P \left[(1 + \mu^2 \delta) \exp \left(-\frac{\varepsilon (m^2 + n^2)}{\sigma_0} \right) + (1 - \mu^2 \delta) \cos (\mu (\alpha_0 m + \beta_0 n)) \exp \left(-\frac{\varepsilon (m^2 + n^2)}{\sigma_{10}} \right) \right] - \varepsilon d_0 (m^2 + n^2). \quad (22)$$

Будем предполагать, что малые параметры ε и μ связаны соотношением $\varepsilon = o(\mu)$. Как оказалось, наиболее интересные результаты имеют место при условии, когда

$$\varepsilon = \gamma \mu^4,$$

т. е. коэффициент диффузии много меньше коэффициента надкритичности. Ниже предполагаем, что это условие выполнено. Отметим, что для более общей ситуации, когда $\varepsilon = \gamma \mu^\nu$, $0 < \nu < 4$, следует воспользоваться результатами из [17]. Положим, далее, $z_1 = \mu t$, $z_2 = \mu n$. Характеристическое уравнение (22) тогда можно представить в виде

$$\lambda = -\frac{r}{2}P \left[1 + \cos(\alpha_0 z_1 + \beta_0 z_2) + \mu^2 \left((\delta_0 - \delta_0 \cos(\alpha_0 z_1 + \beta_0 z_2) - \sigma_0^{-1}(z_1^2 + z_2^2)) - \cos(\alpha_0 z_1 + \beta_0 z_2) \sigma_{10}^{-1}(z_1^2 + z_2^2) \right) \right] - \gamma \mu^2 d_0 (z_1^2 + z_2^2) + O(\mu^4). \quad (23)$$

Пусть z_1 и z_2 фиксированы так, что $\alpha_0 z_1 + \beta_0 z_2 \neq \pi(2k+1)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Тогда при всех достаточно малых значениях параметра μ значения λ в (23) отрицательны. Рассмотрим ситуацию, когда для некоторого k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) выполнено равенство

$$\alpha_0 z_1 + \beta_0 z_2 = \pi(2k+1). \quad (24)$$

Тогда бесконечно много значений λ в (23) стремятся к мнимой оси при $\mu \rightarrow 0$. Тем самым реализуется критический случай бесконечной размерности в задаче об устойчивости стационара $N \equiv 1$. «Критические» — «базовые» моды для пространственных переменных x и y , вокруг которых могут формироваться динамические структуры, определяются из (24). Сформулируем это утверждение более точно. Прежде всего введем ещё несколько обозначений. Пусть ω — произвольная величина из $(-\infty, \infty)$, а через l будем обозначать целые числа $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Далее, пусть $\Theta = \Theta(\Delta)$ — такое значение из полуинтервала $[0, 1)$, которое дополняет выражение $(\mu(\alpha_0^2 + \beta_0^2))^{-1} \pi \Delta$ до целого. Тогда для «критических» по переменным x и y мод имеем соответственно формулы

$$m_{kl}(\mu) = \mu^{-1} \left[\left(\frac{\alpha_0 \pi}{\alpha_0^2 + \beta_0^2} + \mu \Theta(\alpha_0) \right) (2k+1) + \left(\frac{\beta_0 \pi \omega}{\alpha_0^2 + \beta_0^2} + \mu \Theta(\beta_0 \omega) \right) l \right], \quad (25)$$

$$n_{kl}(\mu) = \mu^{-1} \left[\left(\frac{\beta_0 \pi}{\alpha_0^2 + \beta_0^2} + \mu \Theta(\beta_0) \right) (2k+1) - \left(\frac{\alpha_0 \pi \omega}{\alpha_0^2 + \beta_0^2} + \mu \Theta(\alpha_0 \omega) \right) l \right]. \quad (26)$$

Алгоритмическая часть для получения нормализованных уравнений для медленно меняющихся амплитуд базируется на рассмотрении формального ряда (семейства формальных рядов, зависящих от свободного параметра ω)

$$N = 1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_{klmn}(\tau) \exp[i(m_{kl}(\mu) + m)x + i(n_{kl}(\mu) + n)y] + \quad (27)$$

$$+ \mu^2 N_2(\tau, x, y, X, Y) + \dots,$$

где $\tau = \mu^2 t$, $X = m_{kl}(\mu)x$, $Y = n_{kl}(\mu)y$ и зависимость от X и Y — 2π -периодическая. Подставим (27) в (4) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях μ в получившемся формальном тождестве. На втором шаге, приравнявая коэффициенты при μ^2 , из условий разрешимости уравнений относительно $N_2(\tau, x, y, X, Y)$, приходим к бесконечной системе уравнений относительно неизвестных медленно меняющихся по времени амплитуд $\xi_{klmn}(\tau)$. Как оказывается, эта бесконечномерная система уравнений эквивалентна параболическому уравнению относительно

$$\xi(\tau, x, y, u, v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_{klmn}(\tau) \exp(i(mx + ny + kv + lu)):$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = & \frac{r}{2} P(1 + \xi) \left[(\alpha_0 \Theta(\alpha_0) + \beta_0 \Theta(\beta_0)) \frac{\partial}{\partial u} + (\alpha_0 \Theta(\beta_0 \omega) - \beta_0 \Theta(\alpha_0 \omega)) \frac{\partial}{\partial v} + \right. \\ & \left. + \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} + \beta_0 \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 \xi + 2\delta_0 \xi + \gamma d_0 \frac{\pi^2}{\alpha_0^2 + \beta_0^2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + \omega^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

с краевыми условиями

$$\xi(\tau, x + 2\pi, y, u, v) \equiv \xi(\tau, x, y + 2\pi, u, v) \equiv \xi(\tau, x, y, u, v), \quad (29)$$

$$\xi(\tau, x, y, u + \pi, v) \equiv -\xi(\tau, x, y, u, v), \quad (30)$$

$$\xi(\tau, x, y, u, v + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x, y, u, v). \quad (31)$$

Теорема 3. Пусть μ_n — такая стремящаяся к нулю при $n \rightarrow \infty$ последовательность значений μ , для которой выражения $\Theta(\alpha_0)$, $\Theta(\beta_0)$, $\Theta(\alpha_0 \omega)$, $\Theta(\beta_0 \omega)$ не меняются. Пусть краевая задача (28), (29) имеет ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$ решение $\xi_0(\tau, x, y, u, v)$. Тогда при $\mu = \mu_n$ краевая задача (4), (5) имеет асимптотическое по невязке решение

$$\begin{aligned} N = & 1 + \xi_0 \left(\mu^2 t, x, y, \mu^{-1} \left[\frac{\alpha_0^2 \pi}{\alpha_0^2 + \beta_0^2} + \mu \Theta(\alpha_0) \alpha_0 \right] x + \mu^{-1} \left[\frac{\beta_0^2 \pi}{\alpha_0^2 + \beta_0^2} + \mu \Theta(\beta_0) \beta_0 \right] y, \right. \\ & \left. \mu^{-1} \left[\frac{\alpha_0 \beta_0 \pi \omega}{\alpha_0^2 + \beta_0^2} + \mu \Theta(\beta_0 \omega) \alpha_0 \right] x - \left[\frac{\alpha_0 \beta_0 \pi \omega}{\alpha_0^2 + \beta_0^2} + \mu \Theta(\alpha_0 \omega) \beta_0 \right] y \right) + O(\mu^2). \end{aligned}$$

Выводы

1. Критические случаи для краевой задача (4), (5) при условии малой диффузии имеют, как правило, бесконечную размерность.

2. Построены квазинормальные формы, которыми являются семейства нелинейных эволюционных уравнений. Их нелокальная динамика определяет поведение решений исходной краевой задачи в малой окрестности состояния равновесия.

3. Динамика квазинормальных форм может быть довольно сложной, и, более того, присутствие в квазинормальных формах некоторых (произвольных) параметров говорит о характерности явления мультистабильности.

4. Некоторые из параметров квазинормальных форм зависят от коэффициентов вида $\Theta = \Theta(\varepsilon)$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ эти коэффициенты бесконечно много раз меняются от 0 до 1. Поскольку динамика квазинормальных форм при различных значениях Θ , вообще говоря, различна, то приходим к выводу о характерности явления бесконечного (при $\varepsilon \rightarrow 0$) чередования процессов «рождения» и «гибели» установившихся режимов в исходной краевой задаче.

5. Двумерность пространственной переменной приводит к принципиально новым эффектам. Возникают специфические семейства связанных систем, отвечающих за динамику. Показано, что геометрия области существенно влияет на динамические свойства краевых задач.

6. Несмотря на сложный вид квазинормальных форм, их динамика исследуется (в том числе и численными методами) существенно проще, чем исходная краевая

задача. Упрощение связано с выделением в структуре решений конкретных специальных функций (как правило – быстро осциллирующих по пространственным переменным) и исследованием лишь относительно медленно меняющихся «амплитуд».

7. Особо подчеркнем, что медленно меняющиеся во времени амплитуды колебаний вокруг состояния равновесия $N = 1$ имеют в случае одной пространственной переменной порядок $\varepsilon^{1/2}$. Для случая двух пространственных переменных ситуация иная. В так называемом «первом» случае (§1.) эта амплитуда имеет порядок ε , т. е. нелинейность оказывает более сильное воздействие на формирование установившихся режимов. Для ситуации, описанной во «втором» случае (§2.), соответствующая амплитуда имеет порядок 1 (при $\varepsilon \rightarrow 0$), а квазинормальные формы принципиально отличаются от ранее полученных: нелинейность умножается на старшие производные по пространственным переменным.

Список литературы

1. Кащенко С.А. Бифуркационные особенности в одной модели динамики популяции, описываемой параболическим уравнением с малой диффузией и отклонением пространственной переменной // Моделирование динамики популяций: Межвуз. сб. научн. тр. Горький, 1989. (Kashchenko S.A. Bifurkacionnye osobennosti v odnoi modeli dinamiki populaci, opisuyvamoj parabolicheskim uravneniem s maloi diffusiei i otkloneneniem prostranstvennoj peremennoi // Modelirovanie dinamiki populyacii: Mezhvuz. sb. nauchn. tr. Gorkiy, 1989 [in Russian]).
2. Кащенко Д.С., Кащенко И.С. Динамика параболического уравнения с малой диффузией и отклонением пространственной переменной // Моделирование и анализ информационных систем. 2008. Т. 15, №2. С. 89–93. (Kashchenko D.S., Kashchenko I.S. Dinamika parabolicheskogo uravneniya s maloi diffusiei i otkloneniem prostranstvennoj peremennoi // Modelirovanie i analiz informacionnyh sistem. 2008. T. 15, №2. S. 89–93 [in Russian]).
3. Кащенко Д.С., Кащенко И.С. Динамика логистического уравнения с пространственно-распределенным насыщением // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, №1. С. 54–61 (Kashchenko D.S., Kashchenko I.S. Dinamika logisticheskogo uravnenija s prostranstvenno-raspredelennym nasyshheniem // Modelirovanie i analiz informacionnyh sistem. 2009. T. 16, №1. S. 54–61 [in Russian]).
4. Kashchenko I.S. Local dynamics of spatially distributed Hutchinson equation // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2011. Vol. 16. P. 3520–3524.
5. Leven S., Segel L. Pattern generation in space and aspect // SIAM Review. 1985. Vol. 27. P. 45–67.
6. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987 (Vasil'ev V.A., Romanovskij Ju.M., Jahno V.G. Avtovolnovye processy. Moskva: Nauka, 1987 [in Russian]).
7. Свиричев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987 (Svirezhev Ju.M. Nelinejnye volny, dissipativnye struktury i katastrofy v jekologii. Moskva: Nauka, 1987 [in Russian]).

8. Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979 (Brjuno A.D. Lokal'nyj metod nelinejnogo analiza differencial'nyh uravnenij. Moskva: Nauka, 1979 [in Russian]).
9. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978 (English transl.: Arnold V.I. Ordinary Differential Equations. The MIT Press, 1978).
10. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970 (English transl.: Hartman P. Ordinary Differential Equations. 2nd ed. Society for Industrial & Applied Math, 2002).
11. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980 (English transl.: Marsden J.E., McCracken M. The Hopf Bifurcation and Its Applications. Applied Mathematical Sciences, 19. Springer-Verlag, 1976).
12. Кащенко С.А. О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // ДАН СССР. 1988. Т. 299, № 5. С. 1049–1053 (Kashhenko S.A. O kvazinormal'nyh formah dlja parabolicheskikh uravnenij s maloj diffuziej // DAN SSSR. 1988. T. 299, № 5. S. 1049–1053 [in Russian]).
13. Кащенко С.А. Пространственные особенности высокомодовых бифуркаций двухкомпонентных систем с малой диффузией // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 2. С. 262–270 (Kashhenko S.A. Prostranstvennyye osobennosti vysokomodovyh bifurkacij dvuhkomponentnyh sistem s maloj diffuziej // Differencial'nye uravnenija. 1989. T. 25, № 2. S. 262–270 [in Russian]).
14. Kaschenko S.A. Normalization in the systems with small diffusion // International Journal of Bifurcations and chaos. 1996. Vol. 6, No. 7. P. 1093–1109.
15. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992 (Ahromeeva T.S., Kurdjumov S.P., Malineckij G.G., Samarskij A.A. Nestacionarnye struktury i diffuzionnyj haos. Moskva: Nauka, 1992 [in Russian]).
16. Кащенко С.А. Исследование устойчивости решений линейных параболических уравнений с близкими к постоянным коэффициентами и малой диффузией // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 1991. Вып. 15 (Kashhenko S.A. Issledovanie ustojchivosti reshenij linejnyh parabolicheskikh uravnenij s blizkimi k postojannym kojefficientami i maloj diffuziej // Tr. seminar im. I.G. Petrovskogo. 1991. Vyp. 15 [in Russian]).
17. Stokes A. On the approximation of nonlinear oscillation // Труды 5-й международной конференции по нелинейным колебаниям. Киев, 1970. Т. 2. С. 480–491 (Stokes A. On the approximation of nonlinear oscillation // Trudy 5-j mezhdunarodnoj konferencii po nelinejnym kolebanijam. Kiev, 1970. T. 2. S. 480–491).

Spatial Properties of High-Mode Bifurcations of a Distributed Logistic Equation

Kashchenko I.S.

*P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia*

Keywords: logistic equation, spatial distribution, quasinormal form

We study the local dynamics of a solutions spatially distributed logistic equation in the case of a two-dimensional spatial variable. Two distribution functions important for applications are considered. It is shown, that the critical cases in the problem of equilibrium stability have an infinite dimension. For each critical case a special replacement is built, which reduces the original problem to a system of parabolic equations — a quasi-normal form, the solutions behavior of which defines the local dynamics. Some of the parameters in the quasi-normal form depend on a small parameter via a discontinuous function $\Theta(\varepsilon)$, which takes an infinite number of times all the values in the interval $[0, 1)$ for $\varepsilon \rightarrow 0$. This gives infinite alternation of forward and backward bifurcations in the initial boundary value problem. The obtained results are compared with those for the case of a one-dimensional spatial variable. New bifurcation phenomena which occur only in the case of a two-dimensional spatial variable are revealed.

Сведения об авторе:

Кащенко Илья Сергеевич,

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
канд.-физ. мат. наук, доцент.