MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS, VOL. 32, NO. 2, 2025
journal homepage: www.mais-journal.ru

DISCRETE MATHEMATICS IN RELATION TO COMPUTER SCIENCE

On Extremal Elements and the Cardinality of the Set of Continuously Differentiable Convex Extensions of a Boolean Function

D. N. Barotov[1], R. N. Barotov[2]
DOI: 10.18255/1818-1015-2025-2-100-109

[1]Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia
[2]Khujand State University named after academician Bobojon Gafurov, Khujand, Tajikistan

MSC2020: 06E30, 54C20, 03E17
Research article
Full text in Russian

Received February 19, 2025
Revised April 1, 2025
Accepted April 9, 2025

In this paper we study the existence of the maximal and minimal elements of the set of continuously differentiable convex extensions to $[0,1]^n$ of an arbitrary Boolean function $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ and the cardinality of the set of continuously differentiable convex extensions to $[0,1]^n$ of the Boolean function $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. As a result of the study, it was established that the cardinality of the set of continuously differentiable convex extensions to $[0,1]^n$ of an arbitrary Boolean function $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is equal to the continuum. It is argued that for any Boolean function $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, there is no minimal element among its continuously differentiable convex extensions to $[0,1]^n$. It is proved that for any Boolean function $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, the set of its continuously differentiable convex extensions to $[0,1]^n$ has a maximal element only if the number of essential variables of the given Boolean function $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is less than 2.

Keywords: continuously differentiable convex extension of a Boolean function; extremal elements of a set; cardinality of a set

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Barotov, Dostonjon N. (corresponding author)	ORCID iD: 0000-0001-5047-7710. E-mail: DNBarotov@fa.ru Senior Lecturer, Department of Mathematics and Data Analysis
Barotov, Ruziboy N.	ORCID iD: 0000-0003-3729-6143. E-mail: DNBarotov@fa.ru Lecturer, Department Mathematical Analysis named after Professor A. Mukhsinov

For citation: D. N. Barotov and R. N. Barotov, “On extremal elements and the cardinality of the set of continuously differentiable convex extensions of a Boolean function”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 32, no. 2, pp. 100–109, 2025. DOI: 10.18255/1818-1015-2025-2-100-109.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ, ТОМ 32, № 2, 2025
сайт журнала: www.mais-journal.ru

DISCRETE MATHEMATICS IN RELATION TO COMPUTER SCIENCE

Об экстремальных элементах и мощности множества непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений булевой функции

Д. Н. Баротов[1], Р. Н. Баротов[2]
DOI: 10.18255/1818-1015-2025-2-100-109

[1]Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Россия
[2]Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова, Худжанд, Таджикистан

УДК 519.716.322+519.85+517.518.244
Научная статья
Полный текст на русском языке

Получена 19 февраля 2025 г.
После доработки 1 апреля 2025 г.
Принята к публикации 9 апреля 2025 г.

В данной статье изучается существование максимального и минимального элементов множества непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $[0,1]^n$ произвольной булевой функции $f_B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и мощность множества непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $[0,1]^n$ булевой функции $f_B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. В результате исследования установлено, что мощность множества непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $[0,1]^n$ произвольной булевой функции $f_B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ равна континууму. Аргументировано, что для любой булевой функции $f_B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ среди её непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $[0,1]^n$ нет минимального элемента. Доказано, что для любой булевой функции $f_B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ множество её непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $[0,1]^n$ имеет максимальный элемент только тогда, когда количество существенных переменных булевой функции $f_B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ меньше 2.

Ключевые слова: непрерывно дифференцируемое выпуклое продолжение булевой функции; экстремальные элементы множества; мощность множества

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Баротов, Достонжон Нумонжонович (автор для корреспонденции)	ORCID iD: 0000-0001-5047-7710. E-mail: DNBarotov@fa.ru Старший преподаватель кафедры математики и анализа данных
Баротов, Рузибой Нумонжонович	ORCID iD: 0000-0003-3729-6143. E-mail: DNBarotov@fa.ru Преподаватель кафедры математического анализа имени профессора А. Мухсинова

Для цитирования: D. N. Barotov and R. N. Barotov, “On extremal elements and the cardinality of the set of continuously differentiable convex extensions of a Boolean function”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 32, no. 2, pp. 100–109, 2025. DOI: 10.18255/1818-1015-2025-2-100-109.

Введение

Многие труднорешаемые дискретные задачи, возникающие в разных областях, включая комбинаторику, современную кибернетику, криптографию, а также информатику, могут быть сведены к системам булевых уравнений [1—3]. Поэтому системам булевых уравнений посвящено значительное количество работ, разработано несколько направлений исследований и алгоритмов их решения [2, 4, 5], но, несмотря на это, в связи с тем, что задача решения системы булевых уравнений в общем случае остается труднорешаемой, т. е. NP-трудной, в научном сообществе и в настоящее время продолжает расти интерес к поиску новых алгоритмов их решения в различных направлениях как в классических, так и в квантовых моделях вычислений [6, 7]. Одним из таких направлений для решения систем булевых уравнений является трансформация (преобразование) заданной системы булевых уравнений путем представления некоторого вещественного продолжения (аналога) для каждой булевой функции в систему вещественных уравнений над полем действительных чисел, поскольку, во-первых, в этой области известно много методов и алгоритмов решения систем, а во-вторых, его можно использовать и при решении смешанных систем, заданных одновременно математическими и логическими операциями [8, 9]. В свою очередь, преобразованная система вещественных уравнений может быть сведена в задачу непрерывной оптимизации, так как принципиальное отличие данного подхода от «переборных» алгоритмов локального поиска состоит в том, что на каждой итерации алгоритма сдвиг по градиенту (антиградиенту) производится по всем переменным одновременно [10]. В данном направлении относительно недавно в [9, 11—15] получены некоторые важные результаты, а именно, в [9] рассмотрено конструирование полилинейного продолжения булевой функции и аргументировано, что задача решения произвольной системы булевых уравнений с n переменными может быть сведена к задаче непрерывной минимизации на $[0, 1]^n$ целевой функции, не имеющей строгих локальных минимумов внутри любой k-мерной грани куба $[0, 1]^n$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, а в [11—14] построены выпуклые (вогнутые) продолжения булевых функций n переменных на $[0, 1]^n$ и на основе построенных выпуклых (вогнутых) продолжений булевых функций на $[0, 1]^n$, в частности, конструктивно доказано, что задача решения системы булевых уравнений может быть сведена к задаче минимизации (максимизации) целевой функции, любой локальный минимум (максимум) которой в искомой области является глобальным минимумом (максимумом), а также конструктивно доказано, что для любой булевой функции n переменных существует единственная вещественная функция, являющаяся максимумом (минимумом) среди всех ее выпуклых (вогнутых) продолжений на $[0, 1]^n$ и в дополнение ко всему, в [15] проведено сравнительное исследование между выпуклыми, полилинейными и вогнутыми продолжениями булевых функций. Поэтому также важным является изучение и доказательство свойств вещественных продолжений булевых функций, представляющих интерес при преобразовании систем булевых уравнений к задаче непрерывной оптимизации.

Данная статья является продолжением статей [11—13], а именно, в ней изучается существование максимального и минимального элементов множества непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $[0, 1]^n$ произвольной булевой функции $f_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и мощность множества непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $[0, 1]^n$ булевой функции $f_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$. В результате исследования, во-первых, аргументируется, что множество непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $[0, 1]^n$ произвольной булевой функции $f_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с точки зрения существования максимума заметно отличается от множества всех выпуклых продолжений на $[0, 1]^n$ этой булевой функции $f_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а именно, доказывается, что множество непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $[0, 1]^n$ данной булевой функции $f_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет максимальный элемент лишь тогда, когда количество существенных переменных булевой функции $f_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ меньше 2, а во-вторых, устанавливается, что мощность множества непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $[0,1]^n$ булевой функции $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равна континууму.

1. Используемые определения и обозначения

Пусть $\mathbb{B}^n = \{0,1\}^n$ — множество всевозможных двоичных слов (булевых векторов) длины n, $\mathbb{K}^n = [0,1]^n$ — n-мерный куб, натянутый на булевы векторы длины n.

Пусть $\mathrm{int}(\mathbb{K}^n) = (0,1)^n$ — множество внутренних точек куба $\mathbb{K}^n$.

Определение 1. Отображение вида $f_B : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ называется булевой функцией.

Определение 2. Переменная x_k, где $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, булевой функции $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется существенной (булева функция $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существенно зависит от x_k), если имеет место

$$f_B(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n) \not\equiv f_B(x_1, \ldots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Определение 3. Отображение вида $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ называется выпуклой функцией на $\mathbb{K}^n$, если для любых $x, y \in \mathbb{K}^n$ и любого $\alpha \in [0,1]$ выполняется

$$f(\alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot y) \leqslant \alpha \cdot f(x) + (1-\alpha) \cdot f(y).$$

Определение 4. Отображение вида $f_C : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ называется выпуклым продолжением на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$, если выполняются следующие два условия:

a) отображение f_C на $\mathbb{K}^n$ является выпуклой функцией;
b) имеет место равенство $f_C(b_1, b_2, \ldots, b_n) = f_B(b_1, b_2, \ldots, b_n) \quad \forall (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{B}^n$.

Определение 5. Отображение вида $f_{DM} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ называется максимумом среди всех выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$, если выполняются следующие два условия:

a) отображение f_{DM} является выпуклым продолжением булевой функции f_B на $\mathbb{K}^n$;
b) для любого f_C — выпуклого продолжения на $\mathbb{K}^n$ булевой функции f_B и любой $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ справедливо неравенство $f_C(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant f_{DM}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Определение 6. Отображение вида $f_R : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ назовём непрерывно дифференцируемым выпуклым продолжением на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$, если выполняются следующие два условия:

a) отображение f_R на $\mathbb{K}^n$ является непрерывно дифференцируемой выпуклой функцией;
b) имеет место равенство $f_R(b_1, b_2, \ldots, b_n) = f_B(b_1, b_2, \ldots, b_n) \quad \forall (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{B}^n$.

Определение 7. Отображение вида $f_{NR} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ назовём максимумом среди непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$, если выполняются следующие два условия:

a) отображение f_{NR} является непрерывно дифференцируемым выпуклым продолжением на $\mathbb{K}^n$ булевой функции f_B;
b) для любого f_R — непрерывно дифференцируемого выпуклого продолжения на $\mathbb{K}^n$ булевой функции f_B и любой $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ справедливо неравенство

$$f_R(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant f_{NR}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Пусть $E_C\left(f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbb{K}^n\right)$ — множество непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2. О мощности и минимальном элементе множества непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$

В этом разделе обоснуем, что для любой булевой функции $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ справедливо равенство $\operatorname{card}\left(E_C\left(f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbb{K}^n\right)\right) = c$ и также покажем, что среди непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нет минимума.

Утверждение 1. Для каждой булевой функции $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ множество её непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^n$ имеет мощность континуума и не имеет минимального элемента.

Доказательство. Очевидно, что имеет место вложение

$$E_C\left(f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbb{K}^n\right) \subset C(\mathbb{K}^n), \tag{1}$$

т. е. множество $E\left(f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbb{K}^n\right)$ является подмножеством множества всех непрерывных функций, заданных на $\mathbb{K}^n$. В силу теоремы 2.1, приведённой в [11], имеем, что $E_C\left(f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbb{K}^n\right) \neq \varnothing$. Пусть $\psi_R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольный элемент множества $E\left(f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbb{K}^n\right)$. Тогда рассмотрим следующую функцию

$$\psi_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi_R(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 - x_k\right). \tag{2}$$

Обоснуем, что имеет место включение

$$\psi_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_C\left(f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbb{K}^n\right) \quad \forall \alpha \in (0, +\infty). \tag{3}$$

Для этого покажем справедливость следующих двух свойств:

a. Функция $\psi_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на $\mathbb{K}^n$ является непрерывно дифференцируемой и выпуклой.
b. Имеет место равенство $\psi_\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f_B(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{B}^n$.

Обоснование этих двух свойств:

a. Непрерывная дифференцируемость. Из непрерывной дифференцируемости функций $\psi_R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 - x_k\right)$, т. е. включений $\psi_R(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^1(\mathbb{K}^n)$ и $\sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 - x_k\right) \in C^1(\mathbb{K}^n)$ получаем, что функция $\psi_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является непрерывно дифференцируемой, т. е. $\psi_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^1(\mathbb{K}^n)$.

   Выпуклость. Ввиду выпуклости функции $\sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 - x_k\right)$ на $\mathbb{K}^n$ и $\alpha > 0$, имеем, что функция $\psi_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на $\mathbb{K}^n$ как сумма двух выпуклых функций является выпуклой.

b. Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{B}^n$. Тогда

$$\psi_\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \psi_R(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 - a_k\right) = \psi_R(a_1, a_2, \ldots, a_n) +$$

$$+\alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_k) = \psi_R(a_1, a_2, \ldots, a_n) + 0 = f_B(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Ввиду (2) получаем, что $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in (0, +\infty), \alpha_1 < \alpha_2$ и $\forall (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in \operatorname{int}(\mathbb{K}^n)$ справедлива цепочка

$$\psi_R(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) > \psi_{\alpha_1}(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) > \psi_{\alpha_2}(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*). \tag{4}$$

Ввиду (3) получаем, что имеет место включение

$$\bigcup_{\alpha\in[1,2]}\{\psi_\alpha(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}\subset E_C\left(f_B(x_1,x_2,\ldots,x_n),\mathbb{K}^n\right). \tag{5}$$

Отсюда, в силу $\operatorname{card}\left(\bigcup\limits_{\alpha\in[1,2]}\{\psi_\alpha(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}\right)=c$, вытекающего из (4), и $\operatorname{card}\left(C(\mathbb{K}^n)\right)=c$, и также вложений (1), (5), получаем $\operatorname{card}\left(E_C\left(f_B(x_1,x_2,\ldots,x_n),\mathbb{K}^n\right)\right)=c$, т. е. мощность множества непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ равна континууму. Ввиду произвольности $\psi_R(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и справедливости (3) и (4) получаем, что среди непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ нет минимума. □

Замечание 1. Легко заметить, что утверждение 1 является уточнением (усилением) теоремы 2.1, приведённой в [11].

3. О максимальном элементе множества непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}$

В этом разделе докажем, что множество непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^n$ произвольной булевой функции $f_B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ имеет максимальный элемент лишь тогда, когда количество существенных переменных этой булевой функции $f_B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ меньше 2. Для этого сначала докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Для каждой булевой функции $f_B(x,y)$, которая существенно зависит от двух своих переменных x и y, среди её непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^2$ нет максимума.*

Доказательство. Доказательство проводим от противного: пусть некоторая вещественная функция $f_{NR}(x,y)$ является максимумом среди непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^2$ булевой функции $f_B(x,y)$. В силу следствия 3, приведённого в [13], получим, что $\forall(x,y)\in\mathbb{K}^2$ выполнено неравенство

$$\begin{gathered}f_{NR}(x,y)\leqslant f_{DM}(x,y)=(1-x-y)\cdot f_B(0,0)+x\cdot f_B(1,0)+y\cdot f_B(0,1)+\\+\frac{f_B(0,0)-f_B(0,1)-f_B(1,0)+f_B(1,1)}{4}\cdot(2x+2y-1-|x-y|+|x+y-1|)+\\+\frac{|f_B(0,0)-f_B(0,1)-f_B(1,0)+f_B(1,1)|}{4}\cdot(|x-y|+|x+y-1|-1),\end{gathered} \tag{6}$$

так как $f_{DM}(x,y)$ является максимумом среди всех выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^2$ булевой функции $f_B(x,y)$. Нетрудно показать, что для каждой булевой функции $f_B(x,y)$, существенно зависящей от двух своих переменных x и y выполнено неравенство

$$f_B(0,0)-f_B(0,1)-f_B(1,0)+f_B(1,1)\neq 0. \tag{7}$$

Ввиду (6) и (7) функция $f_{DM}(x,y)$ на $\mathbb{K}^2$ не является дифференцируемой и, следовательно, существует конкретная точка $(x^*,y^*)\in\mathbb{K}^2$ такая, что выполняется следующее строгое неравенство

$$f_{NR}(x^*, y^*) < f_{DM}(x^*, y^*), \tag{8}$$

так как в противном случае $f_{NR}(x, y) \equiv f_{DM}(x, y)$, а это противоречит к тому, что функция $f_{NR}(x, y)$ на $\mathbb{K}^2$ непрерывно дифференцируема. Теперь, ввиду неравенства (8), эквивалентного неравенству $f_{NR}(x^*, y^*) < f_1(x^*, y^*)$, нетрудно показать, например, рассмотрев два случая относительно знака левой части (7) и заметив, что функция $f_\beta(x^*, y^*)$ по β непрерывна на $[1, +\infty)$ и также не возрастает на $[1, +\infty)$, что существует $\beta^* \in (1, +\infty)$ такое, что выполняется следующее строгое неравенство

$$f_{NR}(x^*, y^*) < f_{\beta^*}(x^*, y^*), \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} f_\beta(x, y) &= (1 - x - y) \cdot f_B(0, 0) + x \cdot f_B(1, 0) + y \cdot f_B(0, 1) + \\ &+ \frac{f_B(0, 0) - f_B(0, 1) - f_B(1, 0) + f_B(1, 1)}{4} \cdot \left(2x + 2y - 1 - |x - y|^\beta + |x + y - 1|^\beta\right) + \\ &+ \frac{|f_B(0, 0) - f_B(0, 1) - f_B(1, 0) + f_B(1, 1)|}{4} \cdot \left(|x - y|^\beta + |x + y - 1|^\beta - 1\right), \quad \beta \geqslant 1. \end{aligned} \tag{10}$$

Ввиду справедливости равенства

$$|z|^\beta = |z| \quad \forall z \in \{-1, 0, 1\} \text{ и } \forall \beta > 1$$

и того, что для любого $\beta > 1$ функция, равная $|x|^\beta$, является выпуклой и непрерывно дифференцируемой, имеем, что функция $f_\beta(x, y)$ для каждого $\beta > 1$, в частности для $\beta = \beta^*$, является непрерывно дифференцируемым выпуклым продолжением на $\mathbb{K}^2$ булевой функции $f_B(x, y)$. Таким образом, получаем противоречие, т. е. полученное в (9) противоречит сделанному выше предположению о том, что вещественная функция $f_{NR}(x, y)$ является максимумом среди непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^2$ булевой функции $f_B(x, y)$, существенно зависящей от x и y. □

Теперь, основываясь на лемме 1, докажем следующую теорему, являющуюся усилением доказанной леммы 1.

Теорема 1. *Если количество существенных переменных булевой функции $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не меньше 2, то среди её непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^n$ нет максимума, а если оно меньше 2, то среди её непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^n$ есть максимум.*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть количество существенных переменных булевой функции $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ меньше 2. В этом случае достаточно рассмотреть булеву функцию $f_B(x)$, зависящую только от одной, не обязательно существенной, переменной x. Согласно следствию 2, приведённому в [13], имеем, что для булевой функции $f_B(x)$ вещественная функция

$$f_{DM}(x) = (1 - x) \cdot f_B(0) + x \cdot f_B(1) \tag{11}$$

является единственным максимумом среди всех её выпуклых продолжений на $\mathbb{K}$. Так как функция $f_{DM}(x)$, определённая формулой (11), непрерывно дифференцируема, то она также является максимумом среди непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений булевой функции $f_B(x)$, т. е.

$$f_{NR}(x) = (1 - x) \cdot f_B(0) + x \cdot f_B(1). \tag{12}$$

Случай 2. Пусть количество существенных переменных булевой функции $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не меньше 2. В этом случае, без потери общности можно считать, что все переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ булевой функции $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является существенными. Докажем от противного: пусть существует вещественная функция $f_{NR}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая является максимумом среди непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда имеем, что $\forall \left(b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_{j-1}, b_{j+1}, \ldots, b_n\right) \in \mathbb{B}^{n-2}$ суженная вещественная функция

$$f_{NR}\left(b_1, \ldots, b_{i-1}, x_i, b_{i+1}, \ldots, b_{j-1}, x_j, b_{j+1}, \ldots, b_n\right)$$

является максимумом среди непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^2$ суженной булевой функции $f_B\left(b_1, \ldots, b_{i-1}, x_i, b_{i+1}, \ldots, b_{j-1}, x_j, b_{j+1}, \ldots, b_n\right)$. Согласно доказанному в [16, 17] имеем, что существует выделимая пара переменных (x_i, x_j) булевой функции $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т. е. существуют $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i < j$ и $(b_1^*, \ldots, b_{i-1}^*, b_{i+1}^*, \ldots, b_{j-1}^*, b_{j+1}^*, \ldots, b_n^*) \in \mathbb{B}^{n-2}$ такие, что переменные x_i и x_j суженной булевой функции $f_B\left(b_1^*, \ldots, b_{i-1}^*, x_i, b_{i+1}^*, \ldots, b_{j-1}^*, x_j, b_{j+1}^*, \ldots, b_n^*\right)$ являются существенными. Отсюда получаем, что вещественная функция вида

$$g_{NR}(x_i, x_j) = f_{NR}\left(b_1^*, \ldots, b_{i-1}^*, x_i, b_{i+1}^*, \ldots, b_{j-1}^*, x_j, b_{j+1}^*, \ldots, b_n^*\right)$$

является максимумом среди непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^2$ булевой функции

$$g_B(x_i, x_j) = f_B\left(b_1^*, \ldots, b_{i-1}^*, x_i, b_{i+1}^*, \ldots, b_{j-1}^*, x_j, b_{j+1}^*, \ldots, b_n^*\right),$$

существенно зависящей от своих двух переменных x_i и x_j. Пришли к противоречию с тем, что, согласно доказанной лемме 1, среди непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^2$ булевой функции $g_B(x_i, x_j)$, существенно зависящей от своих двух переменных x_i и x_j, нет максимума. $\square$

Заключение

В результате исследования установлено, что мощность множества непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^n$ произвольной булевой функции $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равна континууму. Аргументировано, что для любой булевой функции $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ среди её непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^n$ нет минимального элемента. Доказано, что для любой булевой функции $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ множество её непрерывно дифференцируемых выпуклых продолжений на $\mathbb{K}^n$ имеет максимальный элемент тогда и только тогда, когда количество существенных переменных этой булевой функции $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ меньше 2.

Отметим, что полученный в данной работе результат является усилением (обобщением) результата, приведенного в [11], и может быть использован при проведении аналогичного исследования, соответствующего выпуклым [18] и вогнутым [19] продолжениям булевоподобных дискретных функций. Кроме того, наряду с [11], он может быть применен при сведении смешанной системы булевых и булевоподобных дискретных уравнений к задаче непрерывной оптимизации, а также при последующем поиске множества решений.

Благодарности

Авторы искренне благодарят рецензента за внимательное прочтение работы и полезные замечания и рекомендации.

References

[1] A. H. Abdel-Gawad, A. F. Atiya, and N. M. Darwish, "Solution of systems of Boolean equations via the integer domain", *Information Sciences*, vol. 180, no. 2, pp. 288–300, 2010. DOI: 10.1016/j.ins.2009.09.010.

[2] G. V. Bard, *Algorithms for solving linear and polynomial systems of equations over finite fields, with applications to cryptanalysis*. University of Maryland, College Park, 2007.

[3] V. Leontiev and E. Gordeev, "On the number of solutions to a system of Boolean equations", *Automation and Remote Control*, vol. 82, pp. 1581–1596, 2021. DOI: 10.1134/S000511792109006X.

[4] E. Ishchukova, E. Maro, and P. Pristalov, "Algebraic analysis of a simplified encryption algorithm GOST R 34.12-2015", *Computation*, vol. 8, no. 2, p. 51, 2020. DOI: 10.3390/computation8020051.

[5] A. I. Pakhomchik, V. V. Voloshinov, V. M. Vinokur, and G. B. Lesovik, "Converting of Boolean expression to linear equations, inequalities and QUBO penalties for cryptanalysis", *Algorithms*, vol. 15, no. 2, p. 33, 2022. DOI: 10.3390/a15020033.

[6] S. Ramos-Calderer *et al.*, "Solving systems of Boolean multivariate equations with quantum annealing", *Physical Review Research*, vol. 4, no. 1, p. 013 096, 2022. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.4.013096.

[7] E. Burek, M. Wroński, K. Mańk, and M. Misztal, "Algebraic attacks on block ciphers using quantum annealing", *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computing*, vol. 10, no. 2, pp. 678–689, 2022. DOI: 10.1109/TETC.2022.3143152.

[8] J. Gu, "Global optimization for satisfiability (SAT) problem", *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, vol. 6, no. 3, pp. 361–381, 1994. DOI: 10.1109/69.334864.

[9] D. N. Barotov and R. N. Barotov, "Polylinear continuations of some discrete functions and an algorithm for finding them", *Numerical methods and programming*, vol. 24, no. 1, pp. 10–23, 2023, in Russian. DOI: 10.26089/NumMet.v24r102.

[10] R. T. Faizullin, V. I. Dulkeyt, and Y. Y. Ogorodnikov, "Hybrid method for the approximate solution of the 3-satisfiability problem associated with the factorization problem", *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, vol. 19, no. 2, pp. 285–294, 2013, in Russian.

[11] D. N. Barotov and R. N. Barotov, "Construction of smooth convex extensions of Boolean functions", *Russian Universities Reports. Mathematics*, vol. 29, no. 145, pp. 20–28, 2024, in Russian. DOI: 10.20310/2686-9667-2024-29-145-20-28.

[12] D. N. Barotov, "Convex continuation of a Boolean function and its applications", *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, vol. 18, no. 1, pp. 1–9, 2024. DOI: 10.1134/S1990478924010010.

[13] D. N. Barotov, "On the existence and properties of convex extensions of Boolean functions", *Mathematical Notes*, vol. 115, no. 3, pp. 489–505, 2024. DOI: 10.1134/S0001434624030210.

[14] D. N. Barotov, "Concave continuations of Boolean functions and some of their properties and applications", *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, vol. 49, pp. 105–123, 2024, in Russian. DOI: 10.26516/1997-7670.2024.49.105.

[15] D. N. Barotov and V. A. Sudakov, "On inequalities between convex, concave, and multilinear continuations of Boolean functions", *Keldysh Institute preprints*, no. 30, pp. 1–13, 2024, in Russian. DOI: 10.20948/prepr-2024-30.

[16] A. Salomaa, “On essential variables of functions, especially in the algebra of logic”, *Annales Fennici Mathematici*, no. 339, pp. 1–11, 1964. DOI: 10.5186/aasfm.1964.339.

[17] Y. Y. Breitbart, “Essential variables of functions of the algebra of logic”, *Doklady Akademii Nauk*, vol. 172, no. 1, pp. 9–10, 1967, in Russian.

[18] D. N. Barotov, “Convex continuations of some discrete functions”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, vol. 18, no. 3, pp. 412–423, 2024. DOI: 10.1134/S1990478924030049.

[19] D. N. Barotov, “Concave continuations of Boolean-like functions and some of their properties”, *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, vol. 51, pp. 82–100, 2025, in Russian. DOI: 10.26516/1997-7670.2025.51.82.